

## **Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida**

David H. Sanders

### **Sinopsis**

En los extremos de las vigas con extremos entallados la transferencia de carga del apoyo hacia la viga constituye una región D. Los modelos de bielas y tirantes son una herramienta excelente para modelar estas regiones. En numerosas aplicaciones, por ejemplo en estructuras para edificios de estacionamiento, se utilizan vigas con extremos entallados en combinación con vigas T invertidas. En cada punto donde la carga de la viga con extremos entallados se apoya sobre la viga T invertida se forma una región D. En el siguiente ejemplo se utilizó el Apéndice A de ACI 318-02 para diseñar tanto la región de los extremos de la viga con extremos entallados como los estribos y armadura vertical necesarios para cada punto de carga en la viga T invertida. Las regiones B convencionales de la viga con extremos entallados se diseñaron utilizando el diseño convencional adoptado por ACI para el diseño de vigas.

**David H. Sanders**, miembro de ACI, recibió su título de Ingeniero Civil de la Iowa State University y su master y doctorado de la Universidad de Texas en Austin. Preside el Comité ACI 341, Puentes de Hormigón Sismorresistentes, y es miembro de TAC. Sus investigaciones se relacionan con el comportamiento y diseño de sistemas de hormigón, con particular énfasis en el diseño de puentes y aplicaciones sísmicas.

## 1 Geometría y cargas

Una viga T de hormigón con extremos entallados es soportada por una viga T invertida. El alma tiene 10 in. (254 mm) de ancho y la sección tiene una altura total de 19 in. (483 mm) (ver Figura 2-1). La viga T invertida también tiene una altura de 19 in. (483 mm) y un ancho de asiento de 7 in. (178 mm) (ver Figura 2-2). Las vigas T están ubicadas con una separación de 10 pies (3048 mm) sobre la longitud de la viga T invertida y tienen una longitud de 32 pies (9900 mm). Hay una sobrecarga de 100 psf (4,79 kN/m<sup>2</sup>) y una carga permanente superpuesta de 10 psf (0,48 kN/m<sup>2</sup>).

El ancho de la zona de influencia de cada una de las vigas T es de 10 pies (3048 mm). Por lo tanto, la sobrecarga efectiva es 1,0 k/ft (14,6 kN/m) y la carga permanente incluyendo la carga permanente superpuesta es 0,87 k/ft (12,7 kN/m). Esto produce una carga distribuida factoreada de 2,64 k/ft (38,6 kN/m), calculada en base a  $1,2 D + 1,6 L$ . El momento de diseño positivo ( $M_u$ ) es  $1/8 \times 2,64 \times 32,5^2 \times 12 = 4183$  in-kips (473 kN-m). La fuerza horizontal en el apoyo se toma como 10 kips (44,5 kN).

La resistencia del hormigón es 5500 psi (38 MPa). La armadura tiene una tensión de fluencia igual a 60.000 psi (414 MPa).

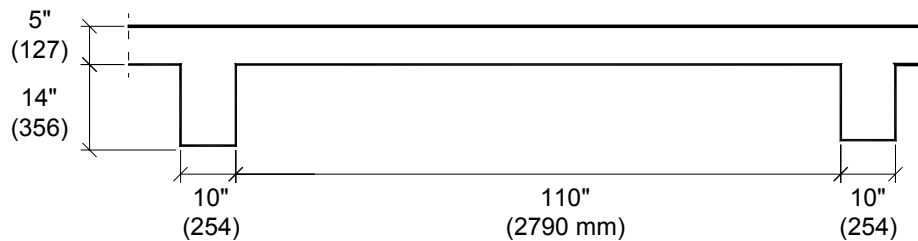


Figura 2-1: Geometría de la viga T

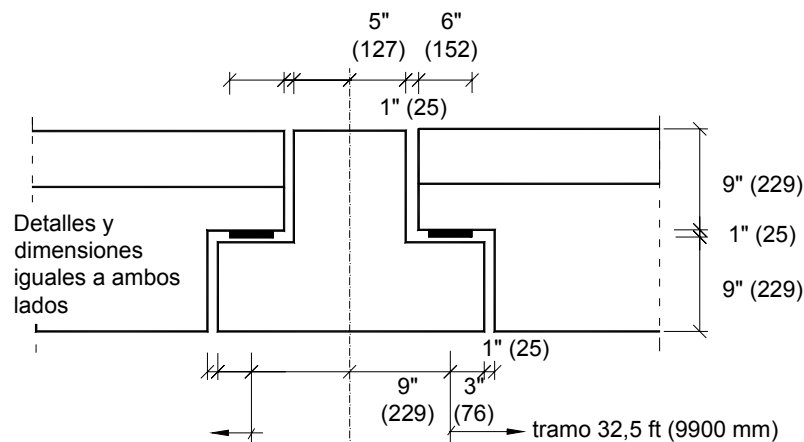


Figura 2-2: Detalles de la viga con extremos entallados y de la viga T invertida

## 2 Procedimiento de diseño

La estructura es una combinación de regiones D en los extremos entallados de la viga T y cerca de los puntos de carga de la viga T invertida. Las restantes zonas de las vigas constituyen regiones B. La viga T con extremos entallados simplemente apoyada se diseñará al momento y corte de forma tradicional. El modelo de bielas y tirantes se usará para hacer la transición de las fuerzas entre la sección de la viga y la carga concentrada en el apoyo. Luego la carga concentrada en el apoyo se distribuirá a la viga T invertida.

Se seguirán los siguientes pasos:

- Paso 1: Diseño a flexión de las regiones B.
- Paso 2: Diseño al corte de las regiones B.
- Paso 3: Modelo de bielas y tirantes para los extremos entallados.
- Paso 4: Diseño y verificación de las capacidades de las bielas, tirantes y nodos.
- Paso 5: Modelo de bielas y tirantes para la viga T invertida.
- Paso 6: Diseño y verificación de las capacidades de las bielas, tirantes y nodos.

## 3 Cálculos

### 3.1 Paso 1: Diseño a flexión de las regiones B

Se asumió que la armadura de tracción consiste en 2 filas de barras #9 (29 mm). Por lo tanto, la profundidad efectiva  $d = 19 - 1,5 - 3/8 - 9/8 - 1,25/2 = 15,375$  in. (391 mm), ver Figura 2-3. Las barras centrales ilustradas en la Figura 2-3 se usarán como parte del modelo de bielas y tirantes en la región correspondiente a los extremos entallados; no formarán parte del diseño tradicional a flexión.

El ancho efectivo  $b_e = b_w + 16(t) = 10 + 16(5) = 90$  in. (2286 mm)

Fijando  $M_u = 4183$  in-kips  $= \Phi M_n = 0,9 A_s f_y (d - a/2)$

$A_s = 5,21$  in.<sup>2</sup> (3363 mm<sup>2</sup>) y  $a = 0,74$  in. (19 mm)

Usar 6 barras #9 (29 mm);  $A_s = 6,0$  in.<sup>2</sup> (3871 mm<sup>2</sup>)

La cantidad de armadura de tracción satisface tanto  $A_s$  mínimo como  $A_s$  máximo.

Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

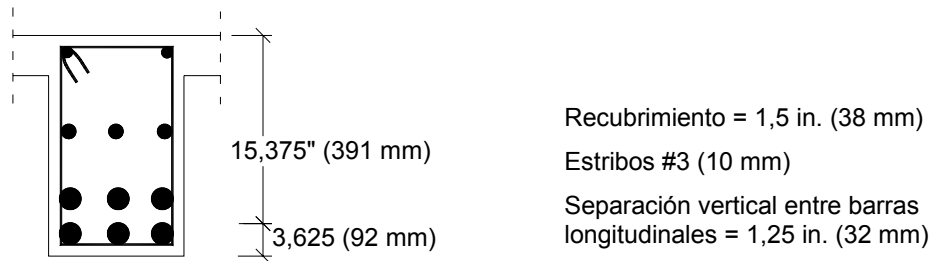


Figura 2-3: Sección transversal de la viga T

### 3.2 Paso 2: Diseño al corte

ACI 318 (1) permite realizar el diseño al corte a una distancia  $d$  a partir de la cara del apoyo. Debido a los extremos entallados, el diseño al corte se determinó a una distancia  $d$  a partir de la cara de la sección corta ( $d = 7$  in. (178 mm)).

$$V_u = 2,64 / 12 \times (32,5 / 2 \times 12 - 4 - 7) = 40,5 \text{ kips} \quad (180 \text{ kN})$$

$$V_c = 2 \sqrt{f'_c} b_w d = 2 \sqrt{5.500} \cdot 10 \times 15,375 / 1000 = 22,8 \text{ kips} \quad (101 \text{ kN})$$

$$V_u = 40,5 = \Phi V_n = \Phi(V_c + V_s) = 0,75(22,8 + V_s) \Rightarrow V_s = 31,2 \text{ kips} \quad (139 \text{ kN})$$

$$V_s = 31,2 = A_v f_y d / s = A_v / s \cdot 60 \times 15,375 \Rightarrow A_v / s = 0,0338 \text{ in}^2 / \text{in.} \quad (0,86 \text{ mm}^2 / \text{mm})$$

Si se utilizan aros #3 (10 mm)  $A_v = 0,22 \text{ in.}^2$  (142 mm<sup>2</sup>) y  $s = 6$  in. (152 mm).

Verifica ya que  $s < d/2 = 7,7$  in. (196 mm).

### 3.3 Paso 3: Desarrollo de un modelo de bielas y tirantes para la viga con extremos entallados

En la Figura 2-4 se ilustra el modelo de bielas y tirantes supuesto. Sobre el costado derecho del modelo de bielas y tirantes se asume que el tirante de la parte inferior de la sección está ubicado en el centro de la armadura longitudinal de tracción. Se asume que la biela de la parte superior de la sección está ubicada a una profundidad igual al 10% de la altura total. Esta también se podría tomar en el centro de la zona de compresión de acuerdo con lo calculado en el paso 1. La distancia entre los ejes de la biela superior y el tirante inferior es igual a  $(15,375 - 0,1 \times 19) = 13,48$  in. (342 mm). La carga distribuida se reparte al nodo más cercano usando el ancho de la zona de influencia a cada lado del nodo.

Para determinar el resto de la geometría del modelo de bielas y tirantes es necesario suponer una ubicación para el Tirante AD, el Tirante BC y el Tirante EF. La ubicación del Tirante AD permite espacio suficiente para una placa de extremo y los requisitos sobre recubrimiento de las armaduras (1,5 in. (38 mm)). El Tirante BC estará formado por varios

Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

estribos y, por lo tanto, el baricentro se debe ubicar alejado del extremo de la viga. El Tirante EF se colocó a una distancia igual a dos separaciones de los estribos (12 in. (305 mm)) a partir de BC. Ver Figura 2-4.

