

Efectos de la esbeltez

CONSIDERACIONES GENERALES

El diseño de las columnas consiste básicamente en seleccionar una sección transversal adecuada para la misma, con armadura para soportar las combinaciones requeridas de cargas axiales mayoradas P_u y momentos (de primer orden) mayorados M_u , incluyendo la consideración de los efectos de la esbeltez de la columna (momentos de segundo orden).

La esbeltez de una columna se expresa en términos de su relación de esbeltez $k\ell_u/r$, donde k es un factor de longitud efectiva (que depende de las condiciones de vínculo de los extremos de la columna), ℓ_u es la longitud de la columna entre apoyos y r es el radio de giro de la sección transversal de la columna. En general, una columna es esbelta si las dimensiones de su sección transversal son pequeñas en relación con su longitud.

A los fines del diseño, el término "columna corta" se usa para designar una columna que tiene una resistencia igual a la calculada para su sección transversal, usando las fuerzas y los momentos obtenidos de un análisis para combinación de flexión y carga axial. Una "columna esbelta" se define como una columna cuya resistencia se reduce debido a las deformaciones de segundo orden (momentos de segundo orden). Según estas definiciones, una columna con una determinada relación de esbeltez se puede considerar como columna corta bajo un determinado conjunto de restricciones, y como columna esbelta bajo otro conjunto de restricciones. Con el empleo de hormigones y armaduras de mayor resistencia, y con métodos de análisis y diseño más precisos, es posible diseñar secciones de menores dimensiones, lo cual da origen a elementos más esbeltos. En consecuencia, la necesidad de contar con procedimientos de diseño confiables y racionales para las columnas esbeltas se convierte así en una consideración importante en el diseño de columnas.

Una columna corta puede fallar a causa de una combinación de momento y carga axial que supere la resistencia de la sección transversal. Este tipo de falla se conoce como "falla del material." A modo de ejemplo, consideremos la columna ilustrada en la Figura 11-1. Debido a la carga, la columna tiene una deformación Δ que provocará un momento adicional (de segundo orden) en la columna. En el diagrama de cuerpo libre se puede ver que el momento máximo en la columna ocurre en la sección A-A, y es igual al momento aplicado más el momento debido a la deformación del elemento, que es $M = P(e + \Delta)$.

La falla de una columna corta puede ocurrir en cualquier punto a lo largo de la curva de interacción de resistencias, dependiendo de la combinación del momento y la carga axial aplicada. Como se mencionó anteriormente, se producirá alguna deformación y habrá una "falla del material" cuando una combinación particular de carga P y momento $M = P(e + \Delta)$ interseque la curva de interacción de resistencias.

Si la columna es muy esbelta, podría llegar a una deformación debida a carga axial P y momento Pe tal que la deformación aumente indefinidamente sin que aumente la carga P . Este tipo de falla se conoce como "falla de estabilidad," como se indica en la curva de interacción de resistencias.

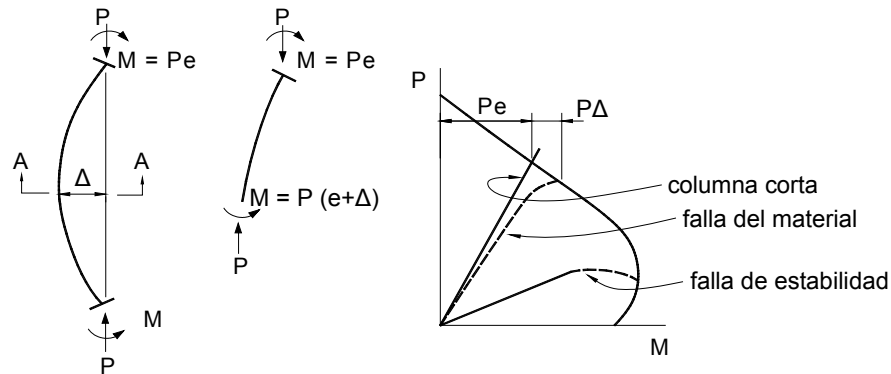


Figura 11-1 – Interacción de las resistencias en columnas esbeltas

El concepto básico del comportamiento de las columnas esbeltas rectas con carga axial concéntrica fue desarrollado originalmente por Euler, hace ya más de 200 años. El concepto establece que un elemento fallará por pandeo bajo la carga crítica $P_c = \pi^2 EI / (\ell_e)^2$, siendo EI la rigidez flexional de la sección transversal del elemento y ℓ_e la longitud efectiva, que es igual a $k\ell_u$. Para las columnas cortas "robustas," el valor de la carga de pandeo será mayor que la resistencia al aplastamiento por compresión directa (correspondiente a la falla del material). En los elementos que son más esbeltas (es decir, elementos para los cuales el valor de $k\ell_u/r$ es más elevado), la falla puede ocurrir por pandeo (falla de estabilidad), con la carga de pandeo disminuyendo a medida que aumenta la esbeltez (ver Figura 11-2).

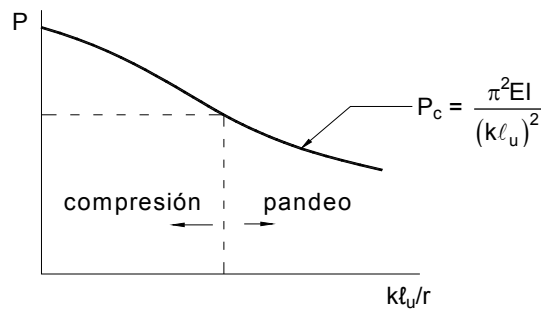


Figura 11-2 – Carga de falla en función de la esbeltez de una columna

Como se puede observar, es imposible representar los efectos de la esbeltez y los momentos amplificados en una típica curva de interacción de resistencias. En consecuencia, se puede desarrollar una "familia" de diagramas de interacción de resistencias para columnas esbeltas con diferentes relaciones de esbeltez, como se ilustra en la Figura 11-3. El diagrama de interacción de resistencias para $k\ell_u/r = 0$ corresponde a las combinaciones de momento y carga axial donde la resistencia no se ve afectada por la esbeltez del elemento (resistencia de columna corta).

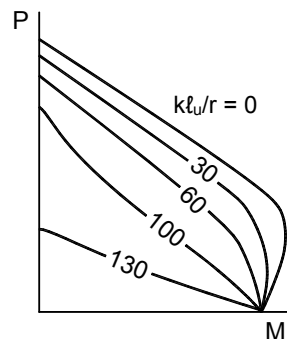


Figura 11-3 – Diagramas de interacción de resistencias para columnas esbeltas

CONSIDERACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA ESBELTEZ

Se establecen límites para la esbeltez tanto de pórticos indesplazables como para pórticos desplazables, incluyendo métodos de diseño permitidos para cada rango de esbeltez. Se establecen límites inferiores para la esbeltez, por debajo de los cuales los momentos de segundo orden se pueden despreciar y sólo es necesario considerar la carga axial y los momentos de primer orden para seleccionar la sección transversal y la armadura de las columnas (diseño de columnas cortas). Se debe observar que, para las vigas y columnas de dimensiones habituales y las alturas de piso típicas de los sistemas de hormigón, los efectos de la esbeltez se pueden despreciar en más del 90 por ciento de las columnas de los pórticos indesplazables y en alrededor del 40 por ciento de las columnas de los pórticos desplazables. Cuando las relaciones de esbeltez son moderadas se permite un análisis aproximado de los efectos de la esbeltez que se basa en un factor de amplificación de los momentos (ver 10.12 y 10.13). Cuando la relación de esbeltez de la columna es elevada se requiere un análisis de segundo orden más exacto (ver 10.11.5), que considere el comportamiento no lineal del material y la fisuración, así como los efectos de la curvatura y del desplazamiento lateral del elemento, la duración de las cargas, la contracción y la fluencia lenta, y la interacción con las fundaciones. No se especifican límites superiores para la esbeltez de las columnas. En la Figura 11-4 se resumen los límites de la relación de esbeltez indicados en 10.12.2 para pórticos indesplazables y en 10.13.2 para pórticos desplazables, junto con los métodos permitidos para considera la esbeltez de las columnas.

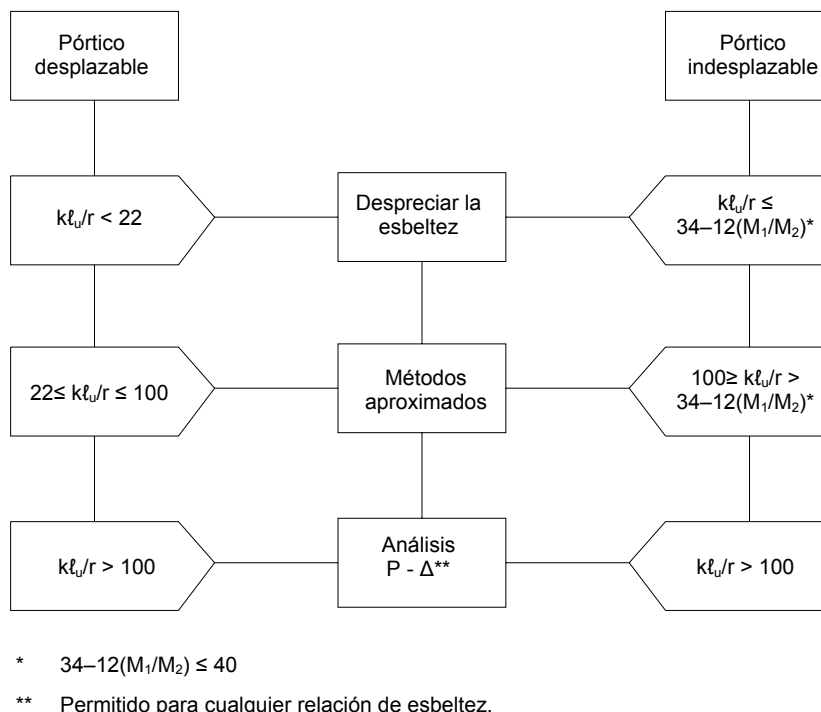


Figura 11-4 – Consideración de la esbeltez de las columnas

10.10 EFECTOS DE LA ESBELTEZ EN ELEMENTOS COMPRIMIDOS

10.10.1 Análisis de segundo orden

El código alienta el uso de análisis de segundo orden o análisis P-Δ para considerar los efectos de la esbeltez en los elementos comprimidos. En general, los resultados de un análisis de segundo orden permiten obtener valores más realistas para los momentos que los que se obtienen usando un análisis aproximado de acuerdo con las secciones 10.12 ó 10.13. En el caso de los pórticos desplazables, utilizando análisis de segundo orden generalmente se obtendrán diseños más económicos. En las Referencias 10.24 - 10.29 se presentan procedimientos para realizar un análisis de segundo orden. En R10.10.1 el lector encontrará una discusión sobre las limitaciones para la utilización de un análisis de segundo orden de acuerdo con 10.10.1.

Si por algún motivo no resulta práctico realizar un análisis más exacto, la sección 10.10.2 permite considerar los efectos de la esbeltez mediante un método aproximado de amplificación de momentos. Sin embargo, se debe observar que para todos los elementos comprimidos en los cuales la relación de esbeltez ($k\ell_u/r$) es mayor que 100 (ver Figura 11-4), para considerar los efectos de la esbeltez se debe utilizar un análisis más exacto según lo definido en 10.10.1.

10.11 EVALUACIÓN APROXIMADA DE LOS EFECTOS DE LA ESBELTEZ

Se usa el factor de amplificación de momentos δ para amplificar los momentos de primer orden y así tomar en cuenta el aumento de los momentos provocado por la curvatura y el desplazamiento lateral del elemento. El factor de amplificación de momentos δ depende de la relación entre la carga axial aplicada y la carga crítica o de pandeo de la columna, de la relación entre los momentos aplicados en los extremos de la columna, y de la geometría deformada de la columna.

10.11.1 Propiedades de la sección para el análisis del pórtico

De acuerdo con 10.11.1, las cargas axiales mayoradas (P_u), los momentos mayorados en los extremos de la columna (M_1 y M_2) y las deformaciones laterales de piso, Δ_o , se deberán calcular usando un análisis elástico de primer orden del pórtico, considerando la presencia de regiones fisuradas a lo largo del elemento. Es evidente que realizar estos cálculos no es factible desde el punto de vista económico, aún para estructuras pequeñas. Por lo tanto, para considerar la fisuración en el análisis se pueden usar las propiedades de la sección dadas en 10.11.1 y resumidas en la Tabla 11-1. Los valores de E , I y A han sido seleccionados a partir de los resultados obtenidos en ensayos y análisis de pórticos de acuerdo con la Referencia 10.28. Es importante observar que para analizar la estructura a nivel de la carga de servicio resulta satisfactorio multiplicar los momentos de inercia especificados en la Tabla 11-1 por $1/0,70 = 1,43$ (R10.11.1). Además, los momentos de inercia se deben dividir por $(1 + \beta_d)$ en el caso que sobre la estructura actúen cargas horizontales de larga duración (por ejemplo, las cargas horizontales provocadas por las presiones del suelo) o para verificación de la estabilidad frente a cargas gravitatorias realizadas de acuerdo con 10.13.6.

Tabla 11-1 – Propiedades de las secciones para el análisis de pórticos

	Módulo de elasticidad	Momento de inercia [†]	Área
Vigas	E_c de 8.5.1	$0,35 I_g$	$1,0 A_g$
Columnas		$0,70 I_g$	
Tabiques no fisurados		$0,70 I_g$	
Tabiques fisurados		$0,35 I_g$	
Placas planas y losas planas		$0,25 I_g$	

[†] Dividir por $(1 + \beta_d)$ cuando actúen cargas de larga duración, o para las verificaciones de estabilidad realizadas de acuerdo con 10.13.6.

Para los análisis a nivel de la carga de servicio multiplicar por $1/0,70 = 1,43$.

10.11.2 Radio de giro

En general el radio de giro, r , es $\sqrt{I_g / A_g}$. En particular, para los elementos de sección rectangular r se puede tomar igual a 0,30 por la dimensión en la dirección en la cual se está considerando la estabilidad, mientras que para los elementos de sección circular se puede tomar igual a 0,25 por el diámetro de la sección, como se ilustra en la Figura 11-5.

