

10

Flechas

ACTUALIZACIÓN PARA EL CÓDIGO 2002

La edición 2002 de ACI 318 amplía la sección 9.5.4 para las flechas de los elementos de hormigón pretensado. Específicamente, las secciones 9.5.4.2 y 9.5.4.3 existentes se renumeraron como 9.5.4.3 y 9.5.4.4 para permitir la introducción de una nueva sección 9.5.4.2. La nueva sección trata el cálculo de las flechas de los elementos de hormigón pretensado fisurados y en la región de transición (Clase C y Clase T), según lo definido en 18.3.3. El cálculo se puede basar ya sea en una relación momento-curvatura bilineal o bien en el tradicional momento de inercia efectivo.

CONSIDERACIONES GENERALES

Los requisitos del Código ACI para control de las flechas se ocupan exclusivamente de las flechas que ocurren bajo niveles de carga de servicio en condiciones estáticas, y pueden no ser aplicables a las cargas que presentan fuertes características dinámicas tales como aquellas provocadas por movimientos sísmicos, vientos transitorios y la vibración de maquinarias. Debido a la variabilidad de las deformaciones estructurales del hormigón, los diseñadores no deben confiar indebidamente en las estimaciones de las flechas obtenidas mediante cálculo. En la mayoría de los casos se justifica el uso de procedimientos relativamente simples para estimar las flechas. En las Referencias 10.1 y 10.2 se discute en profundidad el tema del control de las flechas, incluyendo métodos más refinados para calcular las deformaciones.

9.5 CONTROL DE LAS FLECHAS

El código presenta dos métodos para controlar las flechas en los elementos armados en una y dos direcciones solicitados a flexión. Las flechas se pueden controlar de forma directa limitando las flechas calculadas [ver Tabla 9.5(b)], o de manera indirecta por medio de alturas o espesores mínimos [Tabla 9.5(a) para sistemas armados en una dirección, y Tabla 9.5(c) y Ecuaciones (9-12) y (9-13) para sistemas armados en dos direcciones].

9.5.2.1 Altura o espesor mínimo para vigas y losas armadas en una dirección (no pretensadas) – Las flechas de las vigas y losas armadas en una dirección que soportan las cargas habituales en las construcciones generalmente serán satisfactorias cuando se satisfagan las alturas o espesores mínimos indicados en la Tabla 9.5(a) (reproducidos en la Tabla 10-1).

El diseñador debe observar que este requisito sólo se aplica a elementos que **no** soportan, ni están unidos a, tabiques divisorios u otros elementos susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas. Para todos los demás elementos es necesario calcular las flechas.

9.5.2.2 Flechas instantáneas de vigas y losas armadas en una dirección (no pretensadas) – Las flechas iniciales o instantáneas de las vigas y losas armadas en una dirección ocurren inmediatamente después que se aplica carga a un elemento estructural. Los principales factores que afectan la flecha instantánea de un elemento son (ver Referencia 10.3):

- a. la magnitud y la distribución de la carga,
- b. la luz y las condiciones de vínculo,
- c. las propiedades de la sección y la cuantía de acero,
- d. las propiedades de los materiales, y
- e. la cantidad y extensión de la fisuración por flexión.

*Tabla 10-1 – Altura o espesor mínimo para vigas y losas armadas en una dirección (no pretensadas)
(Armadura Grado 60, hormigón de peso normal)*

Elementos	Altura o espesor mínimo, h			En voladizo
	Simplemente apoyados	Con un extremo continuo	Con ambos extremos continuos	
Losas armadas en una dirección	$\ell/20$	$\ell/24$	$\ell/28$	$\ell/10$
Vigas	$\ell/16$	$\ell/18,5$	$\ell/21$	$\ell/8$

- (1) Para $f_y \neq 60.000$ psi, los valores tabulados se deben multiplicar por $(0,4 + f_y/100.000)$. Por ejemplo, para armadura grado 40, los valores se deben multiplicar por 0,80.
- (2) Para hormigón liviano estructural, los valores de la tabla se deben multiplicar por $(1,65 - 0,005w_c)$, valor que no debe ser menor que 1,09; w_c es el peso unitario en libras por pie cúbico.

Las siguientes propiedades del hormigón afectan significativamente el comportamiento de los elementos armados solicitados a flexión bajo cargas de corta duración: resistencia a la compresión (f'_c), módulo de elasticidad (E_c) y módulo de rotura (f_r). El módulo de elasticidad en particular evidencia más variación en función de la calidad del hormigón, la edad del hormigón, el nivel de tensión, y la velocidad de aplicación o la duración de las cargas.

En la Figura 10-1 se ilustra la flecha instantánea idealizada de una típica viga de hormigón armado. Hay dos fases de comportamiento claramente identificables: (i) comportamiento no fisurado, cuando el momento aplicado (M_a) es menor que el momento de fisuración (M_{cr}); y (ii) comportamiento fisurado, cuando el momento aplicado (M_a) es mayor que el momento de fisuración (M_{cr}). Por lo tanto, para calcular las flechas se deberían utilizar dos valores diferentes del momento de inercia: el momento de inercia de la sección bruta de hormigón (I_g) para la sección no fisurada, y el momento de inercia reducido para la sección fisurada (I_{cr}).

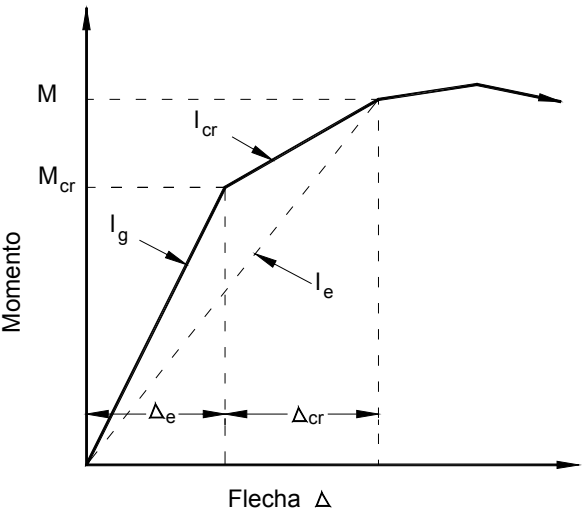


Figura 10-1 – Relación bilineal Momento-Curvatura^{10.4}

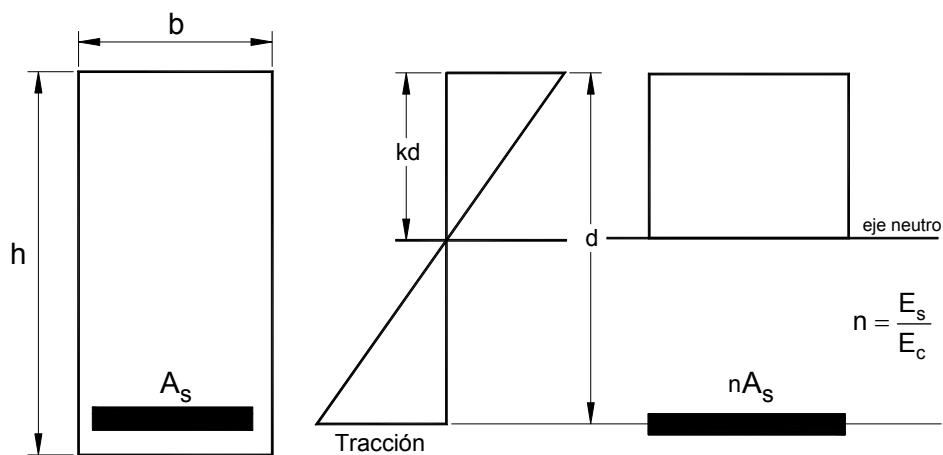


Figura 10-2 – Sección fisurada transformada de una viga con armadura de tracción

Para la viga rectangular no fisurada ilustrada en la Figura 10-2, se utiliza el momento de inercia de la sección bruta de hormigón ($I_g = bh^3/12$). El momento de inercia de una viga fisurada con armadura de tracción (I_{cr}) se calcula de la siguiente manera:

Tomando el momento de las áreas respecto del eje neutro,

$$b \times kd \times \frac{kd}{2} = nA_s (d - kd)$$

usar $B = \frac{b}{nA_s}$

$$kd = \frac{\sqrt{2Bd + 1} - 1}{B}$$

Momento de inercia de la sección fisurada respecto del eje neutro,

$$I_{cr} = \frac{b(kd)^3}{3} + nA_s (d - kd)^2$$

Las expresiones para calcular el momento de inercia de la sección fisurada para secciones que tienen armadura de compresión y para secciones tipo Te son similares. Estas expresiones se indican en la Tabla 10-2.