A partir de consideraciones geométricas surge:

$$\tan \theta_1 = 5,1/8 \Rightarrow \theta_1 = 32,5^\circ$$

$$\tan \theta_2 = 5,1/7 \Rightarrow \theta_2 = 36,1^\circ$$

$$\tan \theta_3 = 8,38/7 \Rightarrow \theta_3 = 50,1^\circ$$

$$\tan \theta_4 = 5,1/5 \Rightarrow \theta_4 = 45,6^\circ$$

A partir de consideraciones estáticas tenemos:

Biela AB =	78,2 kips (348 kN)	Tirante AD =	76,0 kips (338 kN)
Biela BD =	62,9 kips (280 kN)	Biela BE =	15,2 kips (67,6 kN)
Tirante BC =	76,9 kips (342 kN)	Biela CD =	100 kips (445 kN)
Tirante CF =	64,3 kips (286 kN)	Tirante EF =	37,0 kips (164 kN)
Biela DE =	55,9 kips (249 kN)		

Reacción vertical = 43,6 kips (194 kN)

Reacción Horizontal = 10 kips (44,5 kN)

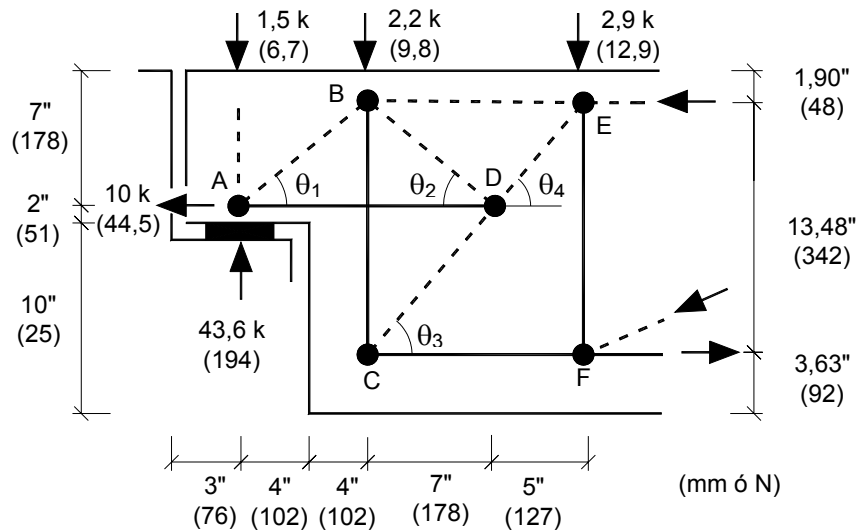


Figura 2-4: Modelo de bielas y tirantes supuesto

### 3.4 Paso 4: Diseño y verificación de las capacidades de las bielas, tirantes y nodos

#### 3.4.1 Nudo A

Es necesario verificar el Nudo A, es decir, la unión de la Biela AB y el Tirante AD en el apoyo extremo (ver Figura 2-5). La superficie de apoyo es 4 in. x 7 in. (102 mm x 178 mm). La longitud de desarrollo potencial para el Tirante AD se extiende hasta el punto donde el Tirante AD abandona la Biela AB. Debido a la escasa longitud de desarrollo, a fin de proveer desarrollo es necesario utilizar una placa en el extremo de la armadura del tirante. Esta placa también se tomó de 4 in. x 7 in. (102 mm x 178 mm). Si se proveyera mayor distancia más allá del apoyo o armadura adicional en el tirante puede que no fuera necesario utilizar la placa de extremo. El Código ACI actual no permite reducir la longitud de desarrollo aún cuando haya una elevada carga de compresión en la barra.

Para el nodo  $\beta_n$  es igual a 0,80 porque hay un tirante anclado. Para la Biela AB  $\beta_s$  puede ser 0,60 ó 0,75 si se colocan estribos suficientes:  $\sum A_{si} / b s_i \sin \gamma_i \geq 0,003$ .  $AB \Rightarrow 0,22 / (10 \times 2) \times \sin (90 - 32,5) = 0,009 >> 0,003$ . De modo que se podría usar  $\beta_s = 0,75$  si los estribos #3 (10 mm) se prolongaran hacia el extremo entallado. Se demostrará que esto no es necesario para proveer capacidad.

Capacidad de apoyo (A) =  $0,75 (0,85 \times 0,8 \times 5,5) (4 \times 7) =$

79 kips (351 kN) > 43,6 kips (194 kN) Verifica

Capacidad de la placa de apoyo del tirante (A) =  $0,75 (0,85 \times 0,8 \times 5,5) (4 \times 7) =$

79 kips (351 kN) > 75,9 kips (338 kN) Verifica

Armadura del tirante (AD)  $\Rightarrow 75,9 \text{ kips} = 0,75 (A_{s,AD}) 60 \Rightarrow A_{s,AD} = 1,69 \text{ in.}^2 (1090 \text{ mm}^2)$

Usar 3 barras #7 (22 mm);  $A_{s,AD} = 1,80 \text{ in.}^2 (1161 \text{ mm}^2)$  (Si se desea acortar la longitud de desarrollo o aumentar el tamaño del nodo se podría usar más de una capa.)

Ancho Biela AB (perpendicular a la línea de acción) =  $l_b \sin \theta_1 + h_t \cos \theta_1 =$

$= 4 \sin (32,5) + 4 \cos (32,5) = 5,52 \text{ in. (140 mm)}$

Asumir que el ancho de la biela es igual al ancho de la viga (10 in. (254 mm)).

Capacidad Biela AB =  $0,75 (0,85 \times 0,6 \times 5,5) (5,52 \times 10) = 116 \text{ kips (516 kN)}$

> 78,2 kips (348 kN) Verifica. No es necesario colocar armadura en la biela.

La dimensión dada en la Figura 2-5 para la distancia entre la parte inferior de la sección y el Tirante CF es ligeramente diferente a la dimensión de la Figura 2-4, utilizada para calcular los ángulos. Esto se debe a la necesidad de acomodar la armadura del Tirante BC. Debido a que la variación fue insignificante las fuerzas y los ángulos no se calcularon nuevamente.

Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

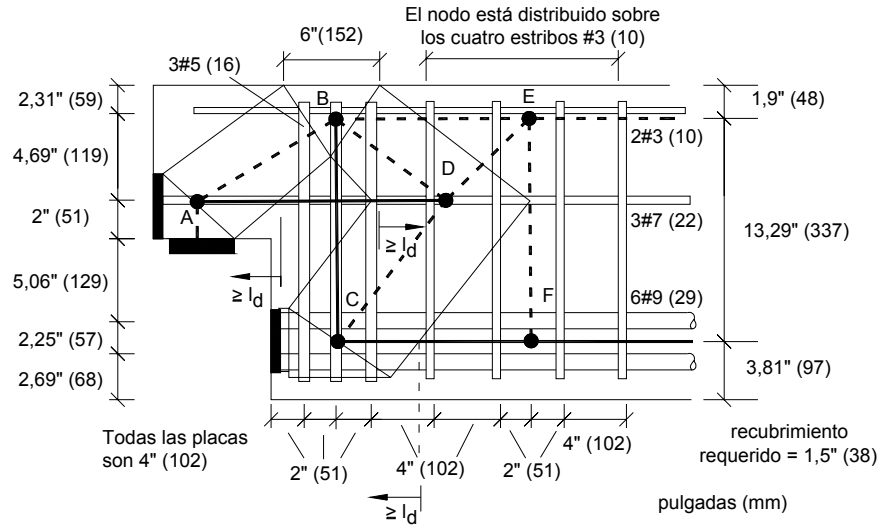


Figura 2-5: Detalles de las bielas y tirantes con la armadura propuesta

### 3.4.2 Nudo B

Para el Nudo B  $\beta_n$  es igual a 0,80 porque está anclando un tirante. Para la Biela BE  $\beta_s$  es igual a 1. Como el nodo tiene un  $\beta$  menor que la Biela BE, esta última no será determinante. Para las Bielas AB y BD los valores de  $\beta_s$  son 0,60 y por lo tanto serán determinantes para el diseño a compresión. El tamaño de las bielas es determinado por el ancho del Tirante BC.

Tirante BC = 76,8 kips = 0,75 ( $A_{s,BC}$ ) 60  $\Rightarrow A_{s,BC} = 1,71 \text{ in.}^2$  (1103 mm<sup>2</sup>)

Usar 3 estribos #5 (16 mm);  $A_{s,BC} = 1,86 \text{ in.}^2$  (1200 mm<sup>2</sup>)

La Figura 2-5 muestra la configuración del Nudo B. Los estribos #5 (16 mm) se colocaron con una separación de 2 in. (51 mm), creando una cara nodal de  $2 \times 2 + 2 = 6 \text{ in.}$  (152 mm). Las 2 in. (51 mm) adicionales surgen de permitir que el ancho del tirante se extienda algo más allá de la armadura (separación/2).

Ancho Biela AB =  $l_b \sin \theta + h_t \cos \theta =$

$$6/2(32,5) + 3,8 \cos(32,5) = 4,82 \text{ in.} \quad (122 \text{ mm})$$

Ancho Biela BD =  $l_b \sin \theta + h_t \cos \theta =$

$$6/2 \sin(36,1) + 3,8 \cos(36,1) = 4,84 \text{ in.} \quad (123 \text{ mm})$$

Para las Bielas AB y BD considerar el ancho de la biela igual al ancho del alma de la viga (10 in. (25 mm)). Si se desprecia la armadura  $\beta_s$  para las bielas es 0,60 (bielas en forma de botella). Por lo tanto,  $\beta_s$  se podría aumentar a 0,75 si se dispone armadura que satisfaga

A3.3.1 ( $\sum A_{si} / b s_i \sin \gamma_i \geq 0,003$ ). En la figura 2-5 no se muestra el límite superior de la Biela BD porque toda el área está en compresión. Además, la biela se dirige al Nodo D, que es un nodo distribuido.

$$\text{Capacidad Bielas AB y BD} = 0,75 (0,85 \times 0,6 \times 5,5) (4,8 \times 10) = 101 \text{ kips (449 kN)}$$

$$> 78,2 \text{ y } 62,9 \text{ kips (348 y 280 kN)} \quad \text{Verifica}$$

La longitud de desarrollo para el Tirante BC en el Nodo B está determinada por las verificaciones del desarrollo de los estribos de las Secciones 12.13 y 7.1.3 de ACI 318. El tirante debe anclarse tanto en su parte superior como en su parte inferior.

### 3.4.3 Nodo C

Para el nodo  $\beta_n$  es igual a 0,60 porque está anclando dos tirantes. El ancho inferior del nodo se fijó en función de la armadura vertical del Tirante BC, 6 in. (152 mm). En la Figura 2-5 se ilustra una placa de apoyo, la cual se podría eliminar moviendo el nodo/centro de la armadura hacia la derecha o aumentando la distancia entre la armadura vertical. La longitud de desarrollo se mide a partir del límite extremo derecho del nodo hacia la placa de apoyo.

Armadura Tirante CF  $\Rightarrow 64,2 \text{ kips} = 0,75 (A_{s,CF}) 60 \Rightarrow A_{s,CF} = 1,43 \text{ in.}^2 (920 \text{ mm}^2)$ . Si las 6 barras #9 (29 mm) se prolongan hacia el interior del Nodo C  $A_{s,CF} = 6,0 \text{ in.}^2 (3871 \text{ mm}^2)$ . La armadura adicional ayudará a reducir la longitud de desarrollo necesaria, pero aún así será mayor que la disponible. La distancia disponible para desarrollar el Tirante CF en el nodo es la distancia desde el borde del hormigón menos el recubrimiento hasta el punto donde el tirante abandona la Biela CD:  $6 - 1,5 + 2 \tan (50,1) = 6,9 \text{ in. (175 mm)}$ . En este caso a las barras #9 (29 mm) se agregó una placa de apoyo de 5 in. x 7 in. (127 mm x 178 mm).

$$\text{Capacidad placa de apoyo Tirante CF} = 0,75 (0,85 \times 0,6 \times 5,5) (5 \times 7)$$

$$= 73,6 \text{ kips (327 kN)} > 64,2 \text{ kips (286 kN)} \quad \text{Verifica}$$

$$\text{Ancho Biela CD} = l_b \sin \theta + h_t \cos \theta = 6 \sin (50,1) + 4 \cos (50,1) = 7,2 \text{ in. (182 mm)}$$

Asumir que el ancho de la biela es igual al ancho de la viga (10 in. (254 mm)) y que  $\beta_s = 0,6$ .

$$\text{Capacidad Biela CD} = 0,75 (0,85 \times 0,6 \times 5,5) (7,2 \times 10) = 179 \text{ kips (796 kN)}$$

$$100 \text{ kips (445 kN)} \quad \text{Verifica}$$

### 3.4.4 Nodo D

Para el Nodo D sólo hay que determinar la longitud de desarrollo del Tirante AD. Las bielas que ingresan al Nodo D están distribuidas. En el Nodo D el ancho de una biela será mayor o igual que el ancho de la biela en el otro extremo (Nodo B y Nodo C). Por lo tanto,



Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

en el Nodo D las verificaciones de capacidad quedan satisfechas por las verificaciones realizadas en 3.4.3 y 3.4.4. Se asumió que el ancho de la biela era constante entre los Nodos C y D. Con esto queda definido el límite izquierdo del nodo y el punto a partir del cual se puede desarrollar el Tirante AD.