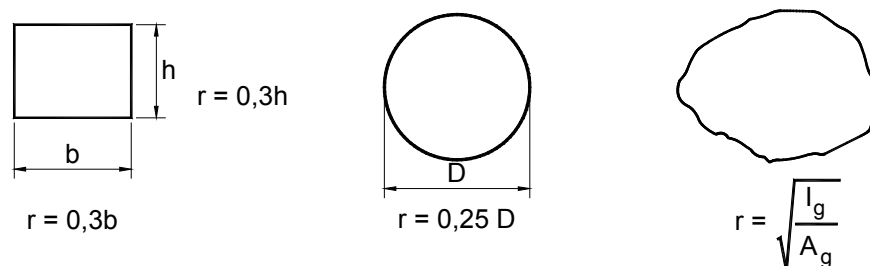


Figura 11-5 – Radio de giro, r

10.11.3, 10.12.1 Longitud sin apoyo lateral y longitud efectiva de elementos comprimidos

La longitud sin apoyo lateral (o longitud no soportada) ℓ_u de una columna, definida en 10.11.3, es la distancia libre entre apoyos laterales, como se ilustra en la Figura 11-6. Observar que la longitud ℓ_u puede ser diferente para el pandeo respecto de cada uno de los ejes principales de la sección transversal de la columna. La ecuación básica de Euler para la carga crítica de pandeo se puede expresar como $P_c = \pi^2 EI / (\ell_e)^2$, siendo ℓ_e la longitud efectiva $k\ell_u$. Las ecuaciones básicas para el diseño de columnas esbeltas fueron desarrolladas para extremos articulados y, por lo tanto, se las debe modificar para considerar los efectos de las condiciones de vínculo. La longitud efectiva de la columna, $k\ell_u$, y no la longitud real sin apoyo lateral ℓ_u , es la que se utiliza para estimar las resistencias de las columnas esbeltas. Esta longitud efectiva considera tanto las condiciones de vínculo como la condición de sistema indesplazable o desplazable.

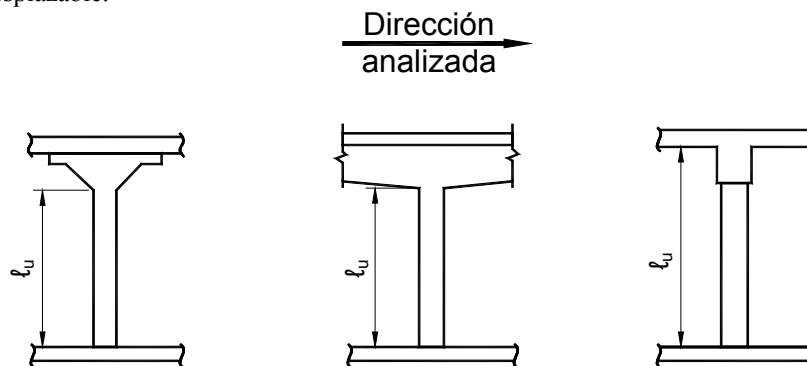


Figura 11-6 – Longitud sin apoyo lateral, ℓ_u

Cuando se produce la carga crítica definida por la ecuación de Euler, un elemento originalmente recto pandea con una forma de semionda sinusoidal, como se ilustra en la Figura 11-7(a). Con esta configuración, en cada sección actúa un momento adicional $P-\Delta$, siendo Δ el desplazamiento lateral en el punto específico considerado a lo largo de la columna. Este desplazamiento lateral continúa aumentando hasta que la tensión por flexión provocada por el momento ($P-\Delta$), más la tensión de compresión original provocada por las cargas aplicadas, excede la resistencia a la compresión del hormigón y la columna falla. La longitud efectiva ℓ_e ($= k\ell_u$) es la longitud entre los apoyos articulados, entre puntos de momento nulo o entre puntos de inflexión. Para la condición de ambos extremos articulados ilustrada en la Figura 11-7(a), la longitud efectiva es igual a la longitud sin apoyo lateral o no soportada, ℓ_u . Si el elemento está empotrado en ambos extremos (restringido contra la rotación), el pandeo se producirá en la forma ilustrada en la Figura 11-7(b); habrá puntos de inflexión en los puntos indicados, y la longitud efectiva ℓ_e será igual a la mitad de la longitud sin apoyo lateral, ℓ_u . La carga crítica de pandeo P_c para la condición de extremos empotrados es cuatro veces mayor que para la condición de extremos articulados. En las estructuras reales rara vez las columnas son perfectamente articuladas o empotradas, sino que sus extremos están parcialmente restringidos contra la rotación por los elementos solidarios a la columna. En consecuencia, la longitud efectiva está comprendida entre $\ell_u/2$ y ℓ_u , como se indica en la Figura 11-7(c), siempre que esté impedido el desplazamiento lateral de un extremo de la columna respecto del otro. El valor real de la longitud efectiva depende de la rigidez de los elementos solidarios a los extremos superior e inferior de la columna.

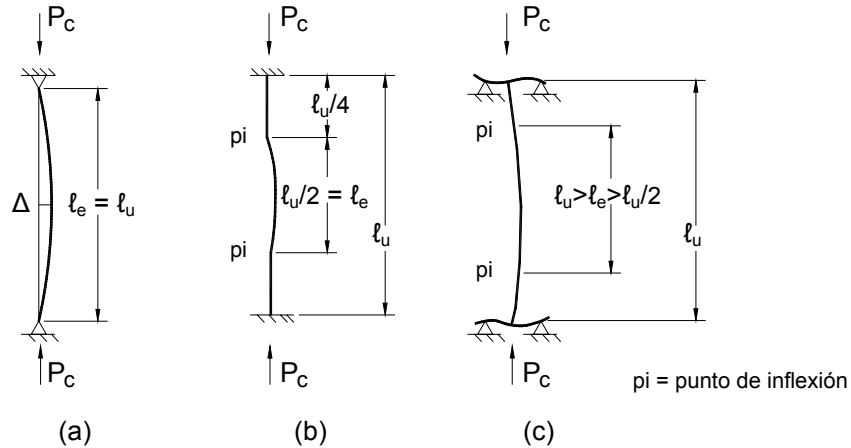


Figura 11-7 – Longitud efectiva, l_e (condición indesplazable)

Una columna que está empotrada en un extremo y totalmente libre en el otro (en voladizo) pandeará como se ilustra en la Figura 11-8(a). El extremo superior tendrá un desplazamiento lateral relativo con respecto al extremo inferior. La geometría deformada de estos elementos es similar a la mitad de la deformada sinusoidal del elemento articulado en ambos extremos ilustrado en la Figura 11-7(a). En consecuencia, la longitud efectiva es igual a dos veces la longitud real. Si la columna está impedida contra la rotación en ambos extremos pero uno de los extremos se puede desplazar lateralmente respecto del otro, la columna pandeará como se ilustra en la Figura 11-8(b). La longitud efectiva l_e será igual a la longitud real l_u , con un punto de inflexión (pi) ubicado como se indica. La carga de pandeo de la columna de la Figura 11-8(b), en la cual el desplazamiento lateral no está impedido, es un cuarto de la de la columna de la Figura 11-7(b), en la cual el desplazamiento lateral sí está impedido. Como se indicó anteriormente, los extremos de las columnas rara vez son totalmente articulados o totalmente empotrados, sino que están parcialmente restringidos contra la rotación por los elementos solidarios a la columna. Por lo tanto, la longitud efectiva variará entre l_u e infinito, como se indica en la Figura 11-8(c). Si los elementos que restringen el movimiento (vigas o losas) son muy rígidos en relación con la columna, el pandeo se aproximará al esquema ilustrado en la Figura 11-8(b). En cambio, si los elementos que restringen el movimiento son bastante flexibles, la columna se aproximará a una condición articulada en ambos extremos y la columna (o las columnas), y posiblemente la estructura, se aproximarán a la inestabilidad.

En las estructuras habituales de hormigón armado el diseñador rara vez se ocupa de elementos individuales, sino que analiza sistemas aporricados rígidos compuestos por conjuntos de viga-columna y losa-columna. El comportamiento de pandeo de un pórtico que no está arriostrado contra el desplazamiento lateral (desplazable) se puede ilustrar mediante el pórtico sencillo de la Figura 11-9. Como no tiene restricción lateral en el extremo superior, la totalidad del pórtico (no arriostrado) es libre de moverse lateralmente. El extremo inferior puede ser articulado o estar parcialmente restringido contra la rotación. En general, la longitud efectiva l_e depende del grado de restricción contra la rotación de los extremos de la columna y $l_u < l_e < \infty$.

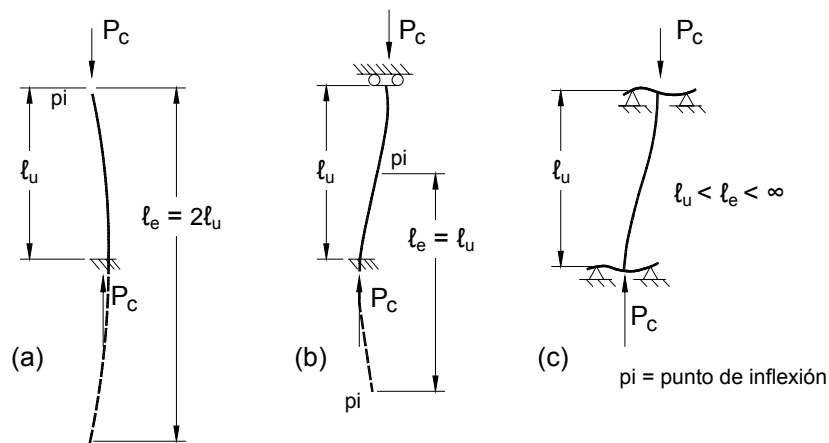


Figura 11-8 – Longitud efectiva, l_e (condición desplazable)

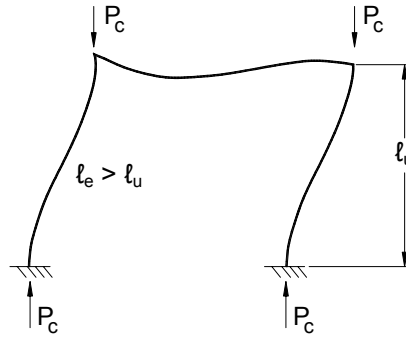


Figura 11-9 – Pórtico rígido (condición desplazable)

Resumiendo, se pueden hacer los siguientes comentarios.

1. Para los elementos solicitados a compresión en pórticos indesplazables, la longitud efectiva ℓ_e está comprendida entre $\ell_u/2$ y ℓ_u , siendo ℓ_u la longitud real sin apoyo lateral de la columna.
2. Para los elementos solicitados a compresión en pórticos desplazables, la longitud efectiva ℓ_e siempre es mayor que la longitud real de la columna ℓ_u , y puede ser igual a $2\ell_u$ o mayor. En este caso un valor de k inferior a 1,2 no sería realista.
3. El uso de los nomogramas de las Figuras 11-10 y 11-11 (también en la Figura R10.12.1) permiten determinar gráficamente los factores de longitud efectiva para los elementos solicitados a compresión de pórticos indesplazables y desplazables, respectivamente. Si ambos extremos de una columna de un pórtico indesplazable tienen mínima rigidez rotacional, o se aproximan a $\psi = \infty$, y entonces $k = 1,0$. Si ambos extremos se aproximan al empotramiento perfecto, $\psi = 0$, y $k = 0,5$. Si ambos extremos de una columna de un pórtico desplazable tienen mínima rigidez rotacional, o se aproximan a $\psi = \infty$, entonces $k = \infty$. Si ambos extremos se aproximan al empotramiento perfecto, $\psi = 0$, entonces $k = 1,0$.

R10.12.1 presenta un método alternativo para calcular los factores de longitud efectiva para los elementos comprimidos en pórticos indesplazables y desplazables. Para los elementos comprimidos en pórticos indesplazables, se puede tomar como límite superior para el factor de longitud efectiva el menor de los valores dados por las siguientes expresiones, tomadas del documento 1992 *British Standard Code of Practice* (Referencias ACI 10.33 y 10.34):

$$k = 0,7 + 0,05(\psi_A + \psi_B) \leq 1,0$$

$$k = 0,85 + 0,05\psi_{\min} \leq 1,0$$

donde ψ_A y ψ_B son los valores de ψ en los extremos de la columna y ψ_{\min} es el menor de los dos valores.

Para los elementos comprimidos restringidos en ambos extremos, en pórticos desplazables, el factor de longitud efectiva se puede tomar como (Referencia ACI 10.32):

$$\text{Para } \psi_m < 2, \quad k = \frac{20 - \psi_m}{20} \sqrt{1 + \psi_m}$$

$$\text{Para } \psi_m \geq 2, \quad k = 0,9 \sqrt{1 + \psi_m}$$

donde ψ_m es el promedio de los valores de ψ en ambos extremos de la columna.

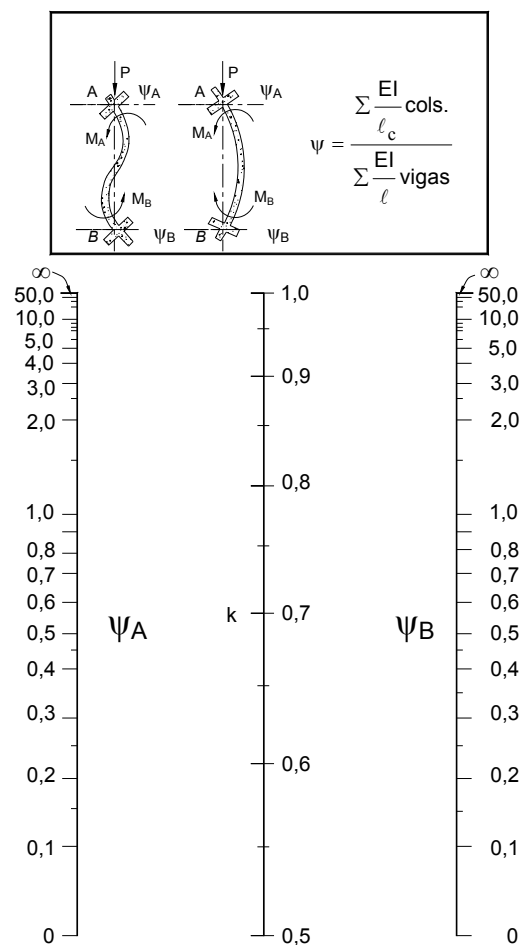


Figura 11-10 – Factores de longitud efectiva para elementos comprimidos en pórticos indesplazables

Para los elementos comprimidos articulados en uno de sus extremos, en pórticos desplazables, el factor de longitud efectiva se puede tomar como (Referencias ACI 10.33 y 10.34):

$$k = 2,0 + 0,3\psi$$

donde ψ es la relación entre las rigideces de la columna y la viga en el extremo restringido.

Al determinar el factor de longitud efectiva, k , usando las Figuras 11-10 y 11-11, o usando las ecuaciones del Comentario, las rigideces (EI) de las vigas (o de las losas) y de las columnas se deben calcular en base a los valores dados en 10.11.1.