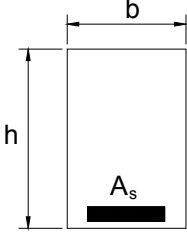
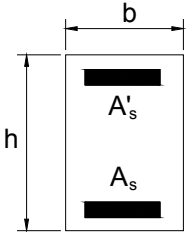
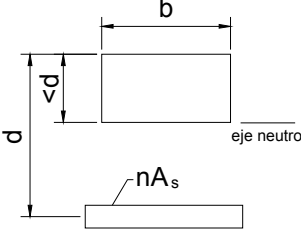
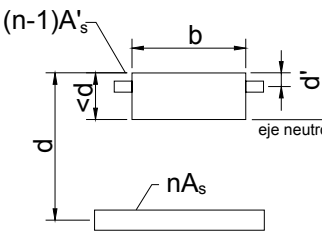
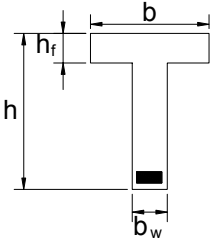
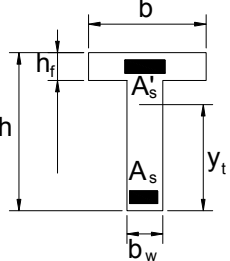
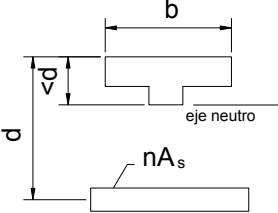
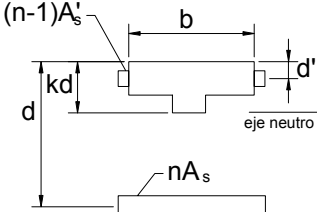
9.5.2.3, 9.5.2.4 Momento de inercia efectivo para vigas y losas armadas en una dirección (no pretensadas) – La rigidez flexional EI de una viga puede no ser constante en toda su longitud, ya que en diferentes secciones puede haber diferentes cantidades de acero y fisuración. Por este y otros factores relacionados con los materiales que constituyen fuentes de variabilidad, es muy difícil predecir con exactitud las flechas que ocurrirán en la práctica.

El momento de inercia efectivo de voladizos, vigas simples y vigas continuas entre puntos de inflexión está dado por:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g \quad \text{Ec. (9-8)}$$

donde $M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad \text{Ec. (9-9)}$

Tabla 10-2 – Momento de inercia de la sección bruta y de la sección fisurada para secciones rectangulares y con alas

Sección bruta	Sección fisurada transformada	Momento de inercia de la sección bruta y de la sección fisurada
 	<p>Sin armadura de compresión</p>  <p>Con armadura de compresión</p> 	$n = \frac{E_s}{E_c}$ $B = \frac{b}{(nA_s)}$ $I_g = \frac{bh^3}{12}$ <p>Sin armadura de compresión:</p> $kd = \left(\sqrt{2dB + 1} - 1 \right) / B$ $I_{cr} = b(kd)^3 / 3 + nA_s(d - kd)^2$ <p>Con armadura de compresión:</p> $r = (n - 1)A'_s / (nA_s)$ $kd = \left[\sqrt{2dB + (1 + rd'/d) + (1 + r)^2} - (1 + r) \right] / B$ $I_{cr} = b(kd)^3 / 3 + nA_s(d - kd)^2 + (n - 1)A'_s(kd - d')^2$
 	<p>Sin armadura de compresión</p>  <p>Con armadura de compresión</p> 	$n = \frac{E_s}{E_c}$ $C = b_w / (nA_s) \quad f = h_f(b - b_w) / (nA_s)$ $y_t = h - 1/2 \left[(b - b_w)h_f^2 + b_w h^2 \right] / \left[(b - b_w)h_f + b_w h \right]$ $I_g = (b - b_w)h_f^3 / 12 + b_w h^3 / 12 + (b - b_w)h_f(h - h_f/2 - y_t)^2 + b_w h(y_t - h/2)^2$ <p>Sin armadura de compresión:</p> $kd = \left[\sqrt{C(2d + h_f f) + (1 + f)^2} - (1 + f) \right] / C$ $I_{cr} = (b - b_w)h_f^3 / 12 + b_w(kd)^3 / 3 + (b - b_w)h_f(kd - h_f/2)^2 + nA_s(d - kd)^2$ <p>Con armadura de compresión:</p> $kd = \left[\sqrt{C(2d + h_f f + 2rd') + (f + r + 1)^2} - (f + r + 1) \right] / C$ $I_{cr} = (b - b_w)h_f^3 / 12 + b_w(kd)^3 / 3 + (b - b_w)h_f(kd - h_f/2)^2 + nA_s(d - kd)^2 + (n - 1)A'_s(kd - d')^2$

M_a = momento máximo bajo carga de servicio (no mayorado) para la etapa en que se calculan las flechas

$$f_r = 7,5\sqrt{f'_c} \text{ para hormigón de peso normal} \quad \text{Ec. (9-10)}$$

Para hormigón liviano f_r se debe modificar de acuerdo con 9.5.2.3.

El momento de inercia efectivo I_e proporciona una transición entre los límites superiores e inferiores de I_g e I_{cr} en función del nivel de fisuración representado por M_a/M_{cr} . La ecuación considera empíricamente el efecto de la rigidización por tracción – la contribución del hormigón no fisurado entre las fisuras ubicadas en las regiones donde las tensiones de tracción son bajas.

Para cada combinación de cargas considerada, como por ejemplo carga permanente o carga permanente más sobrecarga, las flechas se deberían calcular usando un momento de inercia efectivo [Ecuación (9-8)] calculado con el momento bajo cargas de servicio que corresponda, M_a . Luego la flecha adicional provocada por la adición de una carga, como por ejemplo la sobrecarga, se calcula como la diferencia entre las flechas determinadas para dos combinaciones de cargas cualesquiera.

Para los elementos de sección prismática (incluyendo las vigas Te con diferentes secciones fisuradas en las regiones de momento positivo y negativo), I_e se puede determinar en la sección de apoyo para los voladizos y en la sección correspondiente al centro del tramo para los tramos simples y continuos. Para elementos prismáticos continuos, la utilización de las propiedades correspondientes a la sección del centro del tramo se considera satisfactoria para los cálculos aproximados, fundamentalmente porque la rigidez en el centro del tramo tiene un efecto determinante sobre las flechas. Alternativamente, para los elementos continuos prismáticos y no prismáticos, 9.5.2.4 sugiere utilizar el I_e promedio en las secciones críticas de momentos positivo y negativo. El comentario de la sección 9.5.2.4 de la edición de 1983 sugería que era posible obtener resultados mejorados aplicando el siguiente enfoque:

Vigas con un extremo continuo:

$$I_e \text{ promedio} = 0,85 I_m + 0,15 (I_{\text{extremo cont.}}) \quad (1)$$

Vigas con ambos extremos continuos:

$$I_e \text{ promedio} = 0,70 I_m + 0,15 (I_{e1} + I_{e2}) \quad (2)$$

donde I_m se refiere a la sección correspondiente al centro del tramo

I_{e1} e I_{e2} se refieren al I_e en los respectivos extremos de la viga.

Las envolventes de los momentos basados en los coeficientes de momento aproximado de 8.3.3 son lo suficientemente precisas como para utilizarlas para calcular valores de I_e tanto positivos como negativos (ver Ejemplo 10.2). Para el caso de una única carga concentrada muy elevada, sólo se debería utilizar el valor de I_e correspondiente al centro del tramo.

La flecha inicial o instantánea (Δ_i) para voladizos y vigas simples y continuas se puede calcular usando la siguiente ecuación elástica dada en el comentario de la sección 9.5.2.4 de 1983. Para las vigas continuas, generalmente la flecha en el centro del tramo se puede usar como una aproximación de la flecha máxima.

$$\Delta_i = K(5/48)M_a \ell^2 / E_c I_e \quad (3)$$

donde M_a es el momento en el apoyo para voladizos y el momento en el centro del tramo (cuando K así se define) para vigas simples y continuas.

ℓ es la luz según se define en 8.7.

En la Tabla 10-3 se indican los valores teóricos del coeficiente K para calcular las flecha para cargas uniformemente distribuidas w.

Debido a que, para un determinado tramo continuo, las flechas lógicamente se calculan en base al mismo caso de carga que para máximo momento positivo, se cree que la Ecuación (3) tiene la forma más conveniente que puede tener una ecuación para cálculo de las flechas.