Longitud de desarrollo para AD  $\Rightarrow l_d/d_b = 60.000 (1) (1) (1) (25 \sqrt{5500}) \Rightarrow$

$l_d = 28,3 \text{ in. (719 mm)}$  medidos a partir del lado izquierdo del Nodo D.

### 3.4.5 Nodos E y F

Ambos nodos están distribuidos sobre múltiples estribos. El número de estribos depende de la fuerza en el Tirante EF.

Tirante EF = 37,0 kips = 0,75 ( $A_{s,EF}$ ) 60  $\Rightarrow A_{s,EF} = 0,82 \text{ in.}^2 (529 \text{ mm}^2)$ . Usar 4 estribos #3 (10 mm) con una separación de 4 in. (102 mm).  $A_{s,EF} = 0,88 \text{ in.}^2 (567 \text{ mm}^2)$ . Con la separación de 4 in. (102 mm) se obtiene un baricentro sobre la recta EF y una distribución de los estribos entre el Nodo C y el Nodo F.

### 3.4.6 Modelos Alternativos

Se han desarrollado otros modelos potenciales para vigas con extremos entallados. Las Recomendaciones FIP "Diseño práctico del hormigón estructural" (2) contiene uno de estos modelos (ver Figura 2-6). Ensayos realizados indican que se forma una fisura en la esquina hacia la derecha del apoyo. En el primer modelo (ver Figura 2-4) una biela (BD) atraviesa la fisura, mientras que en este modelo no existe esa área de compresión. Esto es más compatible con la formación de fisuras, ya que permitiría que el área traccionada se extienda más aún hacia el interior de la viga. En el modelo alternativo el valor del Tirante AD es igual al ilustrado en el primer modelo, pero los valores de los Tirantes BC y CF son mucho menores en el modelo FIP. Esta es una solución aceptable para el modelo de bielas y tirantes.

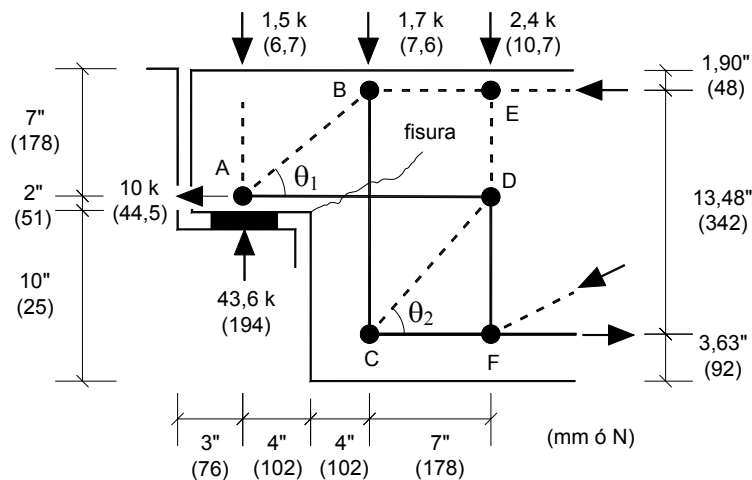


Figura 2-6: Modelo alternativo

## Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

A partir de consideraciones geométricas surge:

$$\tan \theta_1 = 5,1/8 \Rightarrow \theta_1 = 32,5^\circ$$

$$\tan \theta_2 = 8,38/7 \Rightarrow \theta_2 = 50,1^\circ$$

A partir de consideraciones estáticas tenemos:

Biela AB =	78,2 kips (348 kN)	Tirante AD =	76,0 kips (338 kN)
Biela BE =	76,0 kips (338 kN)	Tirante BC =	40,4 kips (180 kN)
Biela BC =	52,7 kips (234 kN)	Tirante DF =	38,0 kips (169 kN)
Tirante CF =	33,8 kips (150 kN)		

Reacción vertical = 43,6 kips (194 kN)

Reacción Horizontal = 10 kips (44,6 kN)

### 3.5 Paso 5: Modelo de bielas y tirantes para la viga T invertida

La Figura 2-7 ilustra el modelo de bielas y tirantes supuesto. A lo largo del eje longitudinal de la viga T invertida se utilizará la teoría tradicional de vigas.

A partir de consideraciones geométricas surge:  $\tan \theta = (5,1)/6,625 \Rightarrow \theta = 37,6^\circ$

A partir de consideraciones estáticas tenemos:

Biela AC =	71,5 kips (318 kN)	Tirante AB =	66,6 kips (296 kN)
Tirante CE =	43,6 kips (194 kN)	Biela CD =	56,6 kips (252 kN)

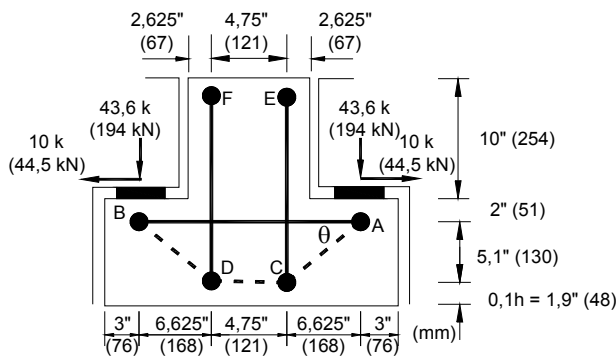


Figura 2-7: Modelo de bielas y tirantes para la viga T invertida

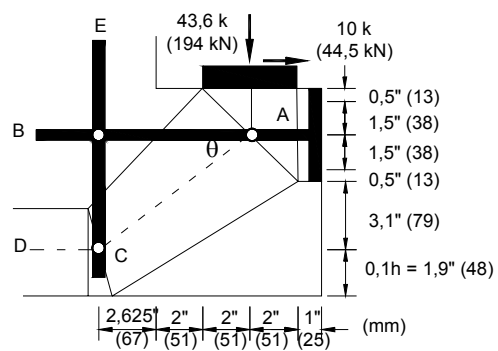


Figura 2-8: Detalles de las bielas y tirantes

Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

### 3.6 Paso 6: Diseño y verificación de las capacidades de las bielas, tirantes y nodos de una viga T invertida

#### 3.6.1 Nodo A

Es necesario verificar/diseñar la resultante de la Biela AC y el Tirante AB en el apoyo de la viga T invertida (ver Figura 2-8). La superficie de apoyo para la saliente de la viga T es de 4 in. x 7 in. (127 mm x 178 mm). Debido a la escasa longitud de desarrollo es necesario usar una placa de extremo. Esta placa también se tomó de 4 in. x 7 in. (102 mm x 178 mm). Utilizar este tipo de placas y soldar las barras a la placa constituyen prácticas habituales.

Para el nodo  $\beta_s$  es igual a 0,80 porque está anclando un tirante. Para la Biela AB  $\beta_s$  puede ser 0,60 ó 0,75 si se colocan estribos suficientes:  $\Sigma A_{si} / b s_i \sin \gamma_i \geq 0,003$ .

Capacidad de apoyo =  $0,75 (0,85 \times 0,8 \times 5,5) (4 \times 7) = 78,5$  kips (349 kN)

> 43,6 kips (194 kN) Verifica

Capacidad de la placa de apoyo del tirante =  $0,75 (0,85 \times 0,8 \times 5,5) (4 \times 7) =$

78,5 kips (349 kN) > 66,6 kips (796 kN) Verifica

Armadura del tirante AB  $\Rightarrow 66,6$  kips =  $0,75 (A_{s,AB}) 60 \Rightarrow A_{s,AB} = 1,48$  in.<sup>2</sup>

Usar 3 barras #7 (22 mm);  $A_{s,AB} = 1,80$  in.<sup>2</sup> (1161 mm<sup>2</sup>)

Ancho Biela AC (perpendicular a la línea de acción) =  $l_b \sin \theta + h_t \cos \theta =$

=  $4 \sin (37,6) + 4 \cos (37,6) = 5,61$  in. (142 mm)

Asumir que el ancho de la biela es igual al ancho de la sección (10 in. (254 mm)).

Capacidad Biela AC en (A) =  $0,75 (0,85 \times 0,6 \times 5,5) (5,61 \times 10) = 118$  kips (525 kN)

> 71,5 kips (318 kN) Verifica.

#### 3.6.2 Nodo C

Para el Nodo C hay una tracción transversal originada por la flexión longitudinal de la viga T invertida. Por lo tanto  $\beta_s$  es 0,60 ya que habría dos o más tirantes anclados en un modelo de bielas y tirantes tridimensional. Para las Bielas AC y CD  $\beta_s$  sería 0,4 ya que están ubicadas en la zona traccionada del miembro.

Armadura del tirante CE  $\Rightarrow 43,6$  kips =  $0,75 (A_{s,CE}) 60 \Rightarrow A_{s,CE} = 0,97$  in.<sup>2</sup>. Usar 4 barras #5 (16 mm);  $A_{s,CE} = 1,24$  in.<sup>2</sup> (800 mm<sup>2</sup>). Distribuir las barras como se indica en la Figura 2-9. Las barras estarán a 3 in. (76 mm) entre centro y centro a lo largo del eje longitudinal de la viga T invertida. La separación de 3 in. (76 mm) proporciona una distribución de los estribos en el ancho de asiento de la viga T.

## Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

La ubicación del Nodo C se tomó a  $0,1h$  de la parte inferior de la viga, por lo tanto la altura del nodo es el doble de dicho valor ó 3,8 in. (96 mm). El ancho del nodo es determinado por la armadura vertical (Tirante CE). El ancho se tomó como el tamaño de las barras más 1 in. (25 mm) a cada lado. Actualmente el Apéndice A no contiene este tipo de lineamientos. El ancho de la Biela AC es igual a  $l_b \sin \theta + h_t \cos \theta = (2,62) \sin (37,6) + (3,8) \cos (37,6) = 4,61$  in. (117 mm). El ancho de la biela es igual al ancho de la armadura del Tirante CE en el eje longitudinal de la viga T invertida (9 in.) más la mitad de la separación (1,5 in. (38 mm)) a cada lado de la armadura (11,5 in. (292 mm)). Capacidad Biela AC en (A) =  $0,75 (0,85 \times 0,4 \times 5,5) (4,61 \times 11,5) = 74,4$  kips (331 kN) > 71,5 kips (318 kN) Verifica.

El espesor de la Biela CD es igual al de la Biela AC (11,5 in. (292 mm)) y el ancho es  $1,9 \times 2 = 3,8$  in. (96 mm).

Capacidad Biela CD en (C) =  $0,75 (0,85 \times 0,4 \times 5,5) (3,8 \times 11,5) = 61,3$  kips (273 kN) > 56,6 kips (252 kN) Verifica.

Debido al mayor valor de  $\beta$  en comparación con el de las bielas, el nodo no determina el diseño.