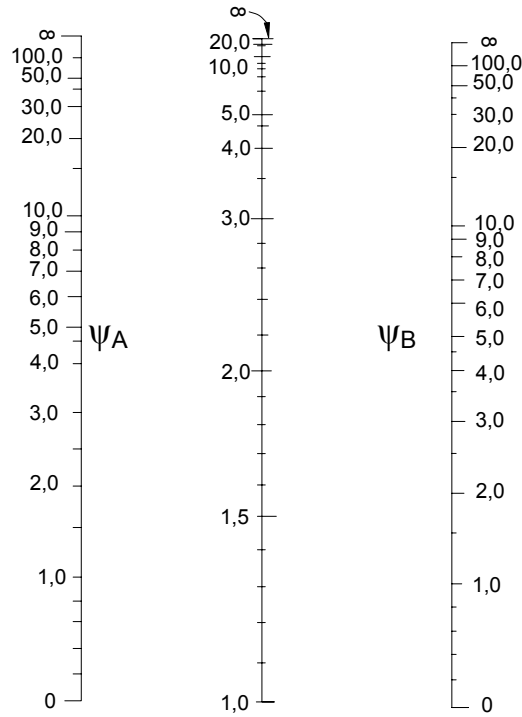
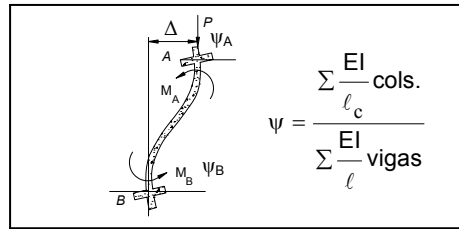


Figura 11-11 – Factores de longitud efectiva para elementos comprimidos en pórticos desplazables

10.11.4 Pórticos indesplazables y Pórticos desplazables

En las estructuras reales rara vez existen condiciones totalmente indesplazables o desplazables. Esto no se puede determinar fácilmente mediante inspección; las secciones 10.11.4.1 y 10.11.4.2 presentan dos maneras posibles para determinar si un pórtico es indesplazable o desplazable. De acuerdo con 10.11.4.1, una columna de una estructura se puede considerar indesplazable si los momentos de segundo orden en los extremos de la columna no son superiores a 5 por ciento de los momentos de primer orden en dichos extremos. De acuerdo con 10.11.4.2, también se permite asumir que un entrepiso de una estructura es indesplazable si:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \leq 0,05 \quad \text{Ec. (10-6)}$$

donde

Q = índice de estabilidad de un entrepiso

$\sum P_u$ = carga vertical total mayorada en el entrepiso correspondiente al caso de carga horizontal para el cual $\sum P_u$ es máximo (R10.11.4)

V_u = corte total en el entrepiso

Δ_o = desplazamiento relativo de primer orden entre la parte superior y la parte inferior del entrepiso debido a V_u

ℓ_c = longitud de la columna, medida entre los ejes de los nudos del pórtico

Observar que la Ecuación (10-6) no es aplicable cuando $V_u = 0$.

10.11.6 Factor de amplificación de momentos δ para flexión biaxial

Cuando en una columna hay flexión biaxial, se deben amplificar los momentos calculados para cada eje principal. Los factores de amplificación de momentos, δ , se calculan considerando la carga de pandeo, P_c , respecto de cada eje en forma separada, en base a las longitudes efectivas correspondientes y a la rigidez relativa de la columna y las vigas en cada dirección. En consecuencia, si las capacidades de pandeo respecto de los dos ejes son diferentes, los factores de amplificación de momentos en ambas direcciones también serán diferentes. Los momentos respecto de los dos ejes se amplifican de forma separada, y luego la sección transversal se dimensiona para una carga axial P_u y los momentos biaxiales amplificados.

10.12.2, 10.13.2 Consideración de los efectos de la esbeltez

Para los elementos comprimidos en pórticos indesplazables, los efectos de la esbeltez se pueden despreciar cuando $k\ell_u/r$ es menor o igual que $[34 - 12 (M_1/M_2)]$, siendo M_2 el mayor de los momentos en ambos extremos y M_1 el menor de estos momentos. La relación M_1/M_2 es positiva si la columna se deforma con curvatura simple, y negativa si el elemento se deforma con curvatura doble. Observar que M_1 y M_2 son los momentos mayorados en los extremos obtenidos a partir de un análisis de pórtico elástico, y que el término $[34 - 12 (M_1/M_2)]$ no se debe tomar mayor que 40. Para los elementos comprimidos en pórticos desplazables, los efectos de la esbeltez se pueden despreciar cuando $k\ell_u/r$ es menor que 22 (10.13.2). El método del factor de amplificación de momentos se puede usar para columnas en las cuales la relación de esbeltez es mayor que estos límites inferiores.

El límite superior de la esbeltez de las columnas para que sea aplicable el método del factor de amplificación de momentos es $k\ell_u/r$ igual a 100 (10.11.5). Si $k\ell_u/r$ es mayor que 100 se deberá realizar un análisis de acuerdo con lo definido en 10.10.1, tomando en cuenta la influencia de las cargas axiales y los momentos de inercia variables sobre la rigidez del elemento y los momentos de los extremos empotrados, el efecto de las deformaciones sobre los momentos y las fuerzas, y los efectos de la duración de las cargas (efecto de las cargas sostenidas o de larga duración). En la Figura 11-4 se resumen los criterios para la consideración de la esbeltez de las columnas.

Los límites inferiores de la esbeltez permitirán despreciar los efectos de la esbeltez para una gran cantidad de columnas. Considerando la esbeltez $k\ell_u/r$ en términos de ℓ_u/h para columnas rectangulares, los efectos de la esbeltez se pueden despreciar cuando ℓ_u/h es menor que 10 para elementos comprimidos en pórticos indesplazables y con restricción nula en ambos extremos. Este límite aumenta a 18 para el caso de columnas con doble curvatura con momentos iguales en sus extremos y una relación entre la rigidez de la columna y la rigidez de las vigas igual a 1,0 en ambos extremos. Para las columnas con poca o ninguna restricción en sus extremos, se debería utilizar un valor $k = 1,0$. Para las columnas robustas restringidas mediante losas planas, k está comprendido entre alrededor de 0,95 y 1,0 por lo cual se puede estimar conservadoramente igual a 1,0. Para las columnas de los pórticos formados por vigas y columnas, k varía entre alrededor de 0,75 y 0,90 por lo cual se puede estimar conservadoramente igual a 0,90. Si el cálculo inicial de la esbeltez en base a los valores k estimados indica que es necesario considerar los efectos de la esbeltez en el diseño, se debería calcular un valor de k más exacto y evaluar nuevamente la esbeltez. Para los elementos comprimidos en pórticos desplazables donde la relación entre la rigidez de la columna y la rigidez de las vigas es igual a 1,0 en ambos extremos, los efectos de la esbeltez se pueden despreciar cuando ℓ_u/h es menor que 5. Este valor se reduce a 3 si la rigidez de las vigas se reduce a un quinto de la rigidez de la columna en cada extremo de la misma. En consecuencia, las rigideces en la parte superior e inferior de las columnas de los edificios en altura en los cuales el desplazamiento lateral no está restringido mediante muros estructurales u otros elementos afectarán significativamente el grado de esbeltez de la columna.

El límite superior de la esbeltez indicado, $k\ell_u/r = 100$, corresponde a $\ell_u/h = 30$ para un elemento comprimido en un pórtico indesplazable con restricción nula en ambos extremos. Este límite de ℓ_u/h aumenta a 39 cuando la relación entre la rigidez de la columna y la rigidez de las vigas en ambos extremos es igual a 1,0.

10.12.3 Momentos amplificados – Pórticos indesplazables

Las ecuaciones para el diseño aproximado de columnas esbeltas indicadas en 10.12.3 para pórticos indesplazables se basan en el concepto de un factor de amplificación de momentos, δ_{ns} , que se aplica al mayor de los momentos mayorados, M_2 , de ambos

extremos del elemento comprimido. Luego la columna se diseña para la carga axial mayorada P_u y el momento amplificado M_c , siendo M_c :

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad \text{Ec. (10-8)}$$

donde

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0,75P_c}} \geq 1,0 \quad \text{Ec. (10-9)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \quad \text{Ec. (10-10)}$$

La carga crítica P_c se calcula para condición indesplazable usando un factor de longitud efectiva, k , menor o igual que 1,0. Cuando k se determina usando los nomogramas o las ecuaciones de R10.12, en los cálculos se deben usar los valores de E e I de 10.11.1. Observar que el factor 0,75 de la Ecuación (10-9) es un factor de reducción de la rigidez (ver R10.12.3).

Para definir la carga crítica de una columna, la principal dificultad radica en elegir un parámetro de rigidez EI que aproxime razonablemente las variaciones de la rigidez debidas a la fisuración, la fluencia lenta y la no linealidad de la curva tensión-deformación del hormigón. Si no se realiza un análisis más exacto, EI se deberá tomar como:

$$EI = \frac{(0,2E_c I_g + E_s I_{se})}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-11)}$$

o bien

$$EI = \frac{0,4E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

La segunda ecuación es una aproximación simplificada de la primera. Ambas ecuaciones aproximan los límites inferiores de EI para las secciones habituales y, por lo tanto, son conservadoras. La Figura 11-12 ilustra la naturaleza aproximada de las ecuaciones para determinar EI , comparándolas con valores obtenidos de diagramas momento-curvatura para el caso que no hay carga sostenida ($\beta_d = 0$).

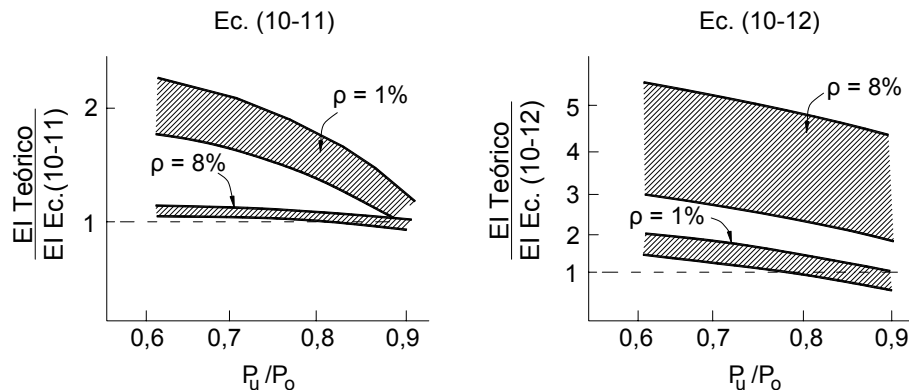


Figura 11-12 – Comparación de EI obtenido mediante las ecuaciones con valores de EI obtenidos de diagramas momento-curvatura

La Ecuación (10-11) representa el límite inferior del rango práctico de los valores de rigidez. Esto es particularmente válido para las columnas fuertemente armadas. Como se observó anteriormente, la Ecuación (10-12) es más fácil de usar pero subestima en gran medida el efecto de la armadura en las columnas fuertemente armadas (ver Figura 11-12).

Ambas ecuaciones para determinar EI fueron desarrolladas para valores de e/h pequeños y valores de P_u/P_o elevados, caso en el cual el efecto de la carga axial es más pronunciado. El término P_o es la resistencia nominal a la carga axial para excentricidad nula.

En las columnas de hormigón armado solicitadas por cargas de larga duración, la fluencia lenta transfiere parte de la carga del hormigón a la armadura, aumentando así las tensiones en el acero. En las columnas poco armadas esta transferencia de carga puede provocar que el acero llegue a fluencia de forma prematura, provocando una pérdida en el valor efectivo de EI. Esto se toma en cuenta dividiendo EI por $(1 + \beta_d)$. Para los pórticos indesplazables β_d se define de la siguiente manera (ver 10.0):

$$\beta_d = \frac{\text{Máxima carga axial de larga duración mayorada}}{\text{Máxima carga axial mayorada asociada con la misma combinación de cargas}}$$

En las columnas compuestas en las cuales un perfil de acero representa un gran porcentaje de la sección transversal total de la columna, la transferencia de carga debida a la fluencia lenta no es significativa. En consecuencia, sólo la parte de EI correspondiente al hormigón se debería reducir aplicando $(1 + \beta_d)$ para tomar en cuenta los efectos de la carga de larga duración.

El término C_m es un factor de corrección para momentos equivalentes. Para elementos sin cargas transversales entre sus apoyos, el término C_m es (10.12.3.1):

$$C_m = 0,6 + 0,4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \geq 0,4 \quad \text{Ec. (10-13)}$$

En los elementos con cargas transversales entre sus apoyos, es posible que el momento máximo ocurra en una sección alejada de los extremos del elemento. En este caso, el mayor momento calculado que ocurre en cualquier sección de la longitud del elemento se debería amplificar aplicando δ_{ns} , y C_m se debe tomar igual a 1,0. La Figura 11-13 muestra algunos de los valores del coeficiente C_m , en función de la deformada de la columna y las condiciones de vínculo de los extremos.

Si en la Ecuación (10-8) el momento M_2 calculado es pequeño o nulo, el diseño de una columna indesplazable se debe basar en el momento mínimo $M_{2,min}$ (10.12.3.2):

$$M_{2,min} = P_u (0,6 + 0,03h) \quad \text{Ec. (10-14)}$$

Para los elementos en los cuales se verifique $M_{2,min} > M_2$, el valor de C_m se debe tomar igual a 1,0 o bien se debe calcular mediante la Ecuación (10-13) considerando el cociente de los momentos reales calculados para los extremos, M_1 y M_2 .