Tabla 10-3 – Coeficiente K para determinar las flechas

	K
1. Voladizos (no incluye la flecha debida a la rotación en los apoyos)	2,40
2. Vigas simples	1,0
3. Vigas continuas	$1,2-0,2M_o/M_a$
4. Vigas con un extremo fijo y otro articulado (flecha en el centro del tramo)	0,80
5. Vigas con un extremo fijo y otro articulado (máxima flecha usando el máximo momento)	0,74
6. Vigas con ambos extremos fijos	0,60
La Referencia 8.2 contiene valores de K correspondientes a otros tipos de cargas.	
$M_o = \text{Momento en el centro de un tramo simple} \left(\frac{w\ell^2}{8} \right)$	
$M_a = \text{Momento neto en el centro del tramo}$	

9.5.2.5 Flechas a largo plazo de vigas y losas armadas en una dirección (no pretensadas) – Las vigas y losas armadas en una dirección sujetas a cargas de larga duración sufren flechas a largo plazo. Estas flechas pueden ser dos o tres veces mayores que la flecha elástica instantánea que ocurre al aplicar la carga. La flecha a largo plazo es provocada por los efectos de la contracción y la fluencia lenta, la formación de nuevas fisuras, y el ensanchamiento de las fisuras existentes. Los principales factores que afectan las flechas a largo plazo son (ver Referencia 10.3):

- las tensiones en el hormigón
- la cantidad de armadura de tracción y de compresión
- las dimensiones del elemento
- las condiciones de curado
- la temperatura
- la humedad relativa
- la edad del hormigón en el momento de aplicación de la carga
- la duración de la carga

Los efectos de la contracción y la fluencia lenta se deben estimar, ya que la distribución de las deformaciones y tensiones es variable en la altura y la longitud de la viga. Las propiedades de la sección (resistencia, módulo de elasticidad, contracción y fluencia lenta) también varían según la composición de la mezcla, las condiciones de curado y la edad. A continuación se presentan dos métodos aproximados para estimar la flecha a largo plazo.

Método de ACI 318

De acuerdo con la sección 9.5.2.5, la flecha adicional a largo plazo debida a los efectos combinados de la contracción y la fluencia lenta provocada por las cargas de larga duración, $\Delta_{(cp+sh)}$, se puede estimar multiplicando la flecha instantánea provocada por la carga sostenida o de larga duración, $(\Delta_i)_{\text{sos}}$ por el factor λ , es decir: ¹

¹ El subíndice *cp* se refiere a fluencia lenta; el subíndice *sh* se refiere a contracción.

$$\Delta_{(cp+sh)} = \lambda (\Delta_i)_{\text{sos}} \quad (4)$$

donde $\lambda = \frac{\xi}{1+50\rho'}$ Ec. (9-11)

En la Tabla 10-4 se dan valores de ξ para diferentes duraciones de la carga. La Figura R9.5.2.5 del comentario del código muestra la variación de ξ para períodos de hasta cinco años. La cuantía de armadura comprimida $\rho' = A'_s / bd$ se calcula en la sección del apoyo para los voladizos y en el centro de la luz para los tramos simples y continuos. Observar que las cargas a largo plazo incluyen las cargas permanentes y la parte de la sobrecarga que es sostenida o de larga duración. Ver R9.5.1.

Tabla 10-4 – Factor ξ en función del tiempo (9.5.2.5)

Duración de la carga sostenida	ξ
5 años o más	2,0
12 meses	1,4
6 meses	1,2
3 meses	1,0

Método alternativo

Alternativamente, las flechas por fluencia lenta y contracción se pueden calcular independientemente usando las siguientes expresiones tomadas de las Referencias 10.2, 10.5 y 10.6. El procedimiento se resume en la Sección 2.6.2 de la Referencia 10.4.

$$\Delta_{cp} = \lambda_{cp} (\Delta_i)_{\text{sos}} \quad (5)$$

$$\Delta_{sh} = K_{sh} \phi_{sh} \ell^2 \quad (6)$$

donde

$$\lambda_{cp} = k_r c_t;$$

$$k_r = 0,85 / (1+50\rho')$$

C_t = coeficiente de fluencia lenta dependiente del tiempo (Tabla 2.1 o Ecuación 2.7 de la Referencia 10.4)

K_{sh} = constante para determinar la flecha por contracción (Tabla 10-5)

$$\phi_{sh} = A_{sh} (\epsilon_{sh})_t / h$$

A_{sh} = multiplicador para la flecha por contracción (Figura 10-3 o Ecuación 6.1 siguiente)

$(\epsilon_{sh})_t$ = deformación específica por contracción dependiente del tiempo (Tabla 2.1 o Ecuaciones 2.8 y 2.9 de la Referencia 10.4)

ℓ = longitud de tramo de la viga

h = altura de la viga

El valor último del coeficiente de fluencia lenta C_t , denominado C_u , depende de los factores listados anteriormente (a-h). De manera similar, el valor último de la deformación específica por contracción depende del tiempo depende de las condiciones variables, y se denomina $(\epsilon_{sh})_u$. En la Sección 2.3.4 de ACI 435 (Ref. 10.4) se discuten los valores típicos de estas dos propiedades.

De acuerdo con la Referencia 10.4, el valor último del coeficiente de fluencia lenta depende de seis factores:

- la humedad relativa
- la edad del hormigón en el momento de aplicación de la carga
- la mínima dimensión del elemento
- la consistencia del hormigón
- el contenido de agregado fino
- el contenido de aire

Para estas seis variables las condiciones normales son humedad relativa de 40%, 3 días (curado al vapor) o 7 días (curado húmedo), mínima dimensión igual a 6 in., 3 in. de asentamiento, 50% de agregado fino y 6% de contenido de aire. Para el caso de condiciones normales, C_u es igual a 2,35. La Figura 2.1 de la Referencia 10.4 presenta factores de corrección que se pueden utilizar para ajustar el valor de C_u para condiciones que difieren de las que se consideran normales.

En las construcciones habituales es probable que dos de las condiciones difieran de las normales, es decir, que la humedad relativa sea de 70% y que las cargas se apliquen a una edad de 20 días. El factor de corrección para la humedad relativa está dado por:

$$K_h^c = 1,27 - 0,0067 H$$

donde H es la humedad relativa expresada como porcentaje. Para el caso de una humedad relativa de 70%,

$$K_h^c = 1,27 - 0,0067 (70) = 0,80$$

El factor de corrección que considera la edad del hormigón en el momento de aplicación de la carga está dado por las dos expresiones siguientes, para condiciones de curado al vapor y curado húmedo, respectivamente:

$$K_{to}^c = 1,13 \left(t^{-0,095} \right) \quad (\text{Curado al vapor})$$

$$K_{to}^c = 1,25 \left(t^{-0,118} \right) \quad (\text{Curado húmedo})$$

donde t es la edad del hormigón en el momento de la aplicación de la carga, en días. Para t = 20 días las dos ecuaciones dan por resultado 0,85 y 0,88 respectivamente. El promedio es 0,865.

Si se asume que todas las demás condiciones permanecen constantes, de acuerdo con la metodología indicada, el valor último del coeficiente de fluencia lenta para una humedad relativa de 70% y cargas aplicadas a los 20 días se convierte en:

$$C_u = (0,80)(0,865)(2,35) = 1,63$$

A título de comparación, el valor de C_u sugerido en la edición 1978 de ACI 435, en base a una humedad relativa de 70%, aplicación de la carga a los 20 días y dimensión mínima de 6 in. (caso normal) era $C_u = 1,60$.

También se puede evaluar el valor último de la deformación específica por fluencia lenta. La Referencia 10.4 sostiene que $(\epsilon_{sh})_u$ depende de un conjunto de factores similares a los que afectan el valor último del coeficiente de fluencia lenta. En particular, las cinco condiciones y sus valores normales son los siguientes:

- humedad relativa – 40%
- mínima dimensión del elemento – 6 in.
- contenido de agregado fino – 50%

- d. contenido de cemento – 1200 kg/m³
- e. contenido de aire – 6%

Para las condiciones normales, la deformación específica por contracción última es 780×10^{-6} . Manteniendo todas las demás condiciones aplicables iguales a las usadas para evaluar la fluencia lenta última y usando un factor de cemento de 6 bolsas por yarda cúbica (335 kg/m³), calculando los factores de corrección adecuados se obtiene:

$$K_h^s = 1,4 - 0,01H = 1,4 - (0,01)(70) = 0,70 \quad (\text{humedad relativa})$$

$$K_b^s = 0,75 + 0,000214B = 0,75 + (0,000214)(335) = 0,82 \quad (\text{contenido de cemento})$$

Aplicando el producto de los dos factores de corrección al valor normal se obtiene:

$$(\epsilon_{sh})_u = (0,70)(0,82)(780 \times 10^{-6}) = 448 \times 10^{-6}$$

Este valor es comparable con el valor de 400×10^{-6} sugerido en la edición 1978 de ACI 435.