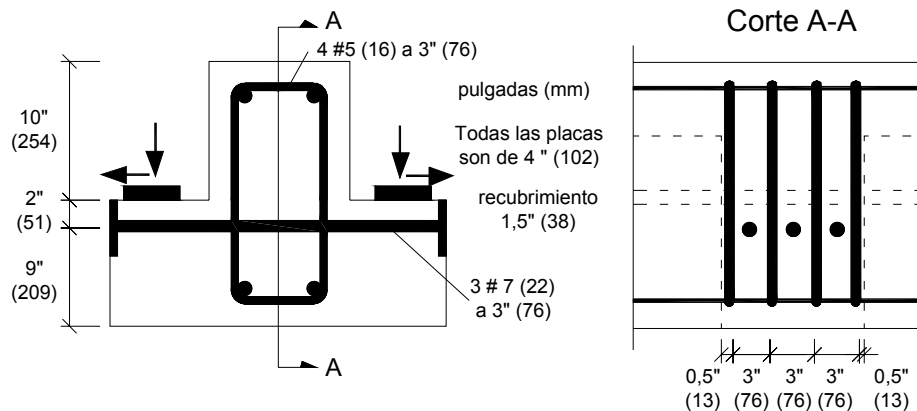


Figura 2-9: Detalles de las armaduras para la viga T invertida

## 4 Conclusiones

El ejemplo muestra cómo los requisitos del Apéndice A permiten modelar el flujo de las fuerzas a través de una estructura. Los modelos le proporcionan al ingeniero una herramienta de diseño racional para las partes de una estructura en las cuales no se puede aplicar la teoría de vigas tradicional.

Ejemplo 2: Viga T con extremos entallados soportada por una viga T invertida

## 5 Notación

- $a$  = altura del diagrama rectangular de tensiones equivalente, in. (mm)
- $A_s$  = sección de armadura de tracción no pretensada, in.<sup>2</sup> (mm<sup>2</sup>)
- $A_{si}$  = sección de armadura superficial en la capa  $i$  que atraviesa una biela
- $A_{s,IJ}$  = sección de armadura en el Tirante IJ, in.<sup>2</sup> (mm<sup>2</sup>)
- $A_v$  = sección de armadura de corte en una distancia  $s$ , in.<sup>2</sup> (mm<sup>2</sup>)
- $b$  = ancho de un miembro, in. (mm)
- $b_e$  = ancho efectivo de alas de una viga T, in. (mm)
- $d$  = distancia entre la fibra extrema comprimida y el baricentro de las barras traccionadas (profundidad efectiva), in. (mm)
- $f'_c$  = resistencia a la compresión especificada del hormigón, psi (MPa)
- $f_y$  = resistencia a la fluencia especificada de la armadura no pretensada, psi (MPa)
- $h_t$  = altura efectiva de un tirante, in. (mm)
- $l_b$  = longitud de la superficie de apoyo, in. (mm)
- $M_u$  = momento factoreado en una sección, in.-kips (kN-m)
- $s$  = separación de los estribos sobre el eje longitudinal de un miembro, in. (mm)
- $s_i$  = separación de la armadura en la capa  $i$  adyacente a la superficie de un miembro, in. (mm)
- $V_c$  = resistencia nominal al corte provista por el hormigón, kips (kN)
- $V_n$  = resistencia nominal al corte en una sección, kips (kN)
- $V_s$  = resistencia nominal al corte provista por la armadura de corte, kips (kN)
- $V_u$  = carga de corte factoreada, kips (kN)
- $\beta_b$  = factor que toma en cuenta los efectos de la resistencia de anclaje de una zona nodal
- $\beta_s$  = factor que toma en cuenta los efectos de la fisuración y la armadura de confinamiento sobre la resistencia efectiva a la compresión del hormigón de una biela
- $\gamma_i$  = ángulo formado por el eje de una biela y las barras en la capa  $i$  de armadura que atraviesa dicha biela, grados
- $\Phi$  = factor de reducción de la resistencia
- $\theta$  = ángulo formado por dos bielas o tirantes en un nodo, grados

## 6 Referencias

American Concrete Institute (2002): Apéndice A de ACI 318-02 (*Building Code Requirements for Structural Concrete*) y ACI 318R-02 (*Commentary*).

Recomendaciones FIP (1999): *Practical Design of Structural Concrete*.

Comisión FIP 3: "*Practical Design*", Sept. 1996.

Publ.: SETO, Londres, Sept. 1999. (Distribuido por: *fib*, Lausanne)

### **Ejemplo 3.1: Ménsula en una columna**

Tjen N. Tjhin

Daniel A. Kuchma

#### **Sinopsis**

Se diseñó una ménsula que se proyecta a partir de una columna cuadrada de 14 in. (356 mm) de lado usando el método de bielas y tirantes de acuerdo con el Apéndice A de ACI 318-02. La ménsula ha de soportar la fuerza de reacción de una viga premoldeada,  $V_u$ , igual a 56,2 kips (250 kN) actuando a una distancia 4 in. (102 mm) de la cara de la columna. Se asume que en la parte superior de la ménsula se desarrolla una fuerza de tracción horizontal,  $N_{uc}$ , igual a 11,2 kips (49,8 kN), la cual toma en cuenta las deformaciones por fluencia lenta y retracción. En la Figura (3.1-1) se describen la estructura y las cargas. Se considera hormigón de peso normal con una resistencia a la compresión especificada,  $f'_c$ , igual a 5 ksi (34,5 MPa). La resistencia a la fluencia de la armadura,  $f_y$ , se toma igual a 60 ksi (414 MPa).

En la Figura (3.1-2) se muestran las dimensiones seleccionadas para la ménsula, incluyendo su placa de apoyo. La relación longitud de corte / profundidad correspondiente,  $a/d$ , es igual a 0,24. A fin de satisfacer los requisitos del código se seleccionó el modelo de bielas y tirantes sencillo ilustrado en la Figura (3.1-3). La armadura principal del tirante dispuesta es de 5 barras #4 (#13 mm). Estas barras están soldadas a un perfil de acero estructural de 3½ in. x 3½ in. x ½ in. (89 mm x 89 mm x 13 mm). En la Figura (3.1-5) se indican los detalles de las armaduras.

**Tjen N. Tjhin** es candidato al doctorado en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Sus investigaciones abarcan el análisis no lineal y el diseño de estructuras de hormigón.

**Daniel (Dan) A. Kuchma** es Profesor Adjunto de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Es miembro del Subcomité ACI 318E, Corte y Torsión, y también del Comité conjunto ACI-ASCE 445, Corte y Torsión, y su Subcomité 445-A, Bielas y Tirantes.

## 1 Geometría y cargas

En la Figura (3.1-1) se ilustran la ménsula a diseñar y sus cargas.

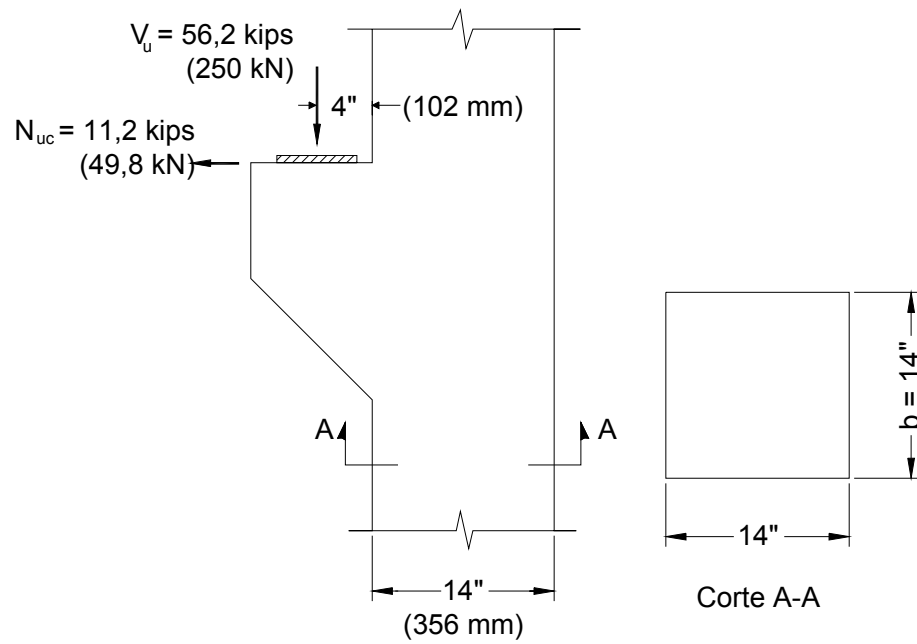


Figura 3.1-1: Geometría y cargas de la ménsula

Resistencias de los materiales:

$$f'_c = 5 \text{ ksi} \quad (34,5 \text{ MPa}) \text{ (hormigón de peso normal)}$$

$$f_y = 60 \text{ ksi} \quad (414 \text{ MPa})$$



## 2 Procedimiento de diseño

La totalidad de la estructura considerada constituye una región perturbada debido a que presenta cambios abruptos en su geometría y está próxima a fuerzas concentradas. La estructura se diseñará usando el método de bielas y tirantes de acuerdo con el Apéndice A de ACI 318-02. El procedimiento paso a paso es el siguiente:

- Paso 1: Determinar las dimensiones de la placa de apoyo.
- Paso 2: Seleccionar las dimensiones de la ménsula.
- Paso 3: Establecer el modelo de bielas y tirantes.
- Paso 4: Determinar las fuerzas requeridas en el reticulado.
- Paso 5: Seleccionar la armadura de los tirantes.
- Paso 6: Diseñar las zonas nodales y verificar los anclajes.
- Paso 7: Verificar las bielas.
- Paso 8: Calcular la armadura mínima requerida para limitar la fisuración.
- Paso 9: Detallar la armadura.

## 3 Cálculos

### 3.1 Paso 1: Determinar las dimensiones de la placa de apoyo

La zona nodal debajo de la placa de apoyo constituye un nodo solicitado por compresión y tracción (CCT). La correspondiente resistencia efectiva a la compresión es

$$f_{cu} = 0,85\beta_n f'_c \quad [\text{ACI Sección A.5.2 ec. (A-8)}]$$
$$= 0,85(0,80)(5000) = 3400 \text{ psi.}$$

Seleccionamos una placa de apoyo de 12 in. x 6 in. (305 mm x 152 mm). La superficie de la placa de apoyo es  $12 \times 6 = 72 \text{ in.}^2$  (46.451 mm<sup>2</sup>), y la tensión de apoyo es  $56,2$  (1000)/72 = 781 psi (5,38 MPa). Como este valor es menor que la tensión de apoyo límite, es decir,  $\phi f_{cu} = 0,75$  (3400) = 2550 psi (17,58 MPa), las dimensiones de la placa de apoyo seleccionada son adecuadas.

### 3.2 Paso 2: Seleccionar las dimensiones de la ménsula

Para poder utilizar el Apéndice A de ACI, la Sección 11.9.1 del código requiere una relación longitud de corte/profundidad,  $a/d$ , menor que 2. Para la ménsula seleccionamos

una profundidad total en la cara de la columna igual a 18 in. (457 mm). Además, la Sección 11.9.2 de ACI requiere que la profundidad en la parte exterior de esta área de apoyo sea al menos la mitad de la profundidad en la cara de la columna. Para satisfacer este requisito seleccionamos una profundidad de 9 in. (229 mm) en el extremo libre de la ménsula. La Figura (3.1-2) resume las dimensiones seleccionadas para la ménsula.