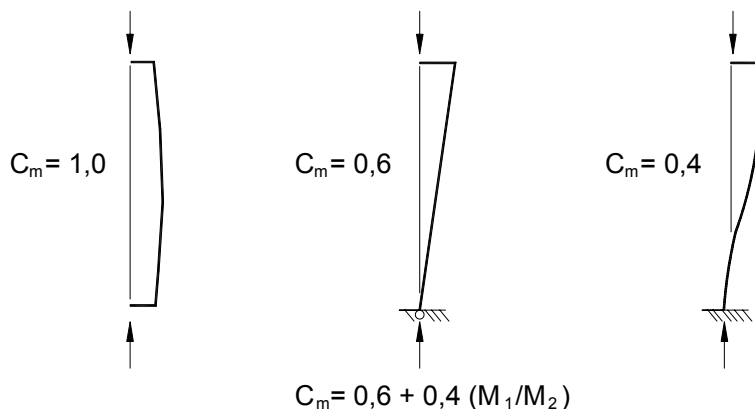


Figura 11-13 – Valores del coeficiente C_m

10.13.3 Momentos amplificados – Pórticos desplazables

El diseño de los pórticos desplazables considerando los efectos de la esbeltez consiste esencialmente en tres pasos:

1. Se calculan los momentos amplificados debidos al desplazamiento lateral, $\delta_m M_s$, de una de las tres maneras siguientes:
 - a. Un análisis elástico de segundo orden del pórtico (10.13.4.1)
 - b. Un análisis de segundo orden aproximado (10.13.4.2)
 - c. Un método aproximado en base a un factor de amplificación de los códigos ACI anteriores (10.13.4.3)
2. Los momentos amplificados debidos al desplazamiento lateral, $\delta_m M_s$, se suman a los momentos M_{ns} , no amplificados y sin considerar el desplazamiento lateral, en cada extremo de la columna (10.13.3):

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \quad \text{Ec. (10-15)}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec. (10-16)}$$

Los momentos que no consideran el desplazamiento lateral, M_{1ns} y M_{2ns} , se calculan usando un análisis elástico de primer orden.

3. Si la columna es esbelta y las cargas axiales que actúan sobre la misma son elevadas, se debe verificar si los momentos en los puntos entre los extremos de la columna son mayores que los momentos en dichos extremos. De acuerdo con 10.13.5, esta verificación se realiza usando el factor de amplificación δ_{ns} para pórticos indesplazables, calculando P_c en base a $k = 1,0$ o menor.

10.13.4 Determinación de $\delta_s M_s$

Como se indicó anteriormente, existen tres maneras para calcular los momentos amplificados debidos al desplazamiento lateral, $\delta_s M_s$. Si para calcular $\delta_s M_s$ se utiliza un análisis elástico de segundo orden, las deformaciones deben ser representativas del estado inmediatamente anterior a la carga última. Por este motivo en los análisis de segundo orden se deben usar los valores de EI dados en 10.11.1. Observar que I se debe dividir por $(1 + \beta_d)$, donde para pórticos desplazables β_d se define de la siguiente manera (ver 10.0):

$$\beta_d = \frac{\text{Máximo corte de larga duración mayorado en un entrepiso}}{\text{Máximo corte mayorado en el entrepiso}}$$

Para cargas sísmicas $\beta_d = 0$. Un ejemplo de un valor de β_d diferente de cero puede ocurrir cuando los elementos están solicitados por presiones del suelo.

La sección 10.13.4.2 permite utilizar un análisis de segundo orden aproximado para determinar $\delta_s M_s$. En este caso, la solución de la serie infinita que representa el análisis iterativo $P-\Delta$ para los momentos de segundo orden es:

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - Q} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-17)}$$

donde

Q = índice de estabilidad de un entrepiso

$$= \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \quad \text{Ec. (10-7)}$$

Observar que la Ecuación (10-7) predice en forma precisa los momentos de segundo orden en los pórticos desplazables para valores de δ_s menores que 1,5. Cuando se verifica $\delta_s > 1,5$: $\delta_m M_s$ se debe calcular usando 10.13.4.1 ó 10.13.4.3.

El código también permite determinar $\delta_s M_s$ usando el procedimiento de amplificación de momentos incluido en los códigos ACI anteriores (10.13.4.3):

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0,75 \sum P_c}} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-18)}$$

donde

$\sum P_u$ = sumatoria de todas las cargas verticales en un piso

$\sum P_c$ = sumatoria de las cargas críticas para todas las columnas que resisten el desplazamiento lateral de un piso

Es importante observar que, en las construcciones con desplazamientos torsionales significativos, el procedimiento de amplificación de momentos puede subestimar la amplificación de los momentos de las columnas más alejadas del centro de rotación. En estos casos se debería considerar un análisis de segundo orden tridimensional.

10.13.5 Ubicación del máximo momento

Al sumar los momentos no amplificados y sin considerar el desplazamiento lateral en los extremos de la columna con los momentos amplificados debidos al desplazamiento lateral, uno de los momentos totales resultantes obtenidos generalmente es el máximo momento de la columna. Sin embargo, en las columnas esbeltas con elevadas cargas axiales, el máximo momento puede ocurrir en un punto ubicado entre ambos extremos de la columna. En 10.13.5 se indica una manera sencilla de determinar si esto ocurre: si en un elemento individual comprimido

$$\frac{\ell_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f'_c A_g}}} \quad \text{Ec. (10-19)}$$

el máximo momento ocurrirá en un punto ubicado entre ambos extremos de la columna. En este caso, M_2 , definido en la Ecuación (10-16) se debe amplificar aplicando el factor de amplificación de momentos para pórticos indesplazables dado en la Ecuación (10-9). Luego la columna se diseña para la carga axial mayorada P_u y el momento M_c , donde M_c se calcula de la siguiente manera:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad \text{Ec. (10-8)}$$

$$= \left(\frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0,75 P_c}} \right) (M_{2ns} + \delta_s M_{2s})$$

Observar que k se determina de acuerdo con 10.12.1 y $\delta_{ns} \geq 1,0$.

10.13.6 Estabilidad estructural bajo cargas gravitatorias

En los pórticos desplazables se debe investigar la posibilidad de inestabilidad por desplazamiento lateral de la estructura en su conjunto. Esto se verifica de tres maneras diferentes, dependiendo del método usado para determinar $\delta_m M_s$:

1. Cuando $\delta_s M_s$ se determina mediante un análisis de segundo orden (10.13.4.1) se debe satisfacer la siguiente expresión:

$$\frac{\text{deformaciones laterales de segundo orden}}{\text{deformaciones laterales de primer orden}} \leq 2,5$$

Observar que estas deformaciones se basan en una carga aplicada de $1,4P_D$ y $1,7P_L$ más la carga horizontal aplicada. El pórtico se debería analizar dos veces para este conjunto de cargas: el primer análisis debería ser un análisis de primer orden, y el segundo un análisis de segundo orden. La carga horizontal se puede tomar como las cargas horizontales reales usadas en el diseño, o bien puede ser una carga horizontal única aplicada en la parte superior del pórtico. En cualquier caso, la carga horizontal debe ser lo suficientemente grande para producir deformaciones con valores de tal magnitud que puedan ser comparadas con precisión.

2. Cuando $\delta_s M_s$ se determina mediante un análisis de segundo orden aproximado (10.13.4.2):

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \leq 0,60$$

donde el valor de Q se evalúa usando $1,4P_D$ y $1,7P_L$. Observar que la expresión anterior equivale a $\delta_s = 2,5$. Los valores de V_u y Δ_o se pueden determinar usando el conjunto real de las cargas horizontales o bien un conjunto arbitrario de cargas horizontales. Esta verificación de la estabilidad se considera satisfecha si el valor de Q calculado en 10.11.4.2 es menor o igual que 0,2.

3. Cuando $\delta_s M_s$ se determina usando las expresiones de los códigos ACI anteriores (10.13.4.3), la verificación de la estabilidad se considera satisfecha cuando

$$0 < \delta_s \leq 2,5$$

En este caso $\sum P_u$ y $\sum P_o$ corresponden a las cargas permanentes y sobrecargas mayoradas.

Es importante observar que en cada uno de los tres casos presentados β_d se deberá tomar como:

$$\beta_d = \frac{\text{Máxima carga axial de larga duración mayorada}}{\text{Máxima carga axial mayorada}}$$

10.13.7 Amplificación de momentos para elementos solicitados a flexión

La resistencia de un pórtico desplazable depende de la estabilidad de las columnas y del grado de restricción proporcionado por las vigas del pórtico. Si en las vigas que proveen restricción se forman rótulas plásticas, el comportamiento de la estructura se aproxima al de un mecanismo, y su capacidad de resistir cargas axiales se reduce en forma drástica. La sección 10.13.7 especifica que los elementos solicitados a flexión (vigas o losas) que proveen restricción deben tener capacidad para resistir los momentos amplificados de las columnas. El método del factor de amplificación de momentos permite obtener una buena aproximación de los momentos amplificados reales que actúan en los extremos de los elementos de los pórticos no arriostrados; esto es un avance significativo con respecto al método de los factores de reducción para columnas largas que se especificaba en códigos anteriores de ACI para tomar en cuenta la esbeltez de los elementos en el diseño.

RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE DISEÑO

Creemos que el siguiente resumen de ecuaciones para el diseño de columnas esbeltas bajo cargas permanentes, sobrecargas y cargas de viento, tanto en pórticos indesplazables como en pórticos desplazables, puede ser de utilidad para el diseñador. Los Ejemplos 11.1 y 11.2 ilustran la aplicación de estas ecuaciones para el diseño de columnas en pórticos indesplazables y pórticos desplazables, respectivamente.

- **Pórticos indesplazables**

1. Determinar las combinaciones de cargas mayoradas de acuerdo con 9.2.

En los ejemplos que siguen se asume que el factor de carga para sobrecarga es 0,5 (es decir, se aplica la condición 9.2.1(a)) y que la carga de viento ha sido reducida aplicando el factor de direccionalidad (9.2.1(b)).

Observar que los momentos mayorados $M_{u,sup}$ y $M_{u,inf}$ en los extremos superior e inferior de la columna, respectivamente, se han de determinar usando un análisis de pórtico de primer orden, en base a las propiedades de la sección fisurada del elemento.

2. Determinar M_c para cada combinación de cargas, siendo M_c el mayor momento mayorado que actúa en un extremo de la columna, incluyendo los efectos de la esbeltez (si fuera necesario). Observar que M_c se puede determinar mediante uno de los siguientes métodos:
 - a. Análisis de segundo orden (P- Δ) (10.10.1)
 - b. Método del factor de amplificación de momentos (sólo si $k\ell_u/r \leq 100$; ver 10.12 y el paso (3) siguiente)

Determinar la armadura requerida en la columna para la combinación de cargas crítica determinada en el paso (1) anterior. Cada combinación de cargas consiste en P_u y M_u .

3. Método del factor de amplificación de momentos (10.12):

Los efectos de la esbeltez se pueden despreciar cuando:

$$\frac{k\ell_u}{r} \leq 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \quad \text{Ec. (10-7)}$$

donde $[34 - 12M_1/M_2] \leq 40$. El término M_1/M_2 es positivo si la columna se deforma con curvatura simple, y negativo si el elemento se deforma con curvatura doble.

Si es necesario considerar los efectos de la esbeltez, determinar M_c para cada combinación de cargas:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad \text{Ec. (10-8)}$$

donde

$$M_2 = \text{valor mayor entre } M_{u,inf} \text{ y } M_{u,sup} \\ \geq P_u (0,6 + 0,03h) \quad 10.12.3.2$$

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0,75P_c}} \geq 1,0 \quad \text{Ec. (10-9)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \quad \text{Ec. (10-10)}$$

$$EI = \frac{(0,2E_c I_g + E_s I_{se})}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-11)}$$

o bien

$$EI = \frac{0,4E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

$$\beta_d = \frac{\text{Máxima carga axial de larga duración mayorada}}{\text{Máxima carga axial mayorada asociada con la misma combinación de cargas}} \quad 10.0$$

$$C_m = 0,6 + 0,4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \geq 0,4 \quad (\text{sin cargas transversales}) \quad \text{Ec. (10-13)}$$

$$= 1,0 \quad (\text{con cargas transversales})$$

El factor de longitud efectiva se deberá tomar igual a 1,0 o bien se deberá determinar mediante análisis (por ejemplo, usando el nomograma o las ecuaciones dadas en R10.12). En este último caso, k se deberá basar en los valores de E e I usados en 10.11.1 (ver 10.12.1).

• **Pórticos desplazables**

1. Determinar las combinaciones de cargas mayoradas.

a. Cargas gravitatorias (permanentes y sobrecargas)

Todos los momentos $(M_{u,inf})_{ns}$ y $(M_{u,sup})_{ns}$ en la parte inferior y superior de la columna, respectivamente, se deben determinar usando un análisis de pórtico elástico de primer orden, en base a las propiedades de la sección fisurada de los elementos.

Los momentos M_1 y M_2 son el valor menor y el valor mayor de los momentos $(M_{u,inf})_{ns}$ y $(M_{u,sup})_{ns}$, respectivamente. Los momentos M_{1ns} y M_{2ns} son los momentos mayorados en los extremos correspondientes a los extremos en los cuales actúan M_1 y M_2 , respectivamente.

b. Cargas gravitatorias (permanentes y sobrecargas) más cargas de viento

Los momentos totales en la parte superior e inferior de la columna son $M_{u,sup} = (M_{u,sup})_{ns} + (M_{u,sup})_s$ y $M_{u,inf} = (M_{u,inf})_{ns} + (M_{u,inf})_s$, respectivamente. Los momentos M_1 y M_2 son el valor menor y el valor mayor de los momentos $M_{u,sup}$ y $M_{u,inf}$, respectivamente. Observar que en esta etapa M_1 y M_2 no incluyen los efectos de la esbeltez. Los momentos M_{1ns} y M_{1s} son los momentos mayorados indesplazables y desplazables, respectivamente, que actúan en el extremo de la columna donde actúa M_1 , mientras que M_{2ns} y M_{2s} son los momentos mayorados indesplazables y desplazables, respectivamente, que actúan en el extremo de la columna donde actúa M_2 .

c. Cargas gravitatorias (permanentes) más cargas de viento

Para esta combinación de cargas los momentos se definen como se especifica en el punto 1(b).

d. En las combinaciones de cargas especificadas en los puntos 1(b) y 1(c) anteriores se deben considerar los efectos que se producen cuando las cargas de viento actúan en la dirección de análisis inicial y en la opuesta.