En resumen, se puede obtener una estimación de los valores de C_u y $(\epsilon_{sh})_u$ para elementos no pretensados solicitados a flexión utilizando la metodología presentada en la Sección 2.3.4 de la Referencia 10.4.

Una vez determinados los valores últimos para fluencia lenta y contracción, se pueden estimar las relaciones entre estos valores últimos y los valores a edades más tempranas usando las Ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 de ACI 435R^{10.4}. A continuación se reproducen estas expresiones:

$$C_t = \left(\frac{t^{0,6}}{10 + t^{0,6}} \right) C_u \quad \text{Ec. (2.7) de ACI 435R}$$

donde t representa el tiempo, en días, luego de la aplicación de la carga.

Para hormigón curado en húmedo, la relación de la contracción es:

$$(\epsilon_{sh})_t = \left(\frac{t}{35 + t} \right) (\epsilon_{sh})_u \quad \text{Ec. (2.8) de ACI 435R}$$

(t se expresa en días menos 7 luego de la colocación)

y para hormigón curado al vapor:

$$(\epsilon_{sh})_t = \left(\frac{t}{55 + t} \right) (\epsilon_{sh})_u \quad \text{Ec. (2.9) de ACI 435R}$$

(t se expresa en días menos 3 luego de la colocación)

Comparando los valores de los coeficientes de fluencia lenta y las deformaciones por contracción dependientes del tiempo dados en la Tabla 2.1 de ACI 435R con los valores obtenidos con las Ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 se puede ver que los valores obtenidos mediante ambos métodos son ligeramente diferentes, en particular para los valores de tiempo, t, menos elevados. Debido a que el cálculo de las flechas de las estructuras de hormigón implica un grado de aproximación considerable, es aceptable utilizar tanto los valores dependientes del tiempo obtenidos de la tabla como los obtenidos de las ecuaciones.

A_{sh} se puede tomar directamente de la Figura 10-3, o bien se puede calcular usando el siguiente conjunto de ecuaciones tomadas de la Sección 2.6.2 de ACI 435:

$$\begin{aligned}
 A_{sh} &= 0,7 \cdot (\rho - \rho')^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} && \text{para } \rho - \rho' \leq 3,0 \\
 &= 0,7 \cdot \rho^{\frac{1}{3}} && \text{para } \rho' = 0 \\
 &= 1,0 && \text{para } \rho - \rho' \geq 3,0
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

En las ecuaciones anteriores, tanto ρ como ρ' se expresan en porcentaje, no en forma de fracción decimal como es habitual. Para determinar A_{sh} usando la Figura 10-3, las cuantías también se deben expresar en porcentaje.

En la Tabla 10-5 se dan valores del coeficiente para determinar las flechas por contracción K_{sh} , suponiendo curvaturas de contracción positiva y negativa iguales y un punto de inflexión en el punto correspondiente a un cuarto de la longitud de los tramos continuos, lo cual generalmente es satisfactorio para el cálculo de las flechas.

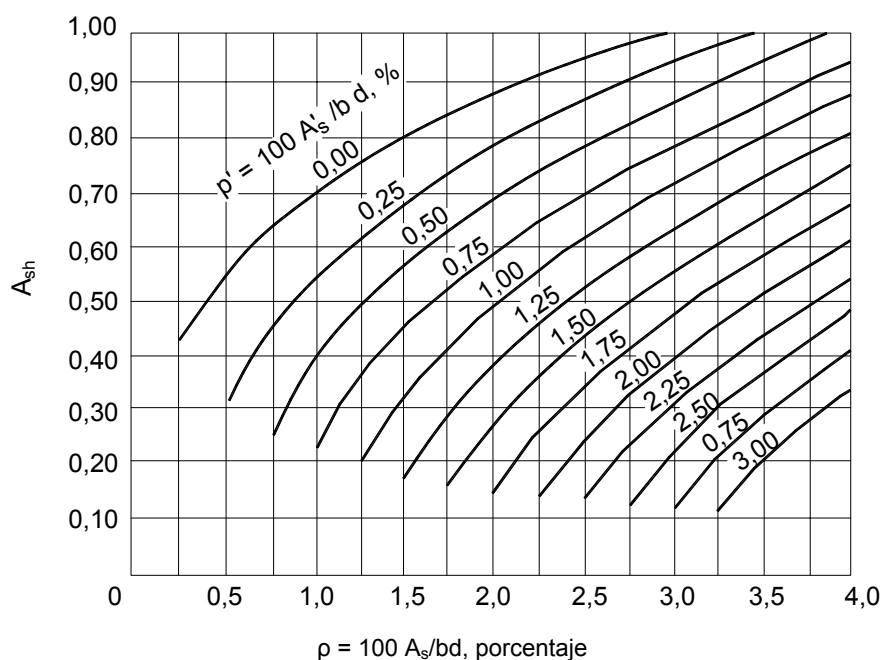


Figura 10-3 – Valores de A_{sh} para calcular las flechas por contracción

Tabla 10-5 – Coeficiente para calcular las flechas por contracción, K_{sh}

	K_{sh}
Voladizos	0,50
Tramos simples	0,13
Tramos con un extremo continuo – Vigas de múltiples tramos	0,09
Tramos con un extremo continuo – Vigas de dos tramos	0,08
Tramos con ambos extremos continuos	0,07

Las cuantías de armadura ρ y ρ' usadas para determinar A_{sh} usando la Figura 10-3 se refieren a la sección del apoyo de los voladizos y a la sección del centro del tramo de las vigas simples y continuas. Para las vigas Te, usar $\rho = 100 (\rho + \rho_w)/2$ y un cálculo similar para cualquier armadura de compresión ρ' al determinar A_{sh} , siendo $\rho_w = A_s/b_w d$. Ver el Ejemplo 10.2.

En cuanto a optar por calcular las flechas por fluencia lenta y contracción usando la Ecuación (9-11) o calcularlas independientemente usando las Ecuaciones (5) y (6), el cálculo combinado de ACI es más simple pero a la vez proporciona apenas una aproximación gruesa, ya que las flechas sólo se relacionan indirectamente con las cargas (fundamentalmente por medio del contenido de acero). Un caso en el cual puede ser preferible calcular las flechas por fluencia lenta y contracción de forma separada es cuando parte de la sobrecarga se considera como carga de larga duración.

Todos los procedimientos y propiedades para calcular las flechas por fluencia lenta y contracción se aplican tanto al hormigón de peso normal como al hormigón liviano.

9.5.2.6 Flechas máximas admisibles – Las flechas calculadas usando los métodos antes descritos se comparan con los límites dados en la Tabla 9.5(b). El comentario contiene información sobre la correcta aplicación de estos límites, incluyendo la consideración de las flechas que ocurren antes de instalar los tabiques divisorios.

9.5.3 Elementos armados en dos direcciones (no pretensados)

No es necesario calcular las flechas de los sistemas de losas armadas en dos direcciones con y sin vigas interiores, ábacos y capiteles de columnas si se satisfacen los requisitos de espesor mínimo de 9.5.3. Los requisitos de espesor mínimo incluyen los efectos de la ubicación de los paneles de losa (interiores o exteriores), la geometría de los paneles, la relación de luces, la presencia de vigas en los bordes de los paneles, columnas, capiteles y ábacos, y la tensión de fluencia del acero de la armadura.

Tabla 10-6 – Espesor mínimo de losas sin vigas interiores [Tabla 9.5(c)]

Tensión de fluencia, f_y psi*	Sin ábacos [†]			Sin ábacos [†]		
	Paneles exteriores		Paneles interiores	Paneles exteriores		Paneles interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde ^{††}		Sin vigas de borde	Con vigas de borde ^{††}	
40.000	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{40}$	$\frac{\ell_n}{40}$
60.000	$\frac{\ell_n}{30}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$
75.000	$\frac{\ell_n}{28}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{31}$	$\frac{\ell_n}{34}$	$\frac{\ell_n}{34}$

* Para valores de tensión de fluencia de la armadura comprendidos entre los valores indicados en la tabla, el espesor mínimo se deberá determinar por interpolación lineal.

† La definición de ábaco se da en 13.3.7.1 y 13.3.7.2.

†† Se refiere a losas con vigas entre las columnas a lo largo de los bordes exteriores. El valor de α para la viga de borde no deberá ser menor que 0,8.