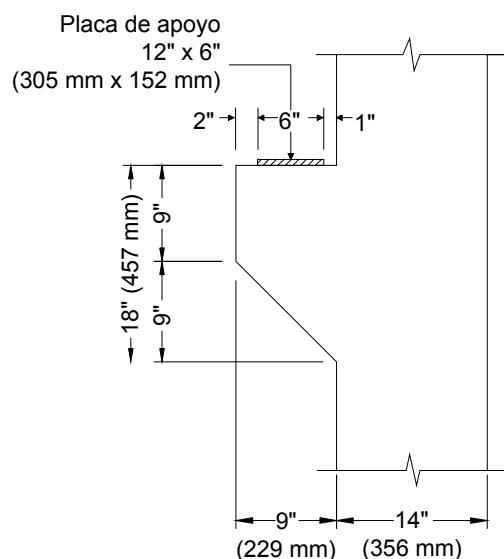


Figura 3.1-2: Dimensiones seleccionadas para la ménsula

### 3.3 Paso 3: Establecer el modelo de bielas y tirantes

Con el objeto de considerar las excentricidades de las cargas y las tolerancias de fabricación, la posición de  $V_u$  se traslada 1 in. desde el centro de la placa de apoyo hacia el borde exterior de la ménsula. Por lo tanto, la nueva posición con respecto a la cara de la columna es  $1 + 6/2 + 1 = 5$  in.

Seleccionamos un modelo de bielas y tirantes sencillo. En la Figura (3.1-3) se indica su geometría. Se asume que el centro del tirante CB está ubicado a una distancia de 1,6 in. a partir de la parte superior de la ménsula, considerando una capa de barras de armadura y aproximadamente 1 in. de recubrimiento de hormigón. Por lo tanto,

$$d = 18 - 1,6 = 16,4 \text{ in. (417 mm)} \quad [\text{ACI Sección 11.9.1)]}$$

Se asume que el tirante horizontal DA está ubicado sobre la recta horizontal que atraviesa el extremo inclinado de la ménsula.

### Ejemplo 3.1: Ménsula en una columna

La posición del eje de la biela DD' se puede hallar calculando el ancho de biela  $w_s$ , el cual se puede obtener planteando la ecuación de momentos respecto del nodo A de la siguiente manera:

$$56,2(0,32 + 5 + 12) + 11,2(16,4) = F_{u,DD'} \left( 12 - \frac{w_s}{2} \right) \quad (3.1-1)$$

donde  $F_{u,DD'} = \phi f_{cu} b w_s$  es la fuerza de compresión requerida en la biela DD' y  $b$  es la dimensión fuera del plano de la ménsula. Al igual que el nodo debajo de la placa de apoyo (nodo C), el nodo D es también un nodo CCT. Por lo tanto, según la Sección A.5.2 de ACI, su tensión está limitada a  $\phi f_{cu} = 2550$  psi (17,58 MPa), y  $F_{u,DD'} = 2550 (14) w_s / 1000 = 35,7 w_s$ .

Reemplazando  $F_{u,DD'}$  en la ecuación (3.1-1) y resolviendo se obtiene  $F_{u,DD'} = 111$  kips (494 kN) y  $w_s = 3,10$  in. (79 mm).

De esta manera queda corregida la geometría del reticulado.

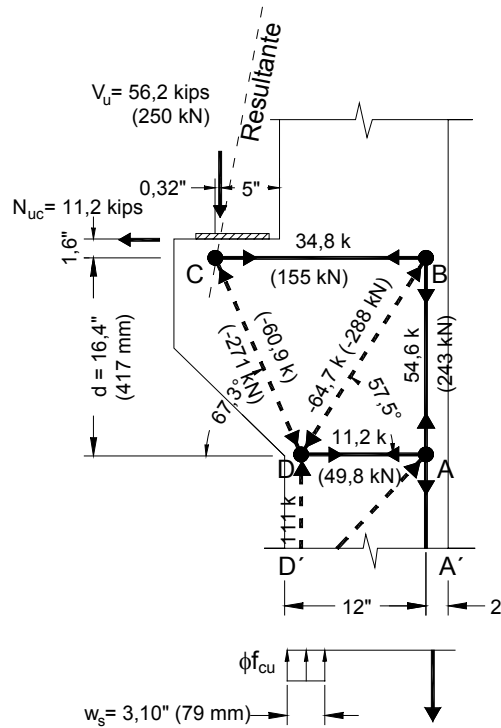


Figura 3.1-3: Modelo de bielas y tirantes seleccionado

### 3.4 Paso 4: Determinar las fuerzas requeridas en el reticulado

Las fuerzas requeridas en todos los miembros del reticulado se determinan en base a consideraciones estáticas; estas fuerzas se resumen en la Tabla (3.1-1). Un signo positivo (+) indica que el miembro está traccionado; un signo negativo (-) indica que el miembro está comprimido.

Tabla 3.1-1: Fuerzas en el reticulado

Miembro	CD	CB	BD	BA	DA	DD'
Fuerza (kips)	-60,9 (-271 kN)	+34,8 (+155 kN)	-64,7 (-288 kN)	+54,6 (+243 kN)	+11,2 (+49,8 kN)	-111 (-494 kN)

### 3.5 Paso 5: Seleccionar la armadura de los tirantes

La sección de armadura requerida para el tirante CB es

$$\frac{F_{u,CB}}{\phi f_y} = \frac{34,8}{0,75(60)} = 0,77 \text{ in.}^2 \quad [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.4.1}]$$

La sección de armadura provista debe ser de al menos

$$0,04 \frac{f'_c}{f_y} b d = \frac{0,04(5)}{60} (14)(16,4) = 0,77 \text{ in.}^2 \quad [\text{ACI Sección 11.9.5}]$$

Adoptamos 4 barras #4 (#13 mm),  $A_{st} = 4 (0,20) = 0,80 \text{ in.}^2 (516 \text{ mm}^2)$ .

Como se indica en la Tabla (3.1-1), el tirante BA está más traccionado que el tirante CB. Sin embargo, esta fuerza del tirante debe ser resistida mediante la armadura longitudinal de la columna. Por lo tanto prolongamos las 4 barras #4 hacia abajo en la columna sólo para tener suficiente longitud de desarrollo.

La sección de armadura requerida para el Tirante DA es

$$\frac{F_{u,DA}}{\phi f_y} = \frac{11,2}{0,75(60)} = 0,25 \text{ in.}^2 \quad [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.4.1}]$$

Seleccionamos 2 estribos de columna adicionales #3 (#10 mm) en la posición DA,  $A_{st} = 2 (2) (0,11) = 0,44 \text{ in.}^2 (284 \text{ mm}^2)$ . Estas barras están separadas 2 in. (51 mm) entre centros.

### 3.6 Paso 6: Diseñar las zonas nodales y verificar los anclajes

El ancho  $w_s$  de la zona nodal D ya fue seleccionado en la Sección 3.3 de manera de satisfacer la tensión límite en dicha zona nodal. Por lo tanto en esta sección sólo verificaremos la zona nodal C.

Para satisfacer la tensión límite en la zona nodal C es necesario que el ancho efectivo del tirante,  $w_t$ , sea al menos igual a

$$\frac{F_{u,CB}}{\phi f_{cu} b} = \frac{34,8(1000)}{2550(14)} = 0,97 \text{ in. (25 mm)} \quad [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.5.1}]$$

Este límite se satisface fácilmente porque el ancho de tirante disponible es  $2(1,6) = 3,2$  in. (81 mm). Ver Figura (3.1-4).

Para anclar el tirante CB soldar las 4 barras #4 a un perfil de acero de  $3\frac{1}{2}$  in. x  $3\frac{1}{2}$  in. x  $\frac{1}{2}$  in. (89 mm x 89 mm x 13 mm). En la Figura (3.1-5) se indican los detalles.

### 3.7 Paso 7: Verificar las bielas

La biela CD se verificará en base a las dimensiones determinadas por las zonas nodales C y D. Las demás bielas se verificarán calculando los anchos de las mismas y verificando si cabrán en el espacio disponible.

La resistencia nominal de la biela CD está limitada a

$$F_{ns} = f_{cu} A_c \quad [\text{ACI Sección A.3.1 ec. (A-2)}]$$

donde

$$\begin{aligned} f_{cu} &= 0,85\beta_s f'_c \quad [\text{ACI Sección A.3.2 ec. (A-3)}] \\ &= 0,85(0,75)(5000) = 3188 \text{ psi} \end{aligned}$$

y  $A_c$  es la menor de las áreas en los extremos de la biela. De la Figura (3.1-4),  $A_c = 14(2,86) = 40,04 \text{ in.}^2$ . Por lo tanto,  $F_{ns} = 3188(40,04)/1000 = 128$  kips. De la Tabla 3.1-1, la carga factoreada de la biela CD es 60,9 kips (271 kN). Debido a que este valor es menor que el límite, es decir,  $\phi F_{ns} = 0,75(128) = 96$  kips (427 kN), la biela CD resulta adecuada. Como se ha asumido  $\beta_s = 0,75$  se colocará armadura mínima; los cálculos se incluyen en la sección siguiente.

La resistencia efectiva a la compresión de la biela BD también está limitada a  $f_{cu} = 3188$  psi. En consecuencia el ancho requerido para la biela BD es

$$\frac{F_{u,BD}}{\phi f_{cu} b} = \frac{64,7(1000)}{0,75(3188)(14)} = 1,93 \text{ in.} \quad [\text{ACI Sección A.2.6 y A.3.1}]$$

Adoptamos un ancho de 2 in. (51 mm) para la biela BD. El ancho requerido para la biela DD' ya fue determinado en la Sección 3.2, habiéndose obtenido un ancho de 3,10 in. (79 mm).

Como se ilustra en la Figura (3.1-4), todos los anchos de las bielas caben dentro de los límites de la región de la ménsula. En consecuencia esta solución es aceptable.

### 3.8 Paso 8: Calcular la armadura mínima requerida para limitar la fisuración

La Sección 11.9.4 de ACI requiere zunchos o estribos cerrados paralelos a la armadura requerida para el tirante CB, uniformemente distribuidos en dos tercios de la profundidad efectiva adyacente al tirante CB, es decir,  $2/3 (16,4) = 10,9$  in. Adoptamos 10,5 in. La sección de estos estribos debe ser mayor que

$$A_h = 0,5(A_{st} - A_n) \quad [\text{ACI Sección 11.9.4}]$$

donde  $A_n$  es la sección de armadura que resiste la fuerza de tracción  $N_{uc}$  y  $A_{st} \equiv A_s$  según la Sección 11.9 de ACI. Por lo tanto, la sección mínima requerida es

$$A_h = 0,5(A_{st} - A_n) \\ = 0,5\left(A_{st} - \frac{N_{uc}}{\phi f_y}\right) = 0,5\left(0,80 - \frac{11,2}{0,85(60)}\right) = 0,29 \text{ in.}^2$$

Intentamos con 3 estribos cerrados #3,  $A_v = 3 (2) (0,11) = 0,66 \text{ in.}^2$ , con una separación media de  $10,5 / 3 = 3,5$  in.

Como para las bielas diagonales usamos  $\beta_s = 0,75$  la armadura mínima provista también debe satisfacer

$$\sum \frac{A_{si}}{bs_i} \sin \gamma_i \geq 0,0030 \quad [\text{ACI Sección A.3.3.1 ec. (A-4)}]$$

donde  $\gamma_i$  es el ángulo formado por el eje de la armadura mínima y el eje de la biela. De acuerdo con la Sección A.3.3.2 de ACI  $\gamma_i$  debe ser mayor que  $40^\circ$  porque solamente se provee armadura horizontal. En base a la armadura provista y al ángulo de la biela BD, es decir el menor ángulo entre una biela y la armadura mínima,

$$\sum \frac{A_{si}}{bs_i} \sin \gamma_i = \frac{2(0,11)}{14(3,5)} \sin 57,5^\circ = 0,0038 > 0,003.$$

Como esta cantidad de armadura satisface ambos requisitos, disponemos 3 estribos cerrados #3 (#10 mm) con una separación de 3,5 in. (89 mm), distribuidos en una profundidad de 10,5 in. (267 mm) a partir del tirante CB.