2. Determinar la armadura requerida en la columna para la combinación de cargas crítica determinada en el punto (1) anterior. Cada combinación de cargas está compuesta por P_u , M_1 y M_2 , donde ahora M_1 y M_2 son los momentos mayorados totales que actúan en los extremos, incluyendo los efectos de la esbeltez. Observar que si la carga crítica P_c se calcula usando EI de la Ecuación (10-11), también es necesario estimar primero la armadura de la columna. Los momentos M_1 y M_2 se determinan mediante uno de los métodos siguientes:

- Análisis de segundo orden ($P - \Delta$) (10.10.1)
 - Método del factor de amplificación de momentos (sólo si $k\ell_u/r \leq 100$; ver 10.13 y el paso (3) a continuación)
3. Método del factor de amplificación de momentos (ver 10.13):

Los efectos de la esbeltez se pueden despreciar cuando

$$\frac{k\ell_u}{r} < 22 \quad 10.13.2$$

Si es necesario considerar los efectos de la esbeltez:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \quad \text{Ec. (10-15)}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \quad \text{Ec. (10-16)}$$

Los momentos $\delta_s M_{1s}$ y $\delta_s M_{2s}$ se deben calcular usando uno de los métodos siguientes (ver 10.13.4):

- Análisis de segundo orden ($P - \Delta$) (ver 10.13.4.1)
- Análisis de segundo orden aproximado (10.13.4.2)

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - Q} \geq M_s, \quad 1, 0 \leq \delta_s \leq 1,5 \quad \text{Ec. (10-17)}$$

donde

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \quad \text{Ec. (10-6)}$$

- Método aproximado dado en códigos ACI anteriores (ver 10.13.4.3):

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0,75 \sum P_c}} \geq M_s \quad \text{Ec. (10-18)}$$

donde

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \quad \text{Ec. (10-10)}$$

$$EI = \frac{(0,2E_c I_g + E_s I_{se})}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-11)}$$

o bien

$$EI = \frac{0,4E_c I_g}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

El factor de longitud efectiva, k, debe ser mayor que 1,0 y se debe basar en los valores de E e I indicados en 10.11.1. (ver 10.13.1).

4. Determinar si el máximo momento ocurre en los extremos de la columna o en un punto ubicado entre los extremos (10.13.5).
Si

$$\frac{\ell_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{f'_c A_g}} \quad \text{Ec. (10-19)}$$

la columna se debe diseñar para la carga axial mayorada P_u y el momento M_c , siendo

$$M_c = \delta_{ns} M_2$$

$$= \left(\frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0,75P_c}} \right) (M_{2ns} + \delta_s M_{2s})$$

En este caso, k se determina de acuerdo con los requisitos de 10.12.1 y $\delta_{ns} \geq 1,0$.

5. Verificar la posibilidad de inestabilidad por desplazamiento lateral bajo cargas gravitatorias (10.13.6):

- a. Si $\delta_s M_s$ se calcula en base a 10.13.4.1:

$$\frac{\text{Deformaciones laterales de segundo orden}}{\text{Deformaciones laterales de primer orden}} \leq 2,5$$

en base a una carga de $1,4P_D$ y $1,7P_L$ más la carga horizontal.

- b. Si $\delta_s M_s$ se calcula en base a 10.13.4.2:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \leq 0,60$$

en base a una carga de $1,4P_D$ y $1,7P_L$ más la carga horizontal.

- c. Si $\delta_s M_s$ se calcula en base a 10.13.4.3:

$$0 < \delta_s \leq 2,5$$

donde δ_s se calcula usando $\sum P_u$ y $\sum P_c$ correspondientes a una carga de $1,4P_D$ y $1,7P_L$.

En los tres casos β_d se deberá tomar como:

$$\beta_d = \frac{\text{Máxima carga axial de larga duración mayorada}}{\text{Máxima carga axial mayorada}}$$

La referencia 11.1 contiene el desarrollo de las ecuaciones de diseño para los requisitos de esbeltez presentados en esta sección.

REFERENCIA

- 11.1 MacGregor, J. G., "Design of Slender Concrete Columns – Revisited," *ACI Structural Journal*, V. 90, No. 3, Mayo-Junio 1993, pp. 302-309.

Ejemplo 11.1 – Efectos de la esbeltez para columnas en un pórtico indesplazable

Diseñar las columnas A3 y C3 para el primer piso del edificio de oficinas de 10 pisos ilustrado. La luz libre del primer piso es de 21 ft-4 in., y en todos los demás pisos es de 11 ft-4 in. Suponer que las cargas horizontales que actúan en el edificio son provocadas por el viento, y que las cargas permanentes son las únicas cargas de larga duración. Los demás datos necesarios son los siguientes:

Propiedades de los materiales:

Hormigón:

Entrepisos: $f'_c = 4000$ psi, $w_c = 150$ lb/ft³

Columnas y tabiques: $f'_c = 6000$ psi, $w_c = 150$ lb/ft³

Armadura: $f_y = 60$ ksi

Vigas: 24 × 20 in.

Columnas exteriores: 20 × 20 in.

Columnas interiores: 24 × 24 in.

Muros de cortante: 12 in.

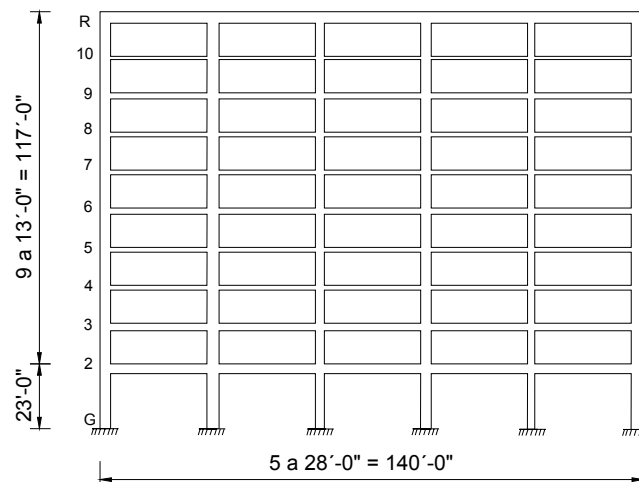
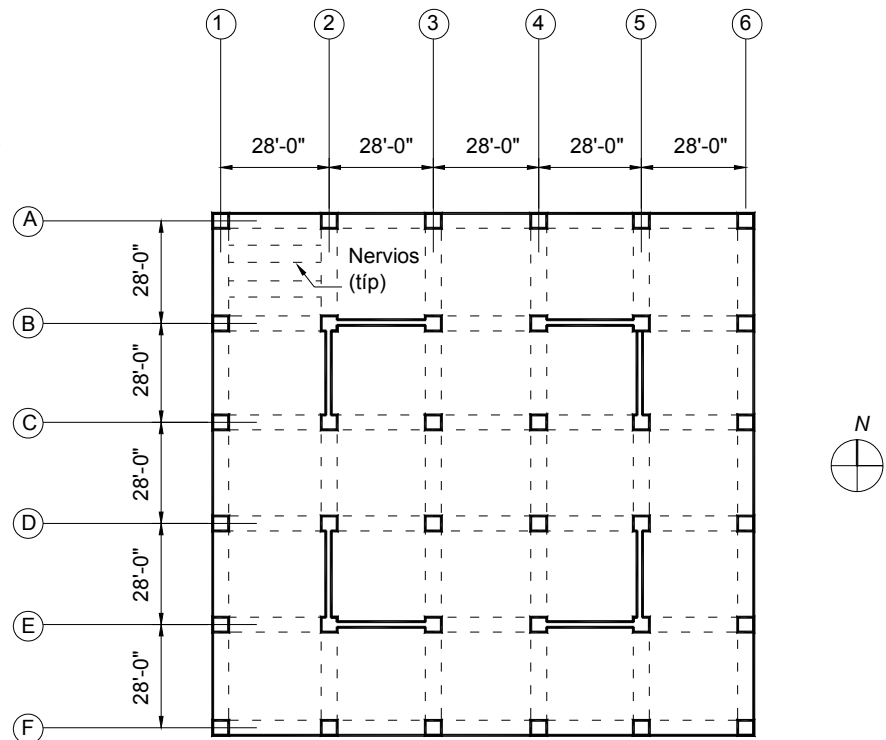
Peso de los nervios de las losas = 86 lb/ft²

Carga permanente impuesta = 32 lb/ft²

Sobrecarga en la cubierta = 30 lb/ft²

Sobrecarga en los entrepisos = 50 lb/ft²

Las cargas de viento se calculan de acuerdo con ASCE 7.



1. Cargas axiales y momentos flectores mayorados para las columnas A3 y C3 en el primer piso.

Columna A3

Caso de Carga			Carga axial (kips)	Momento flector (ft-kips)	
				Superior	Inferior
Permanente (D)			718,0	79,0	40,0
Sobrecarga (L)*			80,0	30,3	15,3
Sobrecarga en la cubierta (L _r)			12,0	0,0	0,0
Viento (W)			±8,0	±1,1	±4,3
Ec.	No.	Combinación de Cargas			
9-1	1	1,4D	1005,2	110,6	56,0
9-2	2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	995,6	143,3	72,5
9-3	3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	920,8	110,0	55,7
	4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	887,2	95,7	51,4
	5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	874,4	93,9	44,6
9-4	6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	920,4	111,7	62,5
	7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	894,8	108,2	48,8
9-6	8	0,9D + 1,6W	659,0	72,9	42,9
	9	0,9D - 1,6W	633,4	69,3	29,1

* Incluye la reducción de la sobrecarga de acuerdo con ASCE 7

Columna C3

Caso de Carga			Carga axial (kips)	Momento flector (ft-kips)	
				Superior	Inferior
Permanente (D)			1269,0	1.0	0.7
Sobrecarga (L)*			147.0	32.4	16.3
Sobrecarga en la cubierta (L _r)			24.0	0.0	0.0
Viento (W)			±3,0	±2,5	±7,7
Ec.	No.	Combinación de Cargas			
9-1	1	1,4D	1776,6	1,4	1,0
9-2	2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	1770,0	53,0	26,9
9-3	3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	1634,7	17,4	7,0
	4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	1563,6	3,2	9,0
	5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	1558,8	-0,8	-5,3
9-4	6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	1613,1	21,4	21,3
	7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	1603,5	13,4	-3,3
9-6	8	0,9D + 1,6W	1146,9	4,9	13,0
	9	0,9D - 1,6W	1137,3	-3,1	-11,7

* Incluye la reducción de la sobrecarga de acuerdo con ASCE 7

Observar que las columnas A3 y C3 se deforman con curvatura doble.

2. Determinar si el pórtico en el primer piso es indesplazable o desplazable.

Los resultados de un análisis elástico de primer orden en base a las propiedades seccionales indicadas en 10.11.1 son los siguientes:

$\sum P_u$ = carga vertical total en el primer piso correspondiente al caso de carga lateral para el cual $\sum P_u$ es máximo

Las cargas totales del edificio son: $D = 37.371$ kips, $L = 3609$ kips, y $L_r = 602$ kips.

$\sum P_u$ máxima se determina en base a la Ecuación (9-4):

$$\sum P_u = (1,2 \times 37.371) + (0,5 \times 3609) + (0,5 \times 602) + 0 = 46.951 \text{ kips}$$

V_u = corte de piso mayorado en el primer piso correspondiente a las cargas de viento

$$= 1,6 \times 324,3 = 518,9 \text{ kips} \quad \text{Ec. (9-4), (9-6)}$$

Δ_o = deformación relativa de primer orden entre la parte superior e inferior del primer piso debida a V_u

$$= 1,6 \times (0,03 - 0) = 0,05 \text{ in.}$$

$$\text{Índice de estabilidad } Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} = \frac{46.951 \times 0,05}{518,9 \times [(23 \times 12) - (20/2)]} = 0,02 < 0,05 \quad \text{Ec. (10-6)}$$

Como $Q < 0,05$ el pórtico a nivel del primer piso se considera indesplazable. 10.11.4.2

3. Diseño de la columna C3.

a. Determinar si es necesario considerar los efectos de la esbeltez.

Usando un factor de longitud efectiva $k = 1,0$: 10.12.1

$$\frac{k \ell_u}{r} = \frac{1,0 \times 21,33 \times 12}{0,3 \times 24} = 35,6$$

Como la columna se deforma con curvatura doble, el menor valor de $34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$ se obtiene de la combinación de cargas No. 5:

$$34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) = 34 - 12 \left(\frac{-(-0,8)}{-5,3} \right) = 35,8 < 40$$

Para la columna C3 no es necesario considerar los efectos de la esbeltez, ya que $k \ell_u / r < 34 - 12 (M_1 - M_2)$. 10.12.2
 Observar que en este caso no es necesario calcular un valor de k más exacto ya que la columna no es esbelta para $k = 1,0$.

b. Determinar la armadura requerida.

Para la columna de 24×24 in., intentar con 16 barras No. 7.

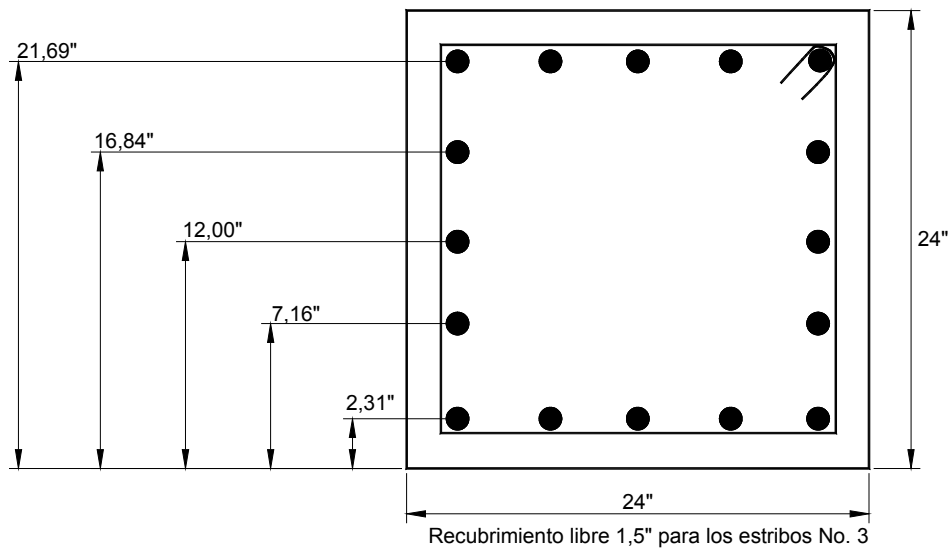
Determinar la máxima fuerza de compresión axial admisible, $\phi P_{n,max}$:

$$\phi P_{n,max} = 0,80\phi \left[0,85f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad \text{Ec. (10-2)}$$

$$= (0,80 \times 0,65) \left[(0,85 \times 6)(24^2 - 9,6) + (60 \times 9,6) \right]$$

$$= 1801,6 \text{ kips} > P_u \text{ máx.} = 1776,6 \text{ kips} \quad \text{VERIFICA}$$

La siguiente tabla contiene los resultados obtenidos de un análisis de compatibilidad de las deformaciones; las deformaciones de compresión se consideran positivas (ver Partes 6 y 7).