La Sección 9.5.3.2 provee requisitos de espesor mínimo para losas armadas en dos direcciones sin vigas entre las columnas interiores (placas planas y losas planas). El espesor mínimo se determina directamente en función de la longitud de tramo usando la Tabla 9.5(c). Esta sección también provee valores mínimos para losas con y sin ábacos. Los valores indicados en la Tabla 9.5(c) representan el límite superior para los espesores de losa dados por las Ecuaciones (9-12) y (9-13). En la Figura 10-4 se ilustran los requisitos de espesor mínimo de 9.5.3.2.

La Sección 9.5.3.3 provee requisitos de espesor mínimo para losas armadas en dos direcciones apoyadas en vigas en todos sus lados. Se debe notar que estos requisitos se aplican exclusivamente a los sistemas armados en dos direcciones, es decir, a los sistemas en los cuales la relación entre el lado mayor y el lado menor no es mayor que 2. Para los paneles de losa que no satisfacen esta limitación las Ecuaciones (9-12) y (9-13) pueden conducir a resultados poco razonables. Para estos paneles se deberían utilizar los requisitos de la sección 9.5.2.

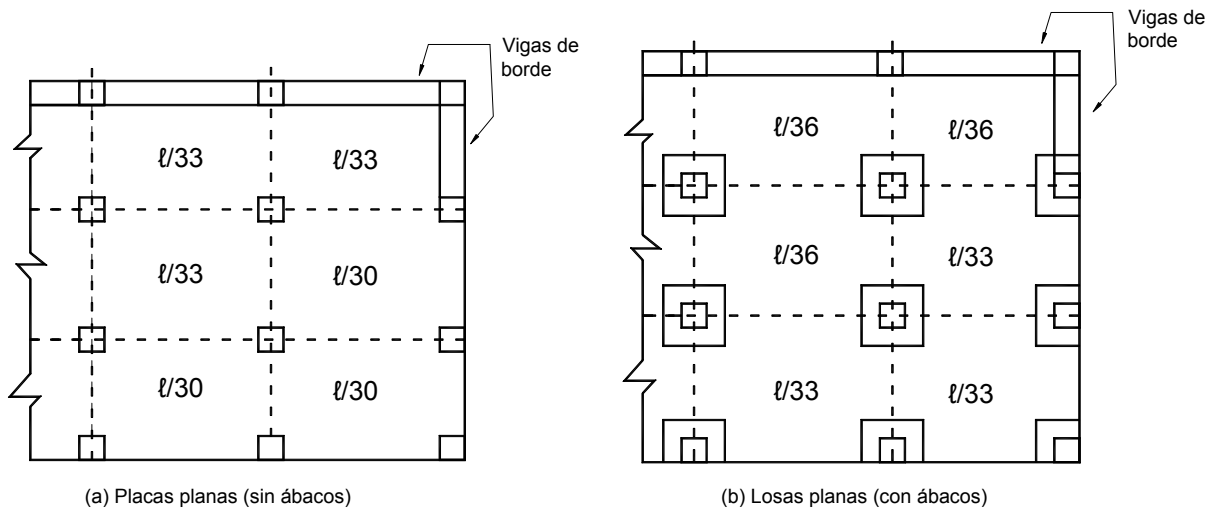


Figura 10-4 – Espesor mínimo de losas sin vigas interiores entre apoyos (Armadura Grado 60)

La Figura 10-5 se puede utilizar para simplificar el cálculo de los espesores mínimos para losas armadas en dos direcciones. En la Figura 10-5 se puede observar que la diferencia entre el espesor mínimo determinante para los paneles cuadrados y para los paneles rectangulares en los cuales la relación de lados es de 2 en 1 no es demasiado grande.

$$f = \left[\frac{36 + 5\beta(\alpha_m - 0,2)}{0,8 + f_y / 200.000} \right] \quad \text{Ec. (9-11)}$$

$$f = \left[\frac{36 + 9\beta}{0,8 + f_y / 200.000} \right] \quad \text{Ec. (9-12)}$$

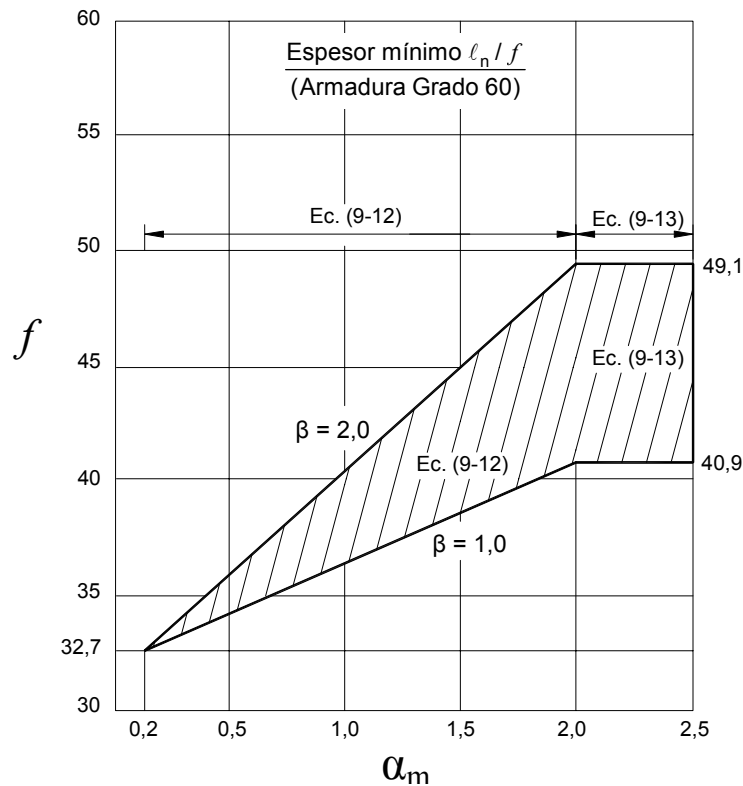


Figura 10-5 – Espesor mínimo para losas armadas en dos direcciones apoyadas en vigas en todos sus lados

9.5.3.4 Flechas de losas armadas en dos direcciones no pretensadas

Flecha inicial o instantánea: Hay un procedimiento aproximado^{10.2, 10.7} compatible con los Métodos de Diseño Directo y del Pórtico Equivalente del Capítulo 13 del Código que se puede usar para calcular la flecha inicial o instantánea de los sistemas armados en dos direcciones. El procedimiento es esencialmente igual que el usado para placas planas, losas planas y losas armadas en dos direcciones apoyadas en vigas en todos sus lados, luego de calcular las rigideces apropiadas. La flecha en el centro del panel se calcula como la sumatoria de la flecha en la mitad de la luz de la franja de columna o línea de columnas en una dirección, Δ_{cx} o Δ_{cy} , más la flecha en la mitad de la luz de la franja intermedia en la dirección ortogonal, Δ_{mx} o Δ_{my} (ver Fig. 10-6). La franja de columna es una franja que tiene un ancho, a cada lado del eje de la columna, igual a 1/4 de la menor dimensión del panel. La franja intermedia corresponde a la franja central del panel, limitada por dos franjas de columna.²

Para los paneles cuadrados,

$$\Delta = \Delta_{cx} + \Delta_{my} = \Delta_{cy} + \Delta_{mx} \quad (7)$$

Para los paneles rectangulares, o para aquellos paneles que tienen propiedades diferentes en ambas direcciones, se utiliza el promedio de la Δ en ambas direcciones:

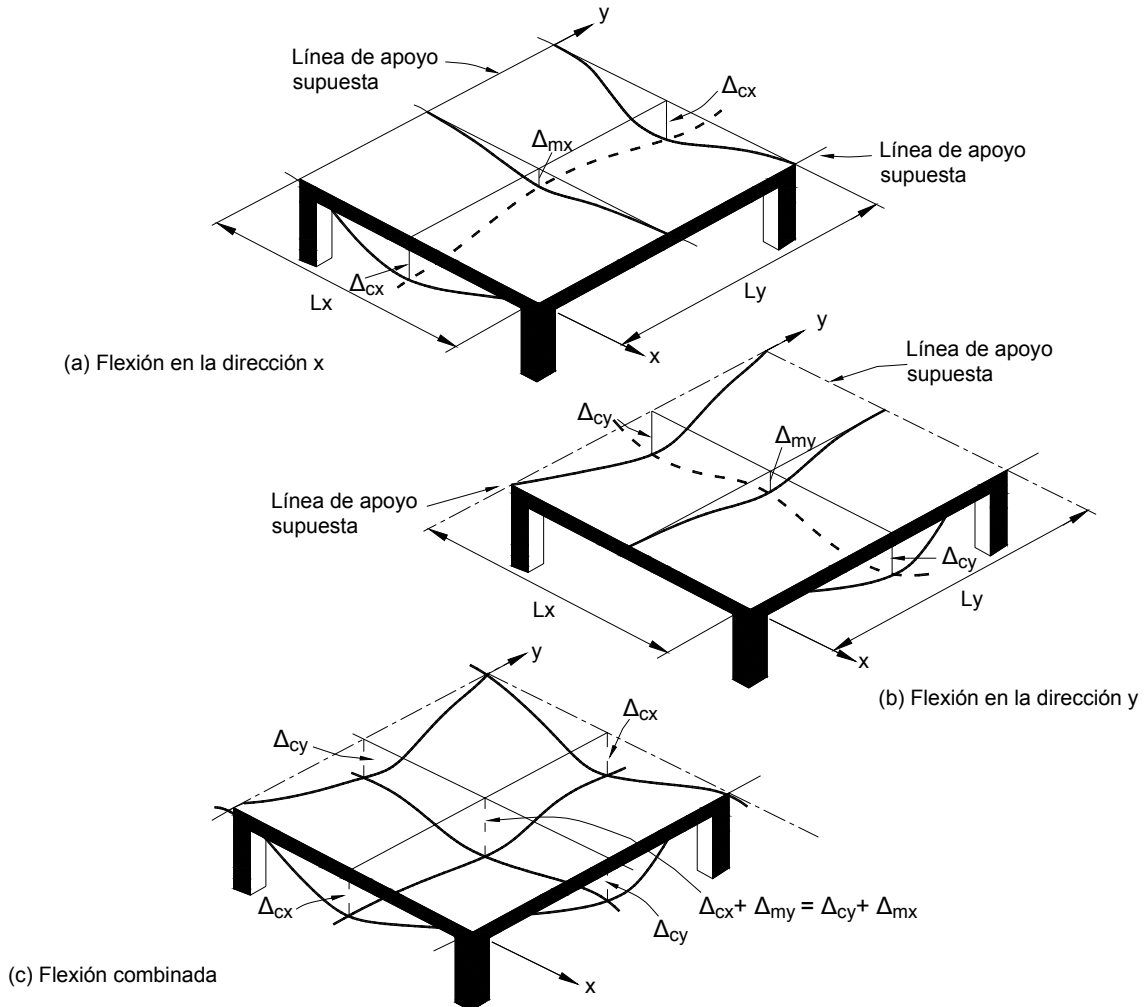


Figura 10-6 – Base del Método del Pórtico Equivalente para el análisis de las flechas de losas armadas en dos direcciones, con o sin vigas

² El subíndice *c* se refiere a las franjas de columna; el subíndice *m* se refiere a las franjas intermedias

$$\Delta = \left[(\Delta_{cx} + \Delta_{my}) + (\Delta_{cy} + \Delta_{mx}) \right] / 2 \quad (8)$$

En un pórtico equivalente, la flecha en el centro de la luz de la franja de columna o de la franja intermedia se calcula como la sumatoria de tres componentes: la flecha del panel supuesto fijo en ambos extremos, más la flecha del panel debida a la rotación en las dos líneas de apoyo. En la dirección x, las flechas se calcularían usando las siguientes expresiones:

$$\Delta_{cx} = \Delta_{cx} \text{ (extremos fijos)} + (\Delta\theta_1)_{cx} + (\Delta\theta_2)_{cx} \quad \text{para las franjas de columna} \quad (9)$$

$$\Delta_{mx} = \Delta_{mx} \text{ (extremos fijos)} + (\Delta\theta_1)_{mx} + (\Delta\theta_2)_{mx} \quad \text{para las franjas intermedias}$$

Aunque estas ecuaciones y la discusión que sigue tratan solamente el cálculo de las flechas en la dirección x, sería necesario realizar cálculos similares para determinar Δ_{cy} y Δ_{my} y calcular las flechas en la dirección y.

El primer paso del proceso para calcular Δ_{cx} y Δ_{mx} correspondientes a extremos fijos consiste en calcular la flecha en el centro del tramo del pórtico equivalente con el ancho total bajo carga uniforme, la cual está dada por:

$$\Delta_{\text{pórtico}} \text{ (extremos fijos)} = \frac{w\ell^4}{384 E_c I_{\text{pórtico}}} \quad (10)$$

donde w = carga uniformemente distribuida \times ancho total

El efecto de las diferentes rigideces en las regiones de momento positivo y momento negativo [fundamentalmente cuando se utilizan ábacos y/o I_e en la Ecuación (9-8)] se puede incluir utilizando un momento de inercia promedio según las Ecuaciones (1) y (2).

Luego se calcula la flecha en el centro del tramo con extremos fijos de las franjas de columna e intermedias, multiplicando $\Delta_{\text{pórtico}}$ (extremos fijos) [Ecuación (10)] por la relación M/EI de las franjas (de columna o intermedia) para el pórtico de todo el ancho.

$$\Delta_{c,m} \text{ (extremos fijos)} = (LDF)_{c,m} \Delta_{\text{pórtico}} \text{ (extremos fijos)} \frac{(EI)_{\text{pórtico}}}{(EI)_{c,m}} \quad \text{para franjas de columna o intermedias} \quad (11)$$

donde $(LDF)_{c,m} = \frac{M_{c,m}}{M_{\text{pórtico}}} = \text{factor de distribución lateral}$

La distribución del momento estático mayorado total, M_o , a las franjas de columna e intermedias se establece en 13.6.4. En particular, 13.6.4.1, 13.6.4.2 y 13.6.4.4 contienen tablas para asignar fracciones de M_o a las regiones de momento negativo interior y exterior, respectivamente, para las franjas de columna. El porcentaje del total no asignado a las franjas de columna se asigna a las franjas intermedias. Por ejemplo, si el 75 por ciento de M_o se asigna para el momento negativo interior de una franja de columna, el correspondiente momento en la franja intermedia deberá ser 25 por ciento de M_o . La siguiente expresión permite interpolar linealmente entre los valores indicados en las tablas de 13.6.4.1, 13.6.4.2 y 13.6.4.4. Observar que todas las expresiones indican porcentajes de M_o :

$$M_{\text{ext}}^- = 100 - 10\beta_t + 12\beta_t (\alpha_1 \ell_2 / \ell_1) (1 - \ell_2 / \ell_1) \quad (\text{Momento negativo exterior, porcentaje de } M_o)$$

$$M_{\text{int}}^- = 75 + 30 (\alpha_1 \ell_2 / \ell_1) (1 - \ell_2 / \ell_1) \quad (\text{Momento negativo interior, porcentaje de } M_o)$$

$$M^+ = 60 + 30 (\alpha_1 \ell_2 / \ell_1) (1, 5 - \ell_2 / \ell_1) \quad (\text{Momento positivo, porcentaje de } M_o)$$

Al aplicar estas expresiones, si el valor real de $\alpha_1 \ell_2 / \ell_1$ es mayor que 1,0 se debe utilizar el valor 1,0. De manera similar, si β_1 es mayor o igual que 2,5 se debe utilizar el valor 2,5.

Para calcular los factores de distribución lateral (LDF), se deberían considerar tres casos:

- frangas para los paneles interiores
- frangas en los paneles de borde paralelas al borde
- frangas en los paneles de borde perpendiculares al borde

Observar que en los paneles de esquina se utiliza el *Caso c* para cualquiera de ambas direcciones, ya que hay un momento negativo exterior en cada borde exterior del panel. En todos los casos, el momento de la franja, usado para determinar los factores de distribución lateral, se toma como el promedio entre el momento positivo y el momento negativo. En consecuencia, para los tres casos se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\text{Caso a: } LDF = 1/2 (M_{\text{int}}^- + M^+)$$

$$\text{Caso b: } LDF = 1/2 (M_{\text{int}}^- + M^+)$$

$$\text{Caso c: } LDF = 1/2 \left[1/2 (M_{\text{int}}^- + M_{\text{ext}}^-) + M^+ \right]$$

Estos factores de distribución lateral se aplican a las frangas de columna, y se expresan como porcentajes del momento total del panel, M_o . En general, los factores correspondientes a las frangas intermedias se determinan de la siguiente manera:

$$LDF_{\text{intermed}} = 100 - LDF_{\text{col}}$$

Ahora se deben calcular el resto de los términos de la Ecuación (9), la flecha en el centro de la luz de una franja de columna o de una franja intermedia provocada por las rotaciones en los extremos, $(\Delta\theta_1)_{\text{cx}}$, $(\Delta\theta_1)_{\text{mx}}$, etc. Si los extremos superior e inferior de la columna se asumen fijos (lo cual es habitual en los análisis por pórticos equivalentes) o idealmente articulados, la rotación de la columna en el piso considerado es igual al momento neto aplicado dividido por la rigidez de la columna equivalente.

$$\theta_{\text{pórtico}} = \theta_c = \theta_m = \frac{(M_{\text{neto}})_{\text{pórtico}}}{K_{\text{ec}}} \quad (12)$$

donde K_{ec} = rigidez de la columna equivalente (ver 13.7.4)

La flecha en el centro de la luz de una franja de columna sujeta a una rotación de θ_1 radianes en un extremo, mientras el extremo opuesto se mantiene fijo es:

$$(\Delta\theta_1)_c = \frac{\theta_1 \ell}{8} \quad (13)$$

Los términos adicionales de las flechas de las frangas de columna e intermedias se calculan de manera similar.