Ejemplo 3.1: Ménsula en una columna

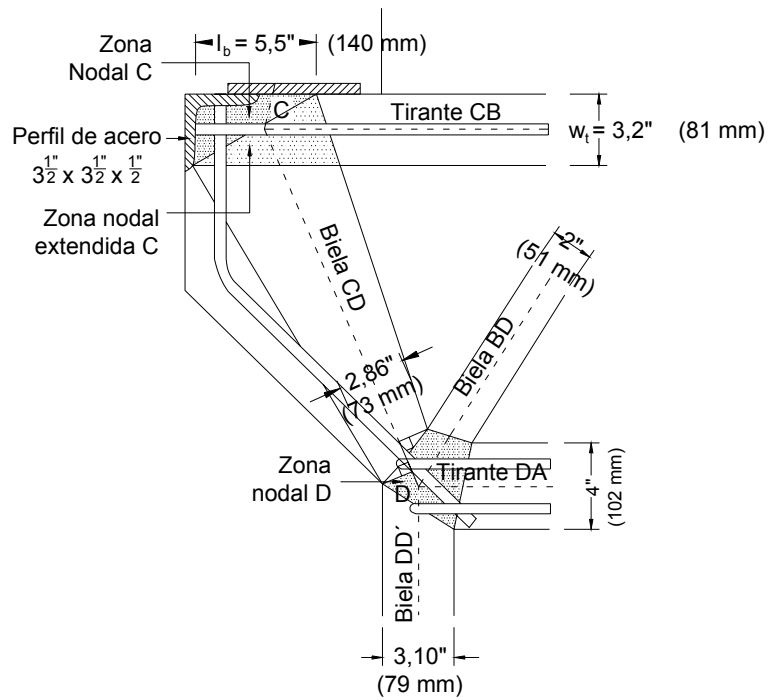


Figura 3.1-4: Dimensiones de los componentes del modelo de bielas y tirantes

### 3.9 Paso 9: Detallar la armadura

En la Figura (3.1-5) se ilustran los detalles de las armaduras.

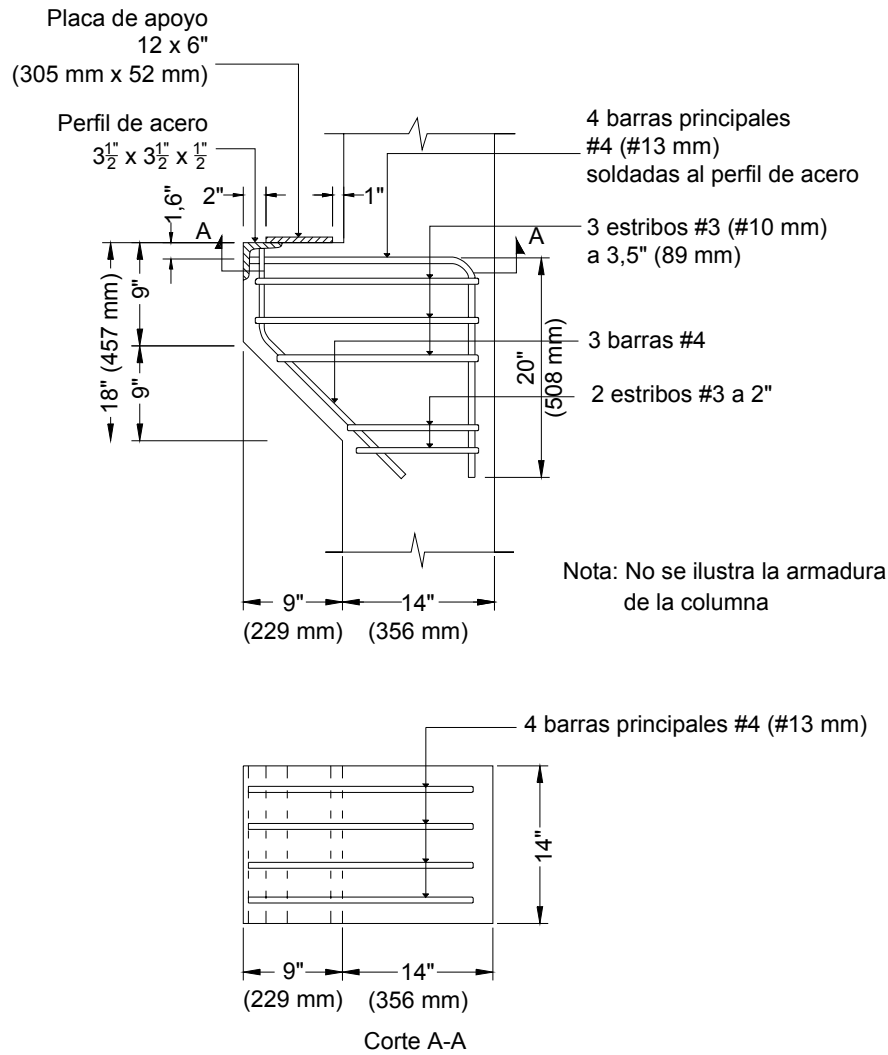


Figura 3.1-5: Detalles de las armaduras



## 4 Resumen

Se presenta el diseño de una ménsula. Este diseño se completó usando el Apéndice A de ACI 318-02 "Modelos de Bielas y Tirantes" y la Sección 11.9 de ACI 318-02 "Requisitos Especiales para Ménsulas y Cartelas".

Los principales pasos del diseño consisten en definir la región D y las fuerzas de borde que actúan sobre dicha región, seleccionar un modelo de bielas y tirantes que soporte las fuerzas de borde de la región D, resolver el modelo de bielas y tirantes para hallar las fuerzas en los miembros, disponer armadura que conforme los tirantes de acero, dimensionar las bielas y nodos, y proveer armadura distribuida para limitar la fisuración y lograr ductilidad.

En este ejemplo la totalidad de la ménsula constituye la región D, para cuyo diseño se utilizó un modelo de bielas y tirantes sencillo.

Esto se debe a que existen discontinuidades estáticas, es decir, fuerzas concentradas, y discontinuidades geométricas a una distancia menor que una altura flexional de la sección de la ménsula a cada lado de la discontinuidad. Para el diseño se utilizó un modelo de bielas y tirantes sencillo. Este modelo de bielas y tirantes dio por resultado el uso de una capa de 4 barras #4 (#13 mm) para el tirante principal. Este tirante requiere suficiente anclaje para garantizar que pueda soportar la fuerza requerida sin que se produzcan fallas de anclaje. Esto se logró soldando todas las barras principales a un perfil de acero estructural.

## Referencias

ACI 318-02: *Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary*. ACI Committee 318, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 2002, 443 pp.

### Ejemplo 3.1: Ménsula en una columna

## Ejemplo 3.2: Ménsula doble

Tjen N. Tjhin

Daniel A. Kuchma

### Sinopsis

Se diseñó una ménsula doble que se proyecta a partir de una columna interior usando el método de bielas y tirantes de acuerdo con el Apéndice A de ACI 318-02. La ménsula transfiere las fuerzas de reacción de una viga premoldeada,  $V_u$ , igual a 61,8 kips (275 kN) actuando en ambos lados a una distancia de 6 in. (152 mm) a partir de la cara de la columna. Para tomar en cuenta las deformaciones por fluencia lenta y retracción, se asume que a cada lado de la parte superior de la ménsula se desarrolla una fuerza horizontal factoreada,  $N_{uc}$ , igual a 14,3 kips (63,6 kN). La columna es cuadrada, de 14 in. (356 mm) de lado. La columna superior soporta una carga factoreada de compresión axial,  $P_u$ , igual a 275 kips (1223 kN). La resistencia a la compresión del hormigón,  $f'_c$ , y la resistencia a la fluencia de las armaduras,  $f_y$ , se tomaron como 4 ksi (27,6 MPa) y 60 ksi (414 MPa), respectivamente. Se considera hormigón de peso normal.

En la Figura (3.2-2) se muestran las dimensiones seleccionadas, incluyendo las placas de apoyo. La relación longitud de corte / profundidad,  $a/d$ , es igual a 0,38. Para el diseño se utilizó el modelo de bielas y tirantes sencillo ilustrado en la Figura (3.2-3). La armadura principal del tirante dispuesta es de 7 barras #4 (#13 mm). El anclaje de estas barras se logra soldando cada extremo de las barras a un perfil de acero estructural de 4 in. x 4 in. x ½ in. (102 mm x 102 mm x 13 mm). En la Figura (3.2-5) se indican los detalles de las armaduras.

**Tjen N. Tjhin** es candidato al doctorado en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Sus investigaciones abarcan el análisis no lineal y el diseño de estructuras de hormigón.

**Daniel (Dan) A. Kuchma** es Profesor Adjunto de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Es miembro del Subcomité ACI 318E, Corte y Torsión, y también del Comité conjunto ACI-ASCE 445, Corte y Torsión y su Subcomité 445-A, Bielas y Tirantes.

## 1 Geometría y cargas

En la Figura (3.2-1) se ilustran la geometría y las cargas de la ménsula a diseñar.

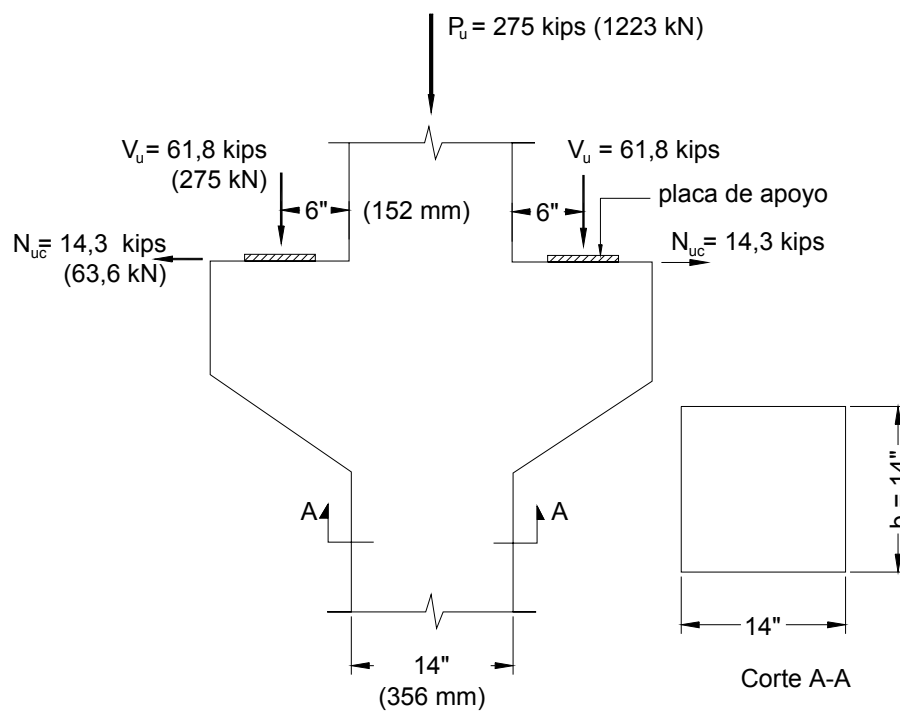


Figura 3.2-1: Geometría y cargas de la ménsula

Resistencias de los materiales:

$$f'_c = 4 \text{ ksi} \quad (27,6 \text{ MPa}) \text{ (hormigón de peso normal)}$$

$$f_y = 60 \text{ ksi} \quad (414 \text{ MPa})$$

## 2 Procedimiento de diseño

La totalidad de la ménsula constituye una región D debido a que presenta cambios abruptos en su geometría y está próxima a fuerzas concentradas. La estructura se diseñará usando el método de bielas y tirantes de acuerdo con el Apéndice A de ACI 318-02. El procedimiento paso a paso es el siguiente:

- Paso 1: Determinar las dimensiones de la placa de apoyo.
- Paso 2: Seleccionar las dimensiones de la ménsula.
- Paso 3: Establecer el modelo de bielas y tirantes.
- Paso 4: Determinar las fuerzas requeridas en el reticulado.
- Paso 5: Seleccionar la armadura de los tirantes.
- Paso 6: Diseñar las zonas nodales y verificar los anclajes.
- Paso 7: Verificar las bielas.
- Paso 8: Calcular la armadura mínima requerida para limitar la fisuración.
- Paso 9: Detallar la armadura.