No.	P_u (kips)	M_u (ft-kips)	c (in.)	ϵ_t	ϕ	ϕP_n (kips)	ϕM_n (ft-kips)
1	1776,6	1,4	25,92	0,00049	0,65	1776,6	367,2
2	1770,0	53,0	25,83	0,00048	0,65	1770,0	371,0
3	1634,7	17,4	23,86	0,00027	0,65	1634,7	447,0
4	1563,6	7,0	22,85	0,00015	0,65	1563,6	480,9
5	1558,8	5,3	22,78	0,00014	0,65	1558,8	483,2
6	1613,1	21,4	23,55	0,00024	0,65	1613,1	457,8
7	1603,5	13,4	23,41	0,00022	0,65	1603,5	462,5
8	1146,9	13,0	17,25	-0,00077	0,65	1146,9	609,9
9	1137,3	11,7	17,13	-0,00080	0,65	1137,3	611,7

Por lo tanto, como $\phi M_n > M_u$ para cualquier $\phi P_n = P_u$, usar una columna cuadrada de 24×24 in. con 16 barras No. 7 ($\rho_g = 1,7\%$).

4. Diseño de la columna A3.

- Determinar si es necesario considerar los efectos de la esbeltez.

Determinar k usando el nomograma de la Figura 11-10 o la Figura R10.12.1:

$$I_{col} = 0,7 \left(\frac{20^4}{12} \right) = 9333 \text{ in.}^4 \quad 10.11.1(b)$$

$$E_c = 57.000 \frac{\sqrt{6000}}{1000} = 4415 \text{ ksi} \quad 8.5.1$$

Para la columna debajo del nivel 2:

$$\left(\frac{E_c I}{\ell_c} \right) = \frac{4415 \times 9333}{[(23 \times 12) - (20/2)]} = 155 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

Para la columna encima del nivel 2:

$$\left(\frac{E_c I}{\ell_c} \right) = \frac{4415 \times 9333}{13 \times 12} = 264 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

$$I_{viga} = 0,35 \left(\frac{24 \times 20^3}{12} \right) = 5600 \text{ in.}^4 \quad 10.11.1(b)$$

$$\frac{EI}{\ell} = \frac{57 \sqrt{4000} \times 5600}{28 \times 12} = 60 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I / \ell_c}{\sum E_c I / \ell} = \frac{155 + 264}{60} = 7,0$$

Asumir $\Psi_B = 1,0$ (columna esencialmente empotrada en la base)

De la Figura R10.12.1(a), $k = 0,86$.

Por lo tanto, para la columna A3, deformada con doble curvatura, el menor valor de $34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$ se obtiene de la combinación de cargas No. 9:

$$34 - 12 \left(\frac{-29,1}{69,3} \right) = 39,0$$

$$\frac{k \ell_u}{r} = \frac{0,86 \times 21,33 \times 12}{0,3 \times 20} = 36,7 < 39,0$$

Para la columna A3, deformada con curvatura simple, el menor valor de $34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$ se obtiene de la combinación de cargas No. 8:

$$\frac{k \ell_u}{r} = 36,7 > 34 - 12 \left(\frac{42,9}{72,9} \right) = 26,9$$

Esto significa que no es necesario considerar la esbeltez para la columna A3 si ésta se deforma con curvatura doble. Sin embargo, para ilustrar el procedimiento de diseño, incluyendo la consideración de los efectos de la esbeltez para columnas indesplazables, asumir que se deforma con curvatura simple.

- b. Determinar el momento total M_c (incluyendo los efectos de la esbeltez) para cada combinación de cargas.

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \quad \text{Ec. (10-8)}$$

donde

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0,75P_c}} \geq 1,0 \quad \text{Ec. (10-9)}$$

La siguiente tabla resume el cálculo de los momentos amplificados para la columna A3 para todas las combinaciones de cargas, y a continuación se presenta el cálculo detallado para la combinación No. 6 incluido para ilustrar el procedimiento.

No.	P_u (kips)	M_2 (ft-kips)	β_d	$EI \times 10^6$ (kip-in. ²)	P_c	C_m	δ_{ns}	$M_{2,min}$ (ft-kips)	M_c (ft-kips)
1	1005,2	110,6	1,00	9,88	2013	0,80	2,40	100,5	265,6
2	995,6	143,3	0,87	10,60	2158	0,80	2,08	99,6	298,6
3	920,8	110,0	0,94	10,21	2080	0,80	1,96	92,1	215,3
4	887,2	95,7	0,97	10,03	2042	0,82	1,94	88,7	185,3
5	874,4	93,9	0,99	9,96	2028	0,79	1,86	87,4	174,5
6	920,4	111,7	0,94	10,21	2079	0,82	2,01	92,0	224,6
7	894,8	108,2	0,96	10,07	2051	0,78	1,87	89,5	201,8
8	659,0	72,9	0,98	9,98	2033	0,84	1,47	65,9	107,2
9	633,4	69,3	1,02	9,78	1993	0,77	1,33	63,3	92,4

Combinación de cargas No. 6:

$$U = 1,2D + 0,5L + 0,5L_r + 1,6W$$

$$C_m = 0,6 + 0,4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \geq 0,4 \quad \text{Ec. (10-13)}$$

$$= 0,6 + 0,4 \left(\frac{62,5}{111,7} \right) = 0,82$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \quad \text{Ec. (10-10)}$$

$$EI = \frac{(0,2E_c I_g + E_s I_{se})}{1 + \beta_d} \quad \text{Ec. (10-11)}$$

$$E_c = 57.000 \frac{\sqrt{6000}}{1000} = 4415 \text{ ksi} \quad 8.5.1$$

$$I_g = \frac{20^4}{12} = 13.333 \text{ in.}^4$$

$$E_s = 29.000 \text{ ksi}$$

8.5.2

Suponiendo 8 barras No. 8 con 1,5 in. de recubrimiento para estribos No. 3:

$$I_{se} = 2 \left[(3 \times 0,79) \left(\frac{20}{2} - 1,5 - 0,375 - \frac{1,00}{2} \right)^2 \right] = 276 \text{ in.}^4$$

Como la carga permanente es la única carga de larga duración,

$$\beta_d = \frac{1,2P_D}{1,2P_D + 0,5P_L + 0,5P_{Lr} + 1,6P_w} \quad 10.0$$

$$= \frac{1,2 \times 718}{(1,2 \times 718) + (0,5 \times 80) + (0,5 \times 12) + (1,6 \times 8)} = 0,94$$

$$EI = \frac{(0,2 \times 4415 \times 13.333) + (29.000 \times 276)}{1 + 0,94} = 10,21 \times 10^6 \text{ kip-in.}^2$$

De la Ecuación (10-12):

$$EI = \frac{0,4E_c I_g}{1 + \beta_d}$$

$$= \frac{0,4 \times 4415 \times 13.333}{1 + 0,94} = 12,14 \times 10^6 \text{ kip-in.}^2$$

Usando EI de la Ecuación (10-11), la carga crítica P_c es:

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 10,21 \times 10^6}{(0,86 \times 21,33 \times 12)^2} = 2079 \text{ kips}$$

Por lo tanto, el factor de amplificación δ_{ns} es:

$$\delta_{ns} = \frac{0,82}{1 - \frac{920,4}{0,75 \times 2079}} = 2,01$$

Verificar requisito de momento mínimo:

$$M_{2,min} = P_u (0,6 + 0,03h)$$

$$= 920,4 [0,6 (0,03 \times 20)] / 12$$

$$= 92,0 \text{ ft-kips} < M_2 = 111,7 \text{ ft-kips} \quad \text{Ec. (10-14)}$$

Por lo tanto,

$$M_c = 2,01 \times 111,7 = 224,6 \text{ ft-kips}$$

c. Determinar la armadura requerida.

Para la columna de 20×20 in., intentar con 8 barras No. 8.

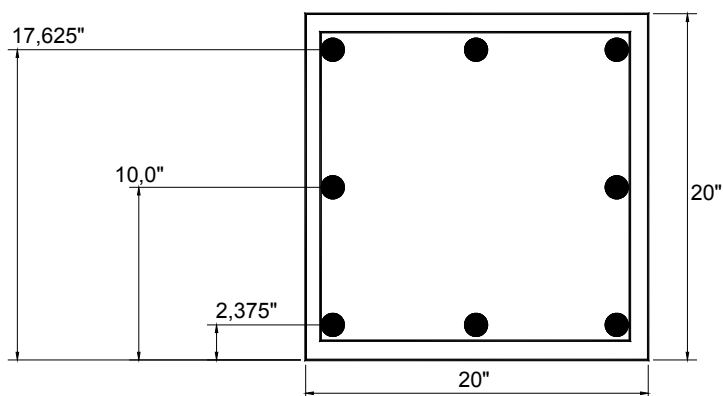
Determinar la máxima fuerza de compresión axial admisible, $\phi P_{n,\max}$:

$$\phi P_{n,\max} = 0,80\phi \left[0,85f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad \text{Ec. (10-2)}$$

$$= (0,80 \times 0,65) \left[(0,85 \times 6) (20^2 - 6,32) + (60 \times 6,32) \right]$$

$$= 1242 \text{ kips} > P_u \text{ máx.} = 1005,2 \text{ kips} \quad \text{VERIFICA}$$

La siguiente tabla contiene los resultados obtenidos de un análisis de compatibilidad de las deformaciones; las deformaciones de compresión se consideran positivas (ver Partes 6 y 7).



No.	P_u (kips)	M_u (ft-kips)	c (in.)	ϵ_t	ϕ	ϕP_n (kips)	ϕM_n (ft-kips)
1	1005,2	265.6	17.81	0.00003	0,65	1005,2	298,0
2	995,6	298.6	17.64	0.00000	0,65	995,6	301,1
3	920,8	215.3	16.42	-0.00022	0,65	920,8	321,4
4	887,2	185.3	15.88	-0.00033	0,65	887,2	329,3
5	874,4	174.5	15.67	-0.00037	0,65	874,4	332,1
6	920,4	224.6	16.41	-0.00022	0,65	920,4	321,6
7	894,8	201.8	16.00	-0.00030	0,65	894,8	327,6
8	659,0	107.2	12.36	-0.00128	0,65	659,0	364,8
9	633,4	92.4	12.00	-0.00141	0,65	633,4	367,2

Por lo tanto, como $\phi M_n > M_u$ para cualquier $\phi P_n = P_u$, usar una columna cuadrada de 20×20 in. con 8 barras No. 8 ($\rho_g = 1,6\%$).

Ejemplo 11.2 – Efectos de la esbeltez en un pórtico desplazable

Diseñar las columnas C1 y C2 para el primer piso del edificio de oficinas de 12 pisos ilustrado. La luz libre del primer piso es de 13 ft-4 in., y en todos los demás pisos es de 10 ft-4 in. Suponer que las cargas horizontales que actúan en el edificio son provocadas por el viento, y que las cargas permanentes son las únicas cargas de larga duración. Los demás datos necesarios son los siguientes:

Propiedades de los materiales:

Hormigón: = 6000 psi para las columnas en los dos pisos inferiores ($w_c = 150 \text{ lb/ft}^3$)
 = 4000 psi para el resto de los elementos ($w_c = 150 \text{ lb/ft}^3$)

Armadura: $f_y = 60 \text{ ksi}$

Vigas: $24 \times 20 \text{ in.}$

Columnas exteriores: $22 \times 22 \text{ in.}$

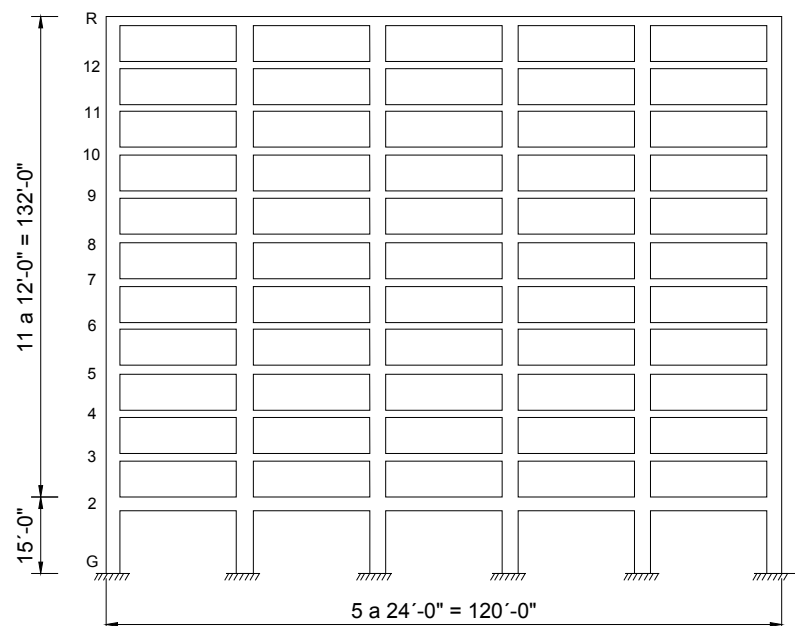
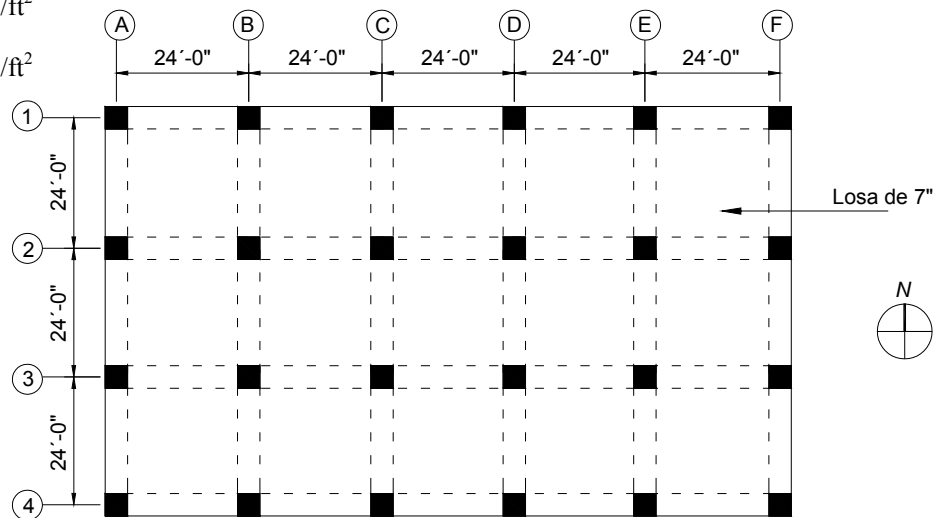
Columnas interiores: $24 \times 24 \text{ in.}$

Carga permanente impuesta = 30 lb/ft^2

Sobrecarga en la cubierta = 30 lb/ft^2

Sobrecarga en los entrepisos = 50 lb/ft^2

Las cargas de viento se calculan de acuerdo con ASCE 7.



Cálculos y discusión

1. Cargas axiales y momentos flectores mayorados para las columnas C1 y C2 en el primer piso.

Como se trata de un pórtico simétrico, las cargas gravitatorias no provocarán una deformación lateral apreciable.