Debido a que en la Ecuación (12) θ se basa en las propiedades de la sección bruta, mientras que el cálculo de las flechas se basa en I_e , para mayor consistencia, en lugar de utilizar la Ecuación (13) se puede utilizar la Ecuación (14):

$$(\Delta\theta_1)_c = \theta_1 \left(\frac{\ell}{8} \right) \left(\frac{I_g}{I_e} \right)_{\text{pórtico}} \quad (14)$$

Método de Diseño Directo: El procedimiento para calcular las flechas antes descrito se ha expresado en términos del método del pórtico equivalente. Sin embargo, también se puede utilizar con el método de diseño directo, en el cual se utilizan coeficientes

para calcular momentos en secciones críticas en vez de utilizar un análisis de pórtico elástico, como en el caso del método del pórtico equivalente. En el método de diseño directo, los momentos de diseño se calculan usando luces libres. Al determinar las flechas debidas a las rotaciones en los extremos de un elemento, teóricamente estos momentos se deberían corregir para obtener los momentos en el centro de las columnas. Sin embargo, dado que generalmente es pequeña, se puede despreciar esta diferencia. En el caso de las placas planas y las losas planas, se cree que para calcular las flechas es más apropiado utilizar la luz medida entre los centros de las columnas que la luz libre.

Si todos los tramos son iguales y están igualmente cargados, con el método de diseño directo no se obtendrán momentos no balanceados ni rotaciones excepto en las columnas exteriores. Por lo tanto, en estos casos sólo es necesario considerar las rotaciones en las columnas exteriores. Cuando la sobrecarga es grande en relación con la carga permanente (caso poco habitual), las rotaciones en los extremos se pueden calcular mediante un procedimiento sencillo de momentos y áreas en el cual se puede incluir el efecto del patrón de carga.

Momento de inercia efectivo: Se recomienda usar el momento de inercia efectivo dado por la Ecuación (9-8) para calcular las flechas de los elementos armados en dos direcciones parcialmente fisurados. También se puede usar un I_e promedio de las regiones de momentos positivos y negativos de acuerdo con las Ecuaciones (1) y (2).

Para las ubicaciones de fisuración típicas que se han hallado en la práctica, en la mayoría de los casos los siguientes valores del momento de inercia han demostrado ser satisfactorios:

Caso	Momento de Inercia
a. Losas sin vigas (placas planas, losas planas)	
(i) Flechas por carga permanente —	I_g
(ii) Flechas por carga permanente más sobrecarga:	
Para las franjas de columna, en ambas direcciones —	I_e
Para las franjas intermedias en ambas direcciones —	I_g
b. Losas con vigas (losas armadas en dos direcciones apoyadas en vigas en todos sus lados)	
(i) Flechas por carga permanente —	I_g
(ii) Flechas por carga permanente más sobrecarga	
Para las franjas de columna, en ambas direcciones —	I_g
Para las franjas intermedias en ambas direcciones —	I_e

El I_e del pórtico equivalente en cada dirección se toma como la sumatoria de los valores de I_e correspondientes a las franjas de columna e intermedias.

Flecha a largo plazo: Debido a que los datos disponibles sobre las flechas a largo plazo de los elementos armados en dos direcciones son demasiado escasos para justificar procedimientos más elaborados, se recomienda utilizar los mismos procedimientos utilizados para elementos armados en una dirección. Para cargas sostenidas de cinco años o más de duración se puede usar la Ecuación (9-11), con $\xi = 2,5$.

9.5.4 Elementos de hormigón pretensado

La publicación PCI Design Handbook^{10.8} (Manual PCI) contiene las típicas relaciones longitud-profundidad habitualmente utilizadas en el diseño de elementos pretensados; la Referencia 10.2 resume valores típicos tomadas de diferentes fuentes. A partir de la edición 2002 de ACI 318, en su sección 18.3.3, el Código de Construcción clasifica los elementos de hormigón pretensado solicitados a flexión como Clase U (no fisurados), Clase T (transición) y Clase C (fisurados). Para los elementos solicitados a flexión Clase U, las flechas se deben calcular en base al momento de inercia de la sección bruta, I_g . Para los elementos Clase T y Clase C, las flechas se deben calcular en base a un análisis de sección transformada fisurada o en base a una relación momento-curvatura bilineal. La Referencia 10.9 presenta un procedimiento para calcular las flechas de elementos de hormigón pretensado fisurados.

Flecha de elementos pretensados no compuestos – Las contraflechas y flechas últimas (en el tiempo) de los elementos pretensados se pueden calcular en base a un procedimiento descrito en la Referencia 10.2. Este procedimiento incluye el uso de I_c para los elementos parcialmente pretensados (Referencia 10.8) como un método sugerido para satisfacer 18.4.2(d) para analizar las flechas cuando la tensión de tracción calculada es mayor que el módulo de rotura pero no es mayor que $12\sqrt{f'_c}$. Para mayor información sobre las flechas de las vigas de hormigón pretensado fisurado y sobre la flecha de las vigas pretensadas compuestas, ver las Referencias 10.2 y 10.9.

La flecha última de los elementos pretensados no compuestos se obtiene como (Referencias 10.2 y 10.10):

$$\Delta_u = \underbrace{(1)}_{-\Delta_{po} + \Delta_o} + \underbrace{(2)}_{-\left[-\frac{\Delta P_u}{P_o} + (k_r C_u)\left(1 - \frac{\Delta P_u}{2P_o}\right)\right]} \Delta_{po} + \underbrace{(4)}_{(k_r C_u)\Delta_o + \Delta_s} + \underbrace{(5)}_{\Delta_s} + \underbrace{(6)}_{(\beta_s k_r C_u)\Delta_s} + \underbrace{(7)}_{\Delta_\ell} + \underbrace{(8)}_{(\Delta_{cp})_\ell} \quad (15)$$

El Término (1) es la contraflecha inicial debida al momento de pretensado inicial luego de las pérdida elásticas, P_{oe} . Por ejemplo, $\Delta_{po} = P_o \ell^2 / 8E_{ci}I_g$ para un tendón recto.

El Término (2) es la flecha inicial debida al peso propio de la viga. $\Delta_o = 5M_o \ell^2 / 48E_{ci}I_g$ para una viga simple, siendo M_o el momento por peso propio en el centro de la luz.

El Término (3) es la contraflecha adicional de la viga a largo plazo (dependiente del tiempo) debida al momento de pretensado. Este término incluye los efectos de la fluencia lenta y la pérdida de pretensado; es decir, el efecto de la fluencia lenta bajo tensión variable. Los valores medios de la relación de pérdida de pretensado luego de la transferencia (excluyendo las pérdidas elásticas), $(P_o - P_e)/P_e$ son de alrededor de 0,18; 0,21 y 0,23 para hormigón de peso normal, hormigón de agregados livianos y arena y hormigón liviano, respectivamente. Un valor medio de $C_u = 2,0$ podría ser razonable para el factor de fluencia lenta debida a la fuerza última de pretensado y el peso propio. El factor k_r toma en cuenta el efecto de cualquier acero no pretensado, que reduce la contraflecha dependiente del tiempo, usando la Ecuación (16). También se lo utiliza en la publicación PCI Design Handbook^{10.8}, aunque de una manera ligeramente diferente.

$$k_r = 1 / \left[1 + \left(A_s / A_{ps} \right) \right] \text{ para } A_s / A_{ps} < 2 \quad (16)$$

Cuando $k_r = 1$ los Términos (1) + (3) se pueden combinar de la siguiente manera:

$$-\Delta_{po} - \left[-\Delta_{po} + \Delta_{pe} + C_u \left(\frac{\Delta_{po} + \Delta_{pe}}{2} \right) \right] = -\Delta_{pe} - C_u \left(\frac{\Delta_{po} + \Delta_{pe}}{2} \right)$$

El Término (4) es la flecha adicional a largo plazo debida al peso propio de la viga. Usar el mismo valor de C_u utilizado en el Término (3). Debido a que la fluencia lenta debida al pretensado y al peso propio ocurre bajo las tensiones combinadas que ellos provocan, el efecto de cualquier acero no pretensado traccionado de reducir la flecha por fluencia lenta se incluye tanto en el Término de la contraflecha (3) como en el Término de la flecha (4).