Debido a que la geometría y las cargas son simétricas respecto a un eje vertical que pasa por el baricentro de la columna sólo será necesario considerar la mitad de la ménsula. Aún así en casi todas las figuras mostraremos la totalidad de la ménsula para su mejor comprensión.

## 3 Cálculos

### 3.1 Paso 1: Determinar las dimensiones de la placa de apoyo

La zona nodal debajo de la placa de apoyo constituye un nodo solicitado por compresión y tracción (CCT). La resistencia efectiva a la compresión de este nodo está limitada a

$$\begin{aligned} f_{cu} &= 0,85\beta_n f'_c && [\text{ACI Sección A.5.2 ec. (A-8)}] \\ &= 0,85(0,80)(4000) = 2720 \text{ psi} \end{aligned}$$

Seleccionamos una placa de apoyo de 12 in. x 6 in. (305 mm x 152 mm). La superficie de la placa de apoyo es  $12 \times 6 = 72 \text{ in.}^2$  ( $46.452 \text{ mm}^2$ ). La tensión de apoyo es  $61,8 (1000)/72 = 858 \text{ psi}$  ( $5,92 \text{ MPa}$ ). Como este valor es menor que la tensión de apoyo límite, es decir,  $\phi f_{cu} = 0,75 (2720) = 2040 \text{ psi}$  ( $14,07 \text{ MPa}$ ), las dimensiones de la placa de apoyo seleccionada son adecuadas.

### 3.2 Paso 2: Seleccionar las dimensiones de la ménsula

Para poder utilizar el Apéndice A de ACI, la Sección 11.9.1 del código requiere una relación longitud de corte/profundidad,  $a/d$ , menor que 2. Además, la Sección 11.9.2 de ACI requiere que la profundidad en la parte exterior del área de apoyo sea al menos  $0,5d$ . Por lo tanto seleccionamos una profundidad de 18 in. (457 mm) en la cara de la columna y una profundidad de 10 in. (254 mm) en el extremo libre de la ménsula. La Figura (3.2-2) resume las dimensiones seleccionadas para la ménsula.

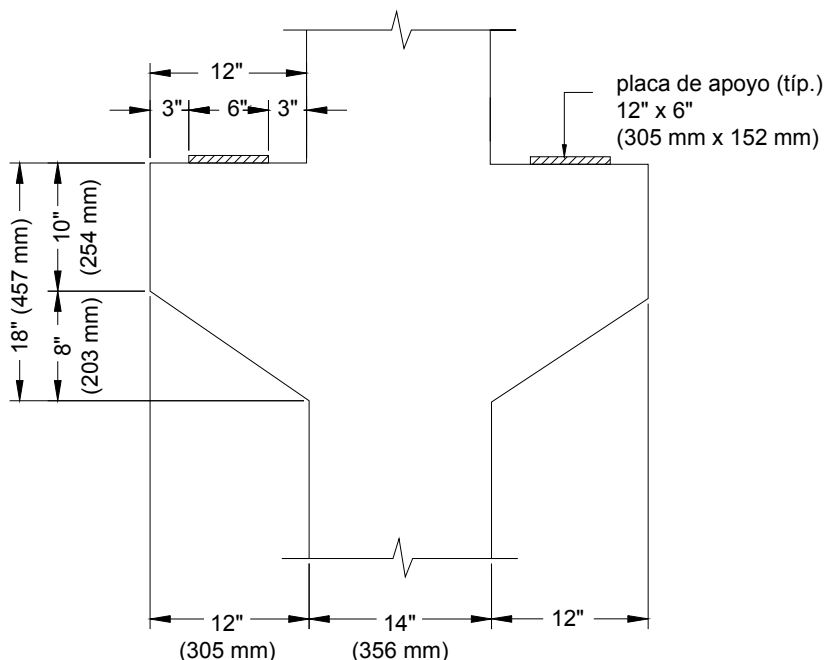


Figura 3.2-2: Dimensiones seleccionadas para la ménsula

### 3.3 Paso 3: Establecer el modelo de bielas y tirantes

Con el objeto de considerar las excentricidades de las cargas y las tolerancias de fabricación, la posición de la reacción,  $V_u$ , se traslada 1 in. desde el centro de la placa de apoyo hacia el borde exterior de la ménsula. Por lo tanto, la nueva posición de  $V_u$  con respecto a la cara de la columna es  $3 + 6/2 + 1 = 7$  in.

La Figura (3.2-3) ilustra la geometría del modelo de bielas y tirantes supuesto. Se asume que el tirante AA' está ubicado a 2 in. de la parte superior de la ménsula, considerando dos capas de barras y un recubrimiento de hormigón de aproximadamente 1 in. Por lo tanto,

$$d = 18 - 2 = 16 \text{ in. (406 mm)} \quad [\text{ACI Sección 11.9.1}]$$

Se asume que la totalidad de la biela BB' está ubicada sobre la recta horizontal que atraviesa el extremo inclinado de la ménsula

### Ejemplo 3.2: Ménsula doble

Como se ilustra en la Figura (3.2-3), la carga axial de la columna,  $P_u$ , se resuelve en dos cargas paralelas cuyas rectas de acción coinciden con las bielas CB y C'B'. La posición del eje de la biela CB se puede hallar calculando su ancho de biela,  $w_s$ . Este ancho se puede obtener como

$$w_s = \frac{F_{u,CB}}{\phi f_{cu} b} \quad [\text{ACI Secciones A.3.1 y A.2.6}] \quad (3.2-1)$$

donde  $F_{u,CB}$  es la fuerza de compresión requerida en la biela CB, y  $b = 14$  in. es la dimensión fuera del plano de la ménsula. La fuerza en la biela CB es  $F_{u,CB} = 275/2 + 61,8 = 199,3$  kips. Debido a que la zona nodal B constituye un nodo totalmente comprimido (CCC) y que la biela CB es de tipo prismática, la resistencia efectiva a la compresión,  $f_{cu}$ , es igual a

$$f_{cu} = 0,85\beta_n f'_c \quad [\text{ACI Sección A.3.2 ec. (A-3)}]$$

$$= 0,85(1,0)(4000) = 3400 \text{ psi}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3.2-1) se obtiene  $w_s = 5,58$  in. (142 mm).

De esta manera queda corregida la geometría del modelo de bielas y tirantes.

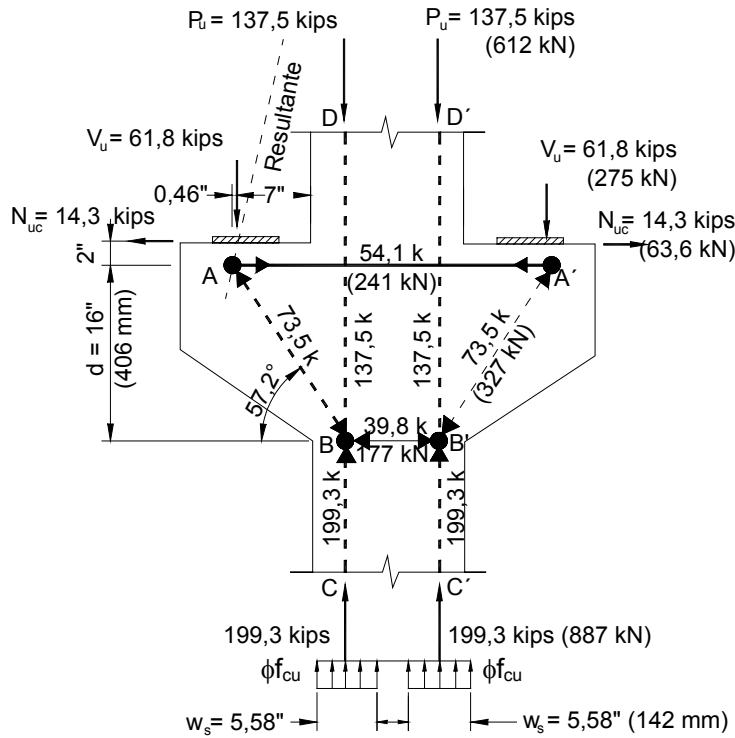


Figura 3.2-3: Modelo de bielas y tirantes seleccionado

### 3.4 Paso 4: Determinar las fuerzas requeridas en el reticulado

Las fuerzas requeridas en todos los miembros del reticulado se determinan en base a consideraciones estáticas; estas fuerzas se resumen en la Tabla (3.2-1). Un signo positivo (+) indica que el miembro está traccionado; un signo negativo (-) indica que el miembro está comprimido.

Tabla 3.2-1: Fuerzas en el reticulado

Miembro	AA'	AB = A'B'	BB'	CB = C'B'	BD = B'D'
Fuerza (kips)	+54,1 (+241 kN)	-73,5 (-327 kN)	-39,8 (-177 kN)	-199,3 (-887 kN)	-137,5 (-612 kN)

### 3.5 Paso 5: Seleccionar la armadura de los tirantes

La sección de armadura requerida para el tirante AA' es

$$\frac{F_{u,AA'}}{\phi f_y} = \frac{54,1}{0,75(60)} = 1,20 \text{ in.}^2 \quad [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.4.1}]$$

Además, la sección de armadura provista debe ser de al menos

$$0,04 \frac{f'_c}{f_y} bd = \frac{0,04(4)}{60} (14)(16) = 0,60 \text{ in.}^2 \quad [\text{ACI Sección 11.9.5}]$$

Adoptamos 6 barras #4 (#13 mm),  $A_{st} = 6 (0,20) = 1,20 \text{ in.}^2$  (774 mm<sup>2</sup>). Estas barras se disponen en dos capas como se ilustra en la Figura (3.2-5).

### 3.6 Paso 6: Diseñar las zonas nodales y verificar los anclajes

El ancho  $w_s$  de la zona nodal B ya fue determinado en la Sección 3.3 de manera de satisfacer la tensión límite en dicha zona nodal. Por lo tanto en esta sección sólo verificaremos la zona nodal A.

Para satisfacer la tensión límite en la zona nodal A es necesario que la profundidad efectiva de hormigón para la armadura del tirante,  $w_t$ , sea al menos igual a

$$\frac{F_{u,AA'}}{\phi f_{cu} b} = \frac{54,1(1000)}{2040(14)} = 1,89 \text{ in. (48 mm)} \quad [\text{ACI Sec. A.2.6 y A.5.1}]$$

Como se puede ver en la Figura (3.2-4) este límite se satisface fácilmente ya que la zona nodal disponible es  $2 (2) = 4 \text{ in. (102 mm)}$ .

Para anclar el tirante AA' soldar las 6 barras #4 a un perfil de acero de 4 in. x 4 in. x ½ in. (102 mm x 102 mm x 13 mm). En la Figura (3.2-5) se indican los detalles.



### 3.7 Paso 7: Verificar las bielas

La biela AB se verificará en base a las dimensiones determinadas por las zonas nodales A y B. Las demás bielas se verificarán calculando los anchos de las mismas y verificando si cabrán en el espacio disponible.