Columna C1

Caso de Carga			Carga axial (kips)	Momento flector (ft-kips)							
				Superior	Inferior						
Permanente (D)			622,4	34,8	17,6						
Sobrecarga (L)*			73,9	15,4	7,7						
Sobrecarga en la cubierta (L _r)			8,6	0,0	0,0						
Viento (W) (N-S)			-48,3	17,1	138,8						
Viento (W) (S-N)			48,3	-17,1	-138,8						
	No.	Combinación de cargas				M ₁	M ₂	M _{1ns}	M _{2ns}	M _{1s}	M _{2s}
9-1	1	1,4D	871,4	48,7	24,6	24,6	48,7	24,6	48,7	---	---
9-2	2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	869,4	66,4	33,4	33,4	66,4	33,4	66,4	---	---
9-3	3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	797,6	49,5	25,0	25,0	49,5	25,0	49,5	---	---
	4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	722,0	55,4	131,5	55,4	131,5	41,8	21,1	13,7	110,4
	5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	799,3	28,1	-89,3	28,1	-89,3	41,8	21,1	-13,7	-110,4
9-4	6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	710,9	76,8	245,8	76,8	245,8	49,5	25,0	27,4	220,8
	7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	865,4	22,1	-195,8	22,1	-195,8	49,5	25,0	-27,4	-220,8
9-6	8	0,9D + 1,6W	482,9	58,7	236,6	58,7	236,6	31,3	15,8	27,4	220,8
	9	0,9D - 1,6W	637,4	4,0	-205,0	4,0	-205,5	31,3	15,8	-27,4	-220,8

* Incluye la reducción de la sobrecarga de acuerdo con ASCE 7

Columna C2

Caso de Carga			Carga axial (kips)	Momento flector (ft-kips)							
				Superior	Inferior						
Permanente (D)			1087,5	-2,0	-1,0						
Sobrecarga (L)*			134,5	-15,6	-7,8						
Sobrecarga en la cubierta (L _r)			17,3	0,0	0,0						
Viento (W) (N-S)			-0,3	43,5	205,0						
Viento (W) (S-N)			0,3	-43,5	-205,0						
	No.	Combinación de cargas				M ₁	M ₂	M _{1ns}	M _{2ns}	M _{1s}	M _{2s}
9-1	1	1,4D	1522,6	-2,8	-1,4	-1,4	-2,8	-1,4	-2,8	---	---
9-2	2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	1529,0	-27,4	-13,7	-13,7	-27,4	-13,7	-27,4	---	---
9-3	3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	1400,1	-10,2	-5,1	-5,1	-10,2	-5,1	-10,2	---	0,0
	4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	1332,6	32,4	162,8	32,4	162,8	-2,4	-1,2	34,8	164,0
	5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	1333,0	-37,2	-165,2	-37,2	-165,2	-2,4	-1,2	-34,8	-164,0
9-4	6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	1380,5	59,4	322,9	59,4	322,9	-10,2	-5,1	69,6	328,0
	7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	1381,5	-79,8	-333,1	-79,8	-333,1	-10,2	-5,1	-69,6	-328,0
9-6	8	0,9D + 1,6W	978,4	67,8	327,1	67,8	327,1	-1,8	-0,9	69,6	328,0
	9	0,9D - 1,6W	979,3	-71,4	-328,9	-71,4	-328,9	-1,8	-0,9	-69,6	-328,0

* Incluye la reducción de la sobrecarga de acuerdo con ASCE 7

2. Determinar si el pórtico en el primer piso es indesplazable o desplazable.

Los resultados de un análisis elástico de primer orden en base a las propiedades seccionales indicadas en 10.11.1 son los siguientes:

ΣP_u = carga vertical total en el primer piso correspondiente al caso de carga lateral para el cual ΣP_u es máximo

Las cargas totales del edificio son: $D = 17.895$ kips, $L = 1991$ kips, $L_r = 270$ kips.

ΣP_u máxima se determina en base a la Ecuación (9-4):

$$\Sigma P_u = (12 \times 17.895) + (0,5 \times 1991) + (0,5 \times 270) + 0 = 22.605 \text{ kips}$$

V_u = corte de piso mayorado en el primer piso correspondiente a las cargas de viento

$$= 1,6 \times 302,6 = 484,2$$

Ec. (9-4), (9-6)

Δ_o = deformación relativa de primer orden entre la parte superior e inferior del primer piso debida a V_u

$$= 1,6 \times (0,28 - 0) = 0,45 \text{ in.}$$

$$\text{Índice de estabilidad } Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} = \frac{22.605 \times 0,45}{484,2 \times [(15 \times 12) - (20/2)]} = 0,12 > 0,05 \quad \text{Ec. (10-6)}$$

Como $Q > 0,05$ el pórtico a nivel del primer piso se considera desplazable.

10.11.4.2

3. Diseño de la columna C1.

a. Determinar si es necesario considerar los efectos de la esbeltez.

Determinar k usando el nomograma de R10.12.1.

$$I_{col} = 0,7 \left(\frac{22^4}{12} \right) = 13.665 \text{ in.}^4 \quad 10.11.1$$

$$E_c = 57.00 \frac{\sqrt{6000}}{1000} = 4415 \text{ ksi} \quad 8.5.1$$

Para la columna debajo del nivel 2:

$$\left(\frac{E_c I}{\ell_c} \right) = \frac{4415 \times 13.665}{[(15 \times 12) - 10]} = 355 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

Para la columna encima del nivel 2:

$$\left(\frac{E_c I}{\ell_c} \right) = \frac{4415 \times 13.665}{12 \times 12} = 419 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

$$I_{viga} = 0,35 \left(\frac{24 \times 20^3}{12} \right) = 5600 \text{ in.}^4 \quad 10.11.1$$

$$\text{Para la viga: } \frac{E_c I}{\ell_c} = \frac{57 \sqrt{4000} \times 5600}{24 \times 12} = 70 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

$$\Psi_A = \frac{\sum E_c I / \ell_c}{\sum E_c I / \ell} = \frac{355 + 419}{70} = 11,1$$

Asumir $\Psi_B = 1,0$ (columna esencialmente empotrada en la base)

Del nomograma (Figura R10.12.1(b)), $k = 1,9$.

$$\frac{k \ell_u}{r} = \frac{1,9 \times 13,33 \times 12}{0,3 \times 22} = 46 > 22$$

10.13.2

Por lo tanto es necesario considerar los efectos de la esbeltez.

- b. Determinar el momento total M_2 (incluyendo los efectos de la esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño, usando el análisis aproximado de 10.13.4.2.

La siguiente tabla resume el cálculo de los momentos amplificados para la columna C1 para todas las combinaciones de cargas, y a continuación se presenta el cálculo detallado para las combinaciones No. 4 y 5, incluido para ilustrar el procedimiento.

No.	Combinación de Cargas	$\sum P_u$ (kips)	Δ_o (in.)	V_u (kips)	Q	δ_s	M_{2ns} (ft-kips)	M_{2s} (ft-kips)	M_2 (ft-kips)
1	1,4D	25.053	---	---	---	---	48,7	---	48,7
2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	24.795	---	---	---	---	66,4	---	66,4
3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	22.902	---	---	---	---	49,5	---	49,5
4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	21.906	0,22	242,1	0,12	1,14	21,1	110,4	147,0
5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	21.906	0,22	242,1	0,12	1,14	21,1	-110,4	-104,8
6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	22.605	0,45	484,2	0,12	1,14	25,0	220,8	276,7
7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	22.605	0,45	484,2	0,12	1,14	25,0	-220,8	-226,8
8	0,9D + 1,6W	16.106	0,45	484,2	0,09	1,10	15,8	220,8	257,9
9	0,9D - 1,6W	16.106	0,45	484,2	0,09	1,10	15,8	-220,8	-226,2

$$M_2 = M_{2ns} + M_{2s} \quad \text{Ec. (10-16)}$$

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1-Q} \geq M_{2s} \quad \text{Ec. (10-17)}$$

Para las combinaciones de cargas No. 4 y 5:

$$U = 1,2D + 1,6L_r \pm 0,8W$$

$$\sum P_u = (1,2 \times 17.895) + (1,6 \times 270) \pm 0 = 21.906 \text{ kips}$$

$$\Delta_o = 0,8 \times (0,28 - 0) = 0,22 \text{ in.}$$

$$V_u = 0,8 \times 302,6 = 242,1 \text{ kips}$$

$$\ell_c = (15 \times 12) - (20/2) = 170 \text{ in.}$$

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} = \frac{21.906 \times 0,22}{240,1 \times 170} = 0,12$$

$$\delta = \frac{1}{1-Q} = \frac{1}{1-0,12} = 1,14$$

- Para deformación lateral de norte a sur (combinación de cargas No. 4):

$$\delta_s M_{2s} = 1,14 \times 110,4 = 125,9 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} = 21,1 + 125,9 = 147,0 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 722,0 \text{ kips}$$

- Para deformación lateral de sur a norte (combinación de cargas No. 5):

$$\delta_s M_{2s} = 1,14 \times (-110,4) = -125,9 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = 21,1 - 125,9 = -104,8 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 799,3 \text{ kips}$$

- c. A fin de poder realizar una comparación, calcular nuevamente $\delta_s M_{2s}$ usando el método del factor de amplificación de momentos descrito en 10.13.4.3.

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - \frac{\sum P_u}{0,75 \sum P_c}} \geq M_{2s} \quad \text{Ec. (10-18)}$$

La carga crítica P_c se calcula con la Ecuación (10-10) usando k de 10.13.1 y EI de las Ecuaciones (10-11) o (10-12). Como aún no se conoce cuál será la armadura, para determinar EI usar la Ecuación (10-12).

Para cada una de las 12 columnas exteriores a lo largo de las líneas de columnas 1 y 4 (es decir, las columnas en las cuales en la dirección de análisis concurre una viga), en el punto 3(a) anterior se determinó que k es igual a 1,9.

$$EI = \frac{0,4 E_c I}{1 + \beta_d} = \frac{0,4 \times 4415 \times 22^4}{12(1+0)} = 34,5 \times 10^6 \text{ in.}^2\text{-kips} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k \ell_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 34,5 \times 10^6}{(1,9 \times 13,33 \times 12)^2} = 3686 \text{ kips} \quad \text{Ec. (10-10)}$$

Para cada una de las columnas exteriores A2, A3, F2 y F3 (es decir, las columnas en las cuales en la dirección de análisis concurren dos vigas):

$$\Psi_A = \frac{355 + 419}{2 \times 70} = 5,5$$

$$\Psi_B = 1,0$$

Del nomograma, $k = 1,75$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 34,5 \times 10^6}{(1,75 \times 13,33 \times 12)^2} = 4345 \text{ kips} \quad \text{Ec. (10-10)}$$

Para cada una de las 8 columnas interiores:

$$I_{\text{col}} = 0,7 \left(\frac{24^4}{12} \right) = 19.354 \text{ in.}^4 \quad 10.11.1$$

Para la columna debajo del nivel 2:

$$\frac{E_c I}{\ell_c} = \frac{4415 \times 19.354}{(15 \times 12) - 10} = 503 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

Para la columna encima del nivel 2:

$$\frac{E_c I}{\ell_c} = \frac{4415 \times 19.354}{12 \times 12} = 593 \times 10^3 \text{ in.-kips}$$

$$\Psi_A = \frac{503 + 593}{20 \times 70} = 7,8$$

$$\Psi_B = 1,0$$

Del nomograma, $k = 1,82$.

$$EI = 0,4 \times 4415 \times \frac{24^2}{12} = 48,8 \times 10^6 \text{ in.-kips} \quad \text{Ec. (10-12)}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k \ell_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 48,8 \times 10^6}{(1,82 \times 13,33 \times 12)^2} = 5683 \text{ kips} \quad \text{Ec. (10-10)}$$

Por lo tanto,

$$\sum P_c = 12(3686) + 4(4345) + 5(5683) = 107.076 \text{ kips}$$

La siguiente tabla resume el cálculo de los momentos amplificados para la columna C1 usando 10.13.4.3 para todas las combinaciones de cargas, y a continuación se presenta el cálculo detallado para las combinaciones No. 4 y 5, incluido para ilustrar el procedimiento.

No.	Combinación de Cargas	$\sum P_u$ (kips)	δ_s	M_{2ns} (ft-kips)	M_{2s} (ft-kips)	M_2 (ft-kips)
1	1,4D	25.053	---	48,7	---	48,7
2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	24.795	---	66,4	---	66,4
3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	22.903	---	49,5	---	49,5
4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	21.908	1,38	21,1	110,4	173,5

No.	Combinación de Cargas	$\sum P_u$ (kips)	δ_s	M_{2ns} (ft-kips)	M_{2s} (ft-kips)	M_2 (ft-kips)
5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	21.908	1,38	21,1	-110,4	-131,3
6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r +1,6W	22.605	1,39	25,0	220,8	331,9
7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r -1,6W	22.605	1,39	25,0	-220,8	-281,9
8	0,9D + 1,6W	16.106	1,25	15,8	220,8	292,0
9	0,9D - 1,6W	16.106	1,25	15,8	-220,8	-260,3

Para las combinaciones de cargas No. 4 y 5:

$$U = 1,2D + 1,6L_r \pm 0,8W$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0,75 \sum P_c}} = \frac{1}{1 - \frac{21.908}{0,75 \times 107.076}} = 1,38$$

- Para deformación lateral de norte a sur (combinación de cargas No. 4):

$$\delta_s M_{2s} = 1,38 \times 110,4 = 152,4 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = 21,1 + 152,4 = 173,5 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 722,0 \text{ kips}$$

- Para deformación lateral de sur a norte (combinación de cargas No. 5):

$$\delta_s M_{2s} = 1,38 \times (-110,4) = -152,4 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = 21,1 - 152,4 = -131,3 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 799,3 \text{ kips}$$

En la siguiente tabla se presenta un resumen de los momentos amplificados para la columna C1 para todas las combinaciones de cargas.

No.	Combinación de cargas	P_u (kips)	10.13.4.2		10.13.4.3	
			δ_s	M_2 (ft-kips)	δ_s	M_2 (ft-kips)
1	1,4D	871,4	---	48,7	---	48,7
2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	869,4	---	66,4	---	66,4
3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	797,6	---	49,5	---	49,5
4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	722,0	1,14	147,0	1,38	173,5
5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	799,3	1,14	-104,8	1,38	-131,3
6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r +1,6W	710,9	1,14	276,7	1,39	331,9
7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r -1,6W	865,4	1,14	-226,8	1,39	-281,9
8	0,9D + 1,6W	482,9	1,10	257,9	1,25	292,0
9	0,9D - 1,6W	637,4	1,10	-226,2	1,25	-260,3

d. Determinar la armadura requerida.