ACI define la resistencia nominal de la biela AB como

$$F_{ns} = f_{cu} A_c \quad [\text{ACI Sección A.3.1 ec. (A-2)}]$$

donde

$$\begin{aligned} f_{cu} &= 0,85\beta_s f'_c & [\text{ACI Sección A.3.2 ec. (A-3)}] \\ &= 0,85(0,75)(4000) = 2550 \text{ psi} \end{aligned}$$

y  $A_c$  es la menor de las áreas en los extremos de la biela. De la Figura (3.2-4),  $A_c = 14(4,88) = 68,32 \text{ in.}^2$ . Por lo tanto,  $F_{ns} = 2550(68,32)/1000 = 174 \text{ kips}$ . De la Tabla 3.2-1, la carga factoreada de la biela AB es 73,5 kips (327 kN). Debido a que este valor es menor que el límite, es decir,  $\phi F_{ns} = 0,75(174) = 131 \text{ kips}$  (583 kN), la biela AB resulta adecuada. Como se ha asumido  $\beta_s = 0,75$  se colocará armadura mínima; los cálculos se incluyen en la sección siguiente.

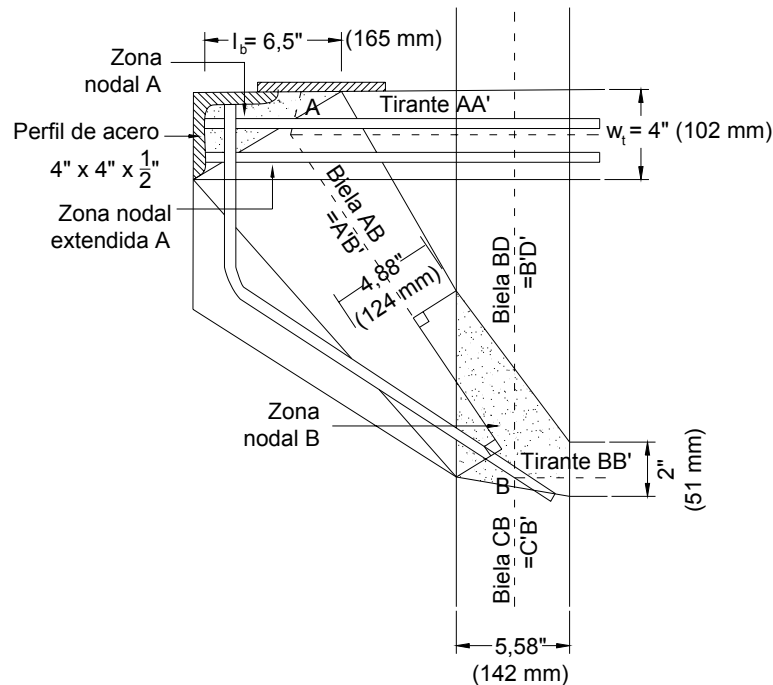


Figura 3.2-4: Dimensiones de los componentes del modelo de bielas y tirantes

La tensión de la biela horizontal BB' está limitada a

$$\begin{aligned}\phi f_{cu} &= 0,75(0,85\beta_s f'_c) & [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.3.2}] \\ &= 0,75[0,85(1,0)(4000)] = 2550 \text{ psi}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el ancho requerido para la biela BB' es

$$\frac{F_{u,BB'}}{\phi f_{cu} b} = \frac{39,8(1000)}{2550(14)} = 1,11 \text{ in.} \quad [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.3.1}]$$

La tensión de la biela vertical BD está limitada a

$$\begin{aligned}\phi f_{cu} &= 0,75(0,85\beta_s f'_c) & [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.3.2}] \\ &= 0,75[0,85(0,6)(4000)] = 1800 \text{ psi}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el ancho requerido para la biela BD es

$$\frac{F_{u,BD}}{\phi f_{cu} b} = \frac{137,5(1000)}{1800(14)} = 5,46 \text{ in.} \quad [\text{ACI Secciones A.2.6 y A.3.1}]$$

Adoptamos un ancho de 2 in. (51 mm) para la biela BB', y fijamos el ancho de la biela BD igual al ancho de la biela CB. El ancho requerido para la biela CB ya fue calculado en la Sección 3.2, es decir 5,58 in. (142 mm).

Como se ilustra en la Figura (3.2-4), todos los anchos caben dentro de los límites de la región de la ménsula. En consecuencia esta solución es aceptable.

### 3.8 Paso 8: Calcular la armadura mínima requerida para limitar la fisuración

La Sección 11.9.4 de ACI requiere zunchos o estribos cerrados paralelos a la armadura requerida para el tirante AA', uniformemente distribuidos en 2/3 de la profundidad efectiva adyacente al atirante CB, es decir,  $2/3 (16) = 10,7$  in. Adoptamos 10,5 in. La sección de estos estribos debe ser mayor que

$$A_n = 0,5(A_{st} - A_n) \quad [\text{ACI Sección 11.9.4}]$$

donde  $A_n$  es la sección de armadura que resiste la fuerza de tracción  $N_{uc}$  y  $A_{st} \equiv A_s$  según la Sección 11.9 de ACI. Por lo tanto, la sección mínima requerida es

Ejemplo 3.2: Ménsula doble

$$0,5(A_{st} - A_n) = 0,5 \left( A_{st} - \frac{N_{uc}}{\phi f_y} \right) = 0,5 \left( 1,40 - \frac{14,3}{0,85(60)} \right) = 0,56 \text{ in.}^2$$

Intentamos con 3 estribos cerrados #3,  $A_v = 3 (2) (0,11) = 0,66 \text{ in.}^2$ , con una separación media de  $10,5/3 = 3,5 \text{ in.}$

Como para calcular la resistencia de la biela AB usamos  $\beta_s = 0,75$  la armadura mínima provista también debe satisfacer

$$\sum \frac{A_{si}}{bs_i} \sin \gamma_i \geq 0,0030 \quad [\text{ACI Sección A.3.3.1 ec. (A-4)}]$$

donde  $\gamma_i$  es el ángulo formado por el eje de la armadura mínima y el eje de la biela. De acuerdo con la Sección A.3.3.2 de ACI  $\gamma_i$  debe ser mayor que  $40^\circ$  porque solamente se provee armadura horizontal. En base a la armadura provista,

$$\sum \frac{A_{si}}{bs_i} \sin \gamma_i = \frac{2(0,11)}{14(3,5)} \sin 57,2^\circ = 0,0038 > 0,0030$$

Como esta cantidad de armadura satisface ambos requisitos, disponemos 3 estribos cerrados #3 (#10 mm) con una separación de 3,5 in. (89 mm), distribuidos en una profundidad de 10,5 in. (267 mm) a partir del tirante AA'.

### 3.9 Paso 9: Detallar la armadura

En la Figura (3.2-5) se ilustran los detalles de las armaduras.

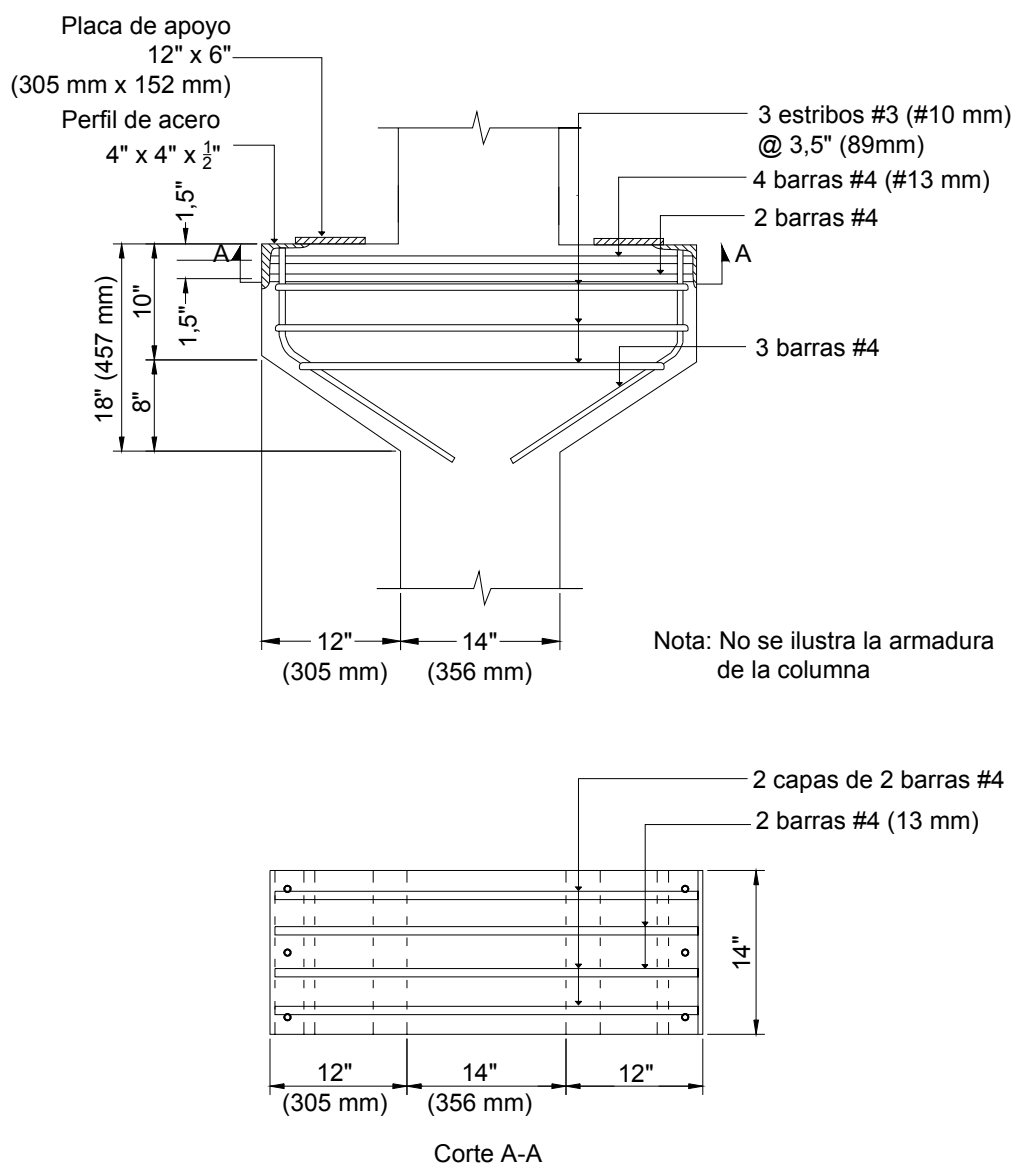


Figura 3.2-5: Detalles de las armaduras

## 4 Resumen

Se presenta el diseño de una ménsula doble. Este diseño se completó usando el Apéndice A de ACI 318-02 "Modelos de Bielas y Tirantes" y la Sección 11.9 de ACI 318-02 "Requisitos Especiales para Ménsulas y Cartelas".

Los principales pasos del diseño consisten en definir la región D y las fuerzas de borde que actúan sobre dicha región, seleccionar un modelo de bielas y tirantes que soporte las fuerzas de borde de la región D, resolver el modelo de bielas y tirantes para hallar las fuerzas en los miembros, disponer armadura que conforme los tirantes de acero, dimensionar las bielas y nodos, y proveer armadura distribuida para limitar la fisuración y lograr ductilidad.

La totalidad de la ménsula constituye la región D debido a que existen discontinuidades estáticas, es decir, fuerzas concentradas, y discontinuidades geométricas a una distancia menor que una altura flexional de la ménsula a cada lado de la discontinuidad. Para el diseño se utilizó un modelo de bielas y tirantes sencillo. Este modelo de bielas y tirantes dio por resultado el uso de 6 barras #4 (#13 mm) para el tirante principal. Se prestó particular atención al anclaje del tirante principal a fin de garantizar que pueda transferir la fuerza requerida sin que se produzcan fallas de anclaje. Para satisfacer los requisitos de anclaje todas las barras principales se soldaron a un perfil de acero dispuesto en cada uno de los extremos.

## Referencias

ACI 318-02: *Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary*. ACI Committee 318, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 2002, 443 pp.