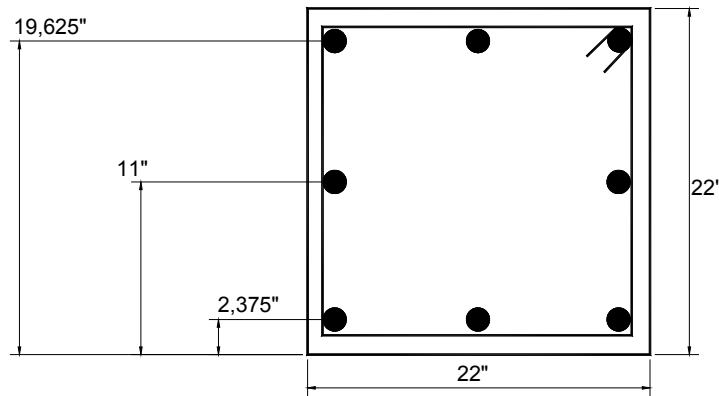
Para la columna de 22×22 in. intentar con 8 barras No. 8. Determinar la máxima fuerza de compresión axial admisible, $\phi P_{n,max}$:

$$\phi P_{n,max} = 0,80\phi \left[0,85f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad \text{Ec. (10-2)}$$

$$= (0,80 \times 0,65) \left[(0,85 \times 6) (22^2 - 6,32) + (60 \times 6,32) \right]$$

$$= 1464,0 \text{ kips} > P_u \text{ máx.} = 871,4 \text{ kips} \quad \text{VERIFICA}$$

La siguiente tabla contiene los resultados obtenidos de un análisis de compatibilidad de las deformaciones; las deformaciones de compresión se consideran positivas (ver Partes 6 y 7). Usar $M_u = M_2$ del método P - Δ aproximado de 10.13.4.2.



No.	P_u (kips)	M_u (ft-kips)	c (in.)	ϵ_t	ϕ	ϕP_n (kips)	ϕM_n (ft-kips)
1	871,4	48,7	14,85	-0,00096	0,65	871,4	459,4
2	869,4	66,4	14,82	-0,00097	0,65	869,4	459,7
3	797,6	49,5	13,75	-0,00128	0,65	797,6	468,2
4	722,0	147,0	12,75	-0,00162	0,65	722,0	474,1
5	799,3	-104,8	13,78	-0,00127	0,65	799,3	468,0
6	710,9	276,7	12,61	-0,00167	0,65	710,9	474,8
7	865,4	-226,8	14,76	-0,00099	0,65	865,4	460,2
8	482,9	257,9	7,36	-0,00500	0,90	482,9	557,2
9	637,4	-226,2	11,68	-0,00204	0,65	637,4	478,8

Por lo tanto, como $\phi M_n > M_u$ para cualquier $\phi P_n = P_u$, usar una columna de 22×22 in. con 8 barras No. 8 ($\rho_g = 1,3\%$). Esta misma armadura es adecuada para las combinaciones de cargas del método del factor de amplificación de momentos de 10.13.4.3.

4. Diseño de la columna C2

a. Determinar si es necesario considerar los efectos de la esbeltez.

En el punto 3(c) se determinó que k es igual a 1,82 para las columnas interiores. Por lo tanto,

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{1,82 \times 13,33 \times 12}{0,3 \times 24} = 40,4 > 22$$

10.13.2

Es necesario considerar los efectos de la esbeltez.

- b. Determinar el momento total M_2 (incluyendo los efectos de la esbeltez) y las combinaciones de cargas de diseño, usando el análisis aproximado de 10.13.4.2.

La siguiente tabla resume el cálculo de los momentos amplificados para la columna C2 para todas las combinaciones de cargas, y a continuación se presenta el cálculo detallado para las combinaciones No. 4 y 5, incluido para ilustrar el procedimiento.

No.	Combinación de Cargas	$\sum P_u$ (kips)	Δ_o (in.)	V_u (kips)	Q	δ_s	M_{2ns} (ft-kips)	M_{2s} (ft-kips)	M_2 (ft-kips)
1	1,4D	25.053	---	---	---	---	-2,8	---	-2,8
2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	24.795	---	---	---	---	-27,4	---	-27,4
3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	22.902	---	---	---	---	-10,2	---	-10,2
4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	21.906	0,22	242,1	0,12	1,14	-1,2	164,0	185,8
5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	21.906	0,22	242,1	0,12	1,14	-1,2	-164,0	-188,2
6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	22.605	0,45	484,2	0,12	1,14	-5,1	328,0	368,8
7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	22.605	0,45	484,2	0,12	1,14	-5,1	-328,0	-379,6
8	0,9D + 1,6W	16.106	0,45	484,2	0,09	1,10	-0,9	328,0	358,6
9	0,9D - 1,6W	16.106	0,45	484,2	0,09	1,10	-0,9	-328,0	360,4

$$M_2 = M_{2ns} + M_{2s} \quad \text{Ec. (10-16)}$$

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1-Q} \geq M_{2s} \quad \text{Ec. (10-17)}$$

Para las combinaciones de cargas No. 4 y 5:

$$U = 1,2D + 1,6L_r \pm 0,8W$$

En el punto 3(b) se determinó que δ_s es igual a 1,14.

- Para deformación lateral de norte a sur (combinación de cargas No. 4):

$$\delta_s M_{2s} = 1,14 \times 164 = 187,0 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} = -1,2 + 187,0 = 185,8 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 1332,6 \text{ kips}$$

- Para deformación lateral de sur a norte (combinación de cargas No. 5):

$$\delta_s M_{2s} = 1,14 \times (-164) = -187,0 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = -1,2 - 187,0 = -188,2 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 1333,0 \text{ kips}$$

- c. A fin de poder realizar una comparación, calcular nuevamente $\delta_s M_{2s}$ usando el método del factor de amplificación de momentos descrito en 10.13.4.3. Usar los valores de $\sum P_u$, $\sum P_c$ y δ_s calculados en el punto 3(c).

No.	Combinación de cargas	$\sum P_u$ (kips)	δ_s	M_{2ns} (ft-kips)	M_{2s} (ft-kips)	M_2 (ft-kips)
1	1,4D	25.053	---	-2,8	---	-2,8
2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	24.795	---	-27,4	---	-27,4
3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	22.903	---	-10,2	---	-10,2
4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	21.908	1,38	-1,2	164,0	225,1
5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	21.908	1,38	-1,2	-164,0	-227,5
6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	22.605	1,39	-5,1	328,0	451,4
7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	22.605	1,39	-5,1	-328,0	-461,6
8	0,9D + 1,6W	16.106	1,25	-0,9	328,0	409,4
9	0,9D - 1,6W	16.106	1,25	-0,9	-328,0	-411,2

$$U = 1,2D + 1,6L_r \pm 0,8W$$

$$\delta_s = 1,38 \text{ (del punto 3(c))}$$

- Para deformación lateral de norte a sur (combinación de cargas No. 4):

$$\delta_s M_{2s} = 1,38 \times 164,0 = 226,3 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = -1,2 + 226,3 = 225,1 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 1332,6 \text{ kips}$$

- Para deformación lateral de sur a norte (combinación de cargas No. 5):

$$\delta_s M_{2s} = 1,38 \times (-164,0) = -226,3 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = -1,2 - 226,3 = -227,5 \text{ ft-kips}$$

$$P_u = 1333,0 \text{ kips}$$

En la siguiente tabla se presenta un resumen de los momentos amplificados para la columna C2 para todas las combinaciones de cargas.

No.	Combinación de Cargas	P _u (kips)	10.13.4.2		10.13.4.3	
			δ _s	M ₂ (ft-kips)	δ _s	M ₂ (ft-kips)
1	1,4D	1522,6	---	-2,8	---	-2,8
2	1,2D + 1,6L + 0,5L _r	1529,0	---	-27,4	---	-27,4
3	1,2D + 0,5L + 1,6L _r	1400,1	---	-10,2	---	-10,2
4	1,2D + 1,6L _r + 0,8W	1332,6	1,14	185,8	1,38	225,1
5	1,2D + 1,6L _r - 0,8W	1333,0	1,14	-188,2	1,38	-227,5
6	1,2D + 0,5L + 0,5L _r + 1,6W	1380,5	1,14	368,8	1,39	451,4
7	1,2D + 0,5L + 0,5L _r - 1,6W	1381,5	1,14	-379,6	1,39	-461,6
8	0,9D + 1,6W	978,4	1,10	358,6	1,25	409,4
9	0,9D - 1,6W	979,3	1,10	-360,4	1,25	-411,2

4. Determinar la armadura requerida.

Para la columna de 24 × 24 in., intentar con 8 barras No. 8.

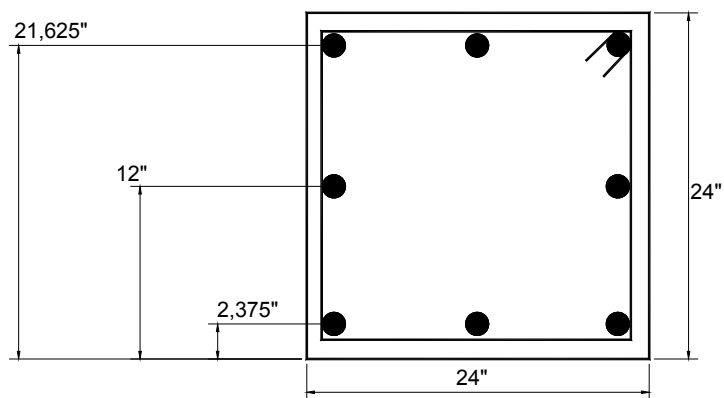
Determinar la máxima fuerza de compresión axial admisible, $\phi P_{n,max}$:

$$\phi P_{n,max} = 0,80\phi \left[0,85f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad \text{Ec. (10-2)}$$

$$= (0,80 \times 0,65) \left[(0,85 \times 6) (24^2 - 6,32) + (60 \times 6,32) \right]$$

$$= 1708 \text{ kips} > P_u \text{ máx.} = 1529,0 \text{ kips} \quad \text{VERIFICA}$$

La siguiente tabla contiene los resultados obtenidos de un análisis de compatibilidad de las deformaciones; las deformaciones de compresión se consideran positivas (ver Partes 6 y 7). Usar $M_u = M_2$ del método P - Δ aproximado de 10.13.4.2.



No.	P _u (kips)	M _u (ft-kips)	c (in.)	ε _t	φ	φP _n (kips)	φM _n (ft-kips)
1	1522,6	-2,8	23,30	0,00022	0,65	1.522,6	438,1
2	1529,0	-27,4	23,39	0,00023	0,65	1.529,0	435,3
3	1400,1	-10,2	21,49	-0,00002	0,65	1.400,1	489,7
4	1332,6	185,8	20,50	-0,00016	0,65	1.332,6	513,3
5	1333,0	-188,2	20,51	-0,00016	0,65	1.333,0	513,1
6	1380,5	368,8	21,20	-0,00006	0,65	1.380,5	496,9
7	1381,5	-379,0	21,22	-0,00005	0,65	1.381,5	496,4
8	978,4	358,6	15,52	-0,00118	0,65	978,4	587,1
9	979,3	-360,4	15,46	-0,00120	0,65	979,3	587,5

Por lo tanto, como $\phi M_n > M_u$ para cualquier $\phi P_n = P_u$, usar una columna cuadrada de 24×24 in. con 8 barras No. 8 ($\rho_g = 1,1\%$). Esta misma armadura es adecuada para las combinaciones de cargas del método del factor de amplificación de momentos de 10.13.4.3.

5. Determinar si el máximo momento ocurre en los extremos de la columna o en un punto ubicado entre los extremos (10.13.5).

Para la columna C1:

$$\frac{\ell_u}{r} = \frac{13,33 \times 12}{0,3 \times 22} = 24,2 < \frac{35}{\sqrt{\frac{871,4}{6 \times 22^2}}} = 63,9 \quad \text{Ec. (10-19)}$$

Para la columna C2:

$$\frac{\ell_u}{r} = \frac{13,33 \times 12}{0,3 \times 24} = 22,2 < \frac{35}{\sqrt{\frac{1529,0}{6 \times 24^2}}} = 52,6$$

Por lo tanto, para las columnas C1 y C2, el máximo ocurre en uno de los extremos, y no es necesario amplificar el momento M_2 aplicando δ_{ns} .

6. Verificar la inestabilidad por desplazamiento lateral de la estructura. 10.13.6

- a. Si $\delta_s M_s$ se calcula en base a 10.13.4.2, el valor de Q evaluado usando las cargas gravitatorias mayoradas no debe ser mayor que 0,60. Observar que para verificar la estabilidad todos los momentos de inercia se deben dividir por $(1 + \beta_d)$ (ver 10.11.1), siendo para este piso:

$$\beta_d = \frac{\text{Máxima carga axial de larga duración mayorada}}{\text{Máxima carga axial mayorada}}$$

$$= \frac{\sum 1,4 P_D}{\sum P_u} = \frac{1,4 \times 17.895}{(1,4 \times 17.895) + (1,7 \times 2261)} = 0,87$$

$$1 + \beta_d = 1,87$$

Dividir todos los momentos de inercia por $(1 + \beta_d)$ equivale a aumentar las deformaciones laterales, y por lo tanto Q, en $(1 + \beta_d)$. En consecuencia, al nivel del segundo piso:

$$Q = 1,87 \times 0,12 = 0,22 < 0,60$$

Por lo tanto, la estructura es estable en este nivel. De hecho, si se calcula Q modificado en cada nivel de piso se puede ver que toda la estructura es estable.

- b. Si $\delta_s M_s$ se calcula en base a 10.13.4.3, el valor de δ_s calculado usando $\sum P_u$ y $\sum P_c$ correspondientes a las cargas permanentes y sobrecargas mayoradas debe ser positivo y no mayor que 2,5. Para verificar la estabilidad, El se debe dividir por $(1 + \beta_d)$. En consecuencia, los valores de P_c se deben volver a calcular considerando los efectos de β_d .

$$\sum P_c = \frac{107.076}{1 + 0,87} = 57.260 \text{ kips}$$

$$\text{y } \delta_s = \frac{1}{1 - \frac{(1,4 \times 17.895) + (1,7 \times 2261)}{0,75 \times 57.260}} = 3,1 > 2,5$$

La estructura es inestable cuando se utiliza el método del factor de amplificación de momentos de 10.13.4.3.