El Término (5) es la flecha inicial de la viga bajo una carga permanente impuesta. $\Delta_s = 5M_s \ell^2 / 48E_c I_g$ para una viga simple, siendo M_s el momento en el centro de la luz debido a la carga permanente impuesta (uniformemente distribuida).

El Término (6) es la flecha adicional a largo plazo de la viga provocada por una carga permanente impuesta. k_r es igual que en los Términos (3) y (4), y se incluye en este término por el mismo motivo que se incluye en el Término (4). Se recomienda un valor medio de $C_u = 1,6$ como en la Ecuación (7) para elementos no pretensados, asumiendo que la carga se aplica 20 días después de la colocación del hormigón. β_s es un factor de corrección que considera la edad del hormigón de la viga en el momento de aplicación de la carga permanente impuesta; si esta edad no es de 20 días (los mismos valores se aplican tanto para hormigón de peso normal

como para hormigón liviano): $\beta_s = 1,0$ para una edad de 3 semanas; $\beta_s = 0,96$ para 1 mes; $\beta_s = 0,89$ para 2 meses; $\beta_s = 0,85$ para 3 meses; y $\beta_s = 0,83$ para 4 meses.

El Término (7) es la flecha inicial de la viga provocada por la sobrecarga. $\Delta_\ell = 5M_\ell \ell^2 / 48E_c I_g$ para una viga simple con sobrecarga uniformemente distribuida, siendo M_ℓ el momento por sobrecarga en el centro de la luz. Para los elementos no fisurados $I_e = I_g$. Para los elementos no compuestos y compuestos parcialmente fisurados ver las Referencias 10.2 y 10.3. También ver el Ejemplo 8.5, que presenta el caso de un elemento parcialmente fisurado.

El Término (8) es la flecha adicional a largo plazo de la viga provocada por la sobrecarga. Esta flecha adicional se puede calcular como $(\Delta_{cp})_\ell = (M_s / M_\ell) C_u \Delta_\ell$, siendo M_s la porción de larga duración del momento por sobrecarga y $C_u = 1,6$ para carga aplicada a una edad de 20 días, o bien multiplicada por el factor β_s correspondiente, como en el Término (6).

Un método alternativo para calcular las contraflechas y flechas a largo plazo es el llamado *Método de los Multiplicadores del PCI*, el cual se presenta en las Referencias 10.4 y 10.8. En este procedimiento las diversas componentes instantáneas de las contraflechas o flechas simplemente se multiplican por los coeficientes tabulados a fin de obtener sus contribuciones adicionales a largo plazo. Estos coeficientes se dan en la Tabla 3.4 de la Referencia 10.4, y en la Tabla 4.8.2 de la Referencia 10.8.

9.5.5 Elementos compuestos o contruidos en etapas

La flecha última (en el tiempo) de los elementos contruidos en etapas solicitados a flexión, apuntalados o sin apuntalar, se puede calcular aplicando los métodos discutidos en las Referencias 10.2 y 10.10. Estos métodos se reproducen en los párrafos siguientes, tanto para elementos apuntalados como para elementos sin apuntalar. Los subíndices 1 y 2 se refieren a la losa (o al efecto de la losa, tal como bajo la carga permanente de la losa) y a la viga prefabricada, respectivamente. Los Ejemplos 10.6 y 10.7 demuestran los beneficios que se logran con el apuntalamiento, es decir, cómo se reducen las flechas.

9.5.5.1 Elementos apuntalados – Para los elementos contruidos en etapas apuntalados, en los cuales la carga permanente y la sobrecarga es resistida por la sección compuesta total, se aplican los espesores mínimos de la Tabla 9.5(a) como en el caso de los elementos estructurales monolíticos.

El cálculo de las flechas de las vigas compuestas apuntaladas es básicamente igual que para las vigas monolíticas, excepto por la flecha debida al alabeo por contracción de la viga prefabricada, el cual es resistido por la sección compuesta una vez que la losa se ha endurecido, y la flecha debida a la contracción diferencial y a la fluencia lenta de la viga compuesta. Estos efectos se representan en los Términos (3) y (4) de la Ecuación (17).

$$\Delta_u = \underbrace{(\Delta_i)_{1+2}}_{(1)} + 1,80 k_r \underbrace{(\Delta_i)_{1+2}}_{(2)} + \underbrace{\Delta_{sh}}_{(3)} \underbrace{\frac{I_2}{I_c}}_{(4)} + \underbrace{\Delta_{ds}}_{(5)} + \underbrace{(\Delta_i)_\ell}_{(6)} + \underbrace{(\Delta_{cp})_\ell}_{(7)} \quad (17)$$

Cuando $k_r = 0,85$ (despreciando el efecto de cualquier armadura de compresión de la losa) y Δ_{ds} se asume igual a $(\Delta_i)_{1+2}$, la Ecuación (17) se reduce a la Ecuación (18).

$$\Delta_u = \underbrace{3,53(\Delta_i)_{1+2}}_{(1+2+4)} + \underbrace{\Delta_{sh}}_{(3)} \underbrace{\frac{I_2}{I_c}}_{(5)} + \underbrace{(\Delta_i)_\ell}_{(6)} + \underbrace{(\Delta_{cp})_\ell}_{(7)} \quad (18)$$

El Término (1) es la flecha inicial o instantánea de la viga compuesta debida a la carga permanente de la losa más la viga prefabricada (más los tabiques, ciellorrasos, etc.), usando la Ecuación (3), con $M_a = M_1 + M_2$ = momento en el centro de la luz debido a la carga permanente de la losa más la viga prefabricada. Para calcular $(I_e)_{1+2}$ de la Ecuación (1), M_a se refiere al momento $M_1 + M_2$, y M_{cr} , I_g e I_{cr} a la sección de la viga compuesta en el centro de la luz.

El Término (2) es la flecha adicional a largo plazo de la viga compuesta debida a la carga permanente en el Término (1), usando la Ecuación (5). El valor de C_u a utilizar debe ser una combinación del correspondiente a la losa y el correspondiente a la viga. En el caso de la losa, se puede usar un valor ajustado $C_u = 1,74$, suponiendo que los puntales se retiran a una edad de 10 días para una losa curada en húmedo. La viga puede tener más de 20 días de edad (la condición normal) en el momento de aplicar las cargas, sin embargo, de forma conservadora se puede utilizar $C_u = 1,60$. A modo de aproximación se puede usar un promedio de los dos valores. Para cargas aplicadas a edades diferentes, los ajustes se pueden hacer de forma similar, usando el factor de corrección β_s presentado anteriormente cuando se discutió el Término (6) de la Ecuación (15). p' se refiere a cualquier armadura de compresión en la losa, en el centro de la luz, al calcular k_r .

El Término (3) es la flecha por contracción de la viga compuesta una vez que se retiran los puntales, provocada por la contracción del hormigón de la viga prefabricada, pero no incluye el efecto de la contracción diferencial y la fluencia lenta que está dado por el Término (4). La Ecuación (6) se puede usar para calcular Δ_{sh} . Supongamos que la losa se cuela cuando el hormigón de la viga prefabricada (curada al vapor) tiene dos meses de edad y que los puntales se retiran 10 días después. En ese momento la contracción en la viga es aproximadamente 36% del valor último, de acuerdo con la Tabla 2.1 de ACI 435. La deformación específica por contracción posterior a dicho momento será $(\epsilon_{sh})_{rem} = (1 - 0,36) (\epsilon_{sh})_u$. Ese valor se debería utilizar en la Ecuación (6) para calcular la componente de la flecha de este término.

El Término (4) es la flecha debida a la contracción diferencial y la fluencia lenta. A modo de aproximación se puede utilizar $\Delta_{ds} = (\Delta_i)_{1+2}$.

El Término (5) es la flecha inicial o instantánea de la viga compuesta provocada por la sobrecarga, usando la Ecuación (3). El cálculo de la flecha adicional por sobrecarga se realiza de manera similar al caso de las vigas monolíticas. Esto es igual que en el método descrito en relación con el Término (9) de la Ecuación (19) discutida en párrafos subsiguientes.

El Término (6) es la flecha adicional a largo plazo debida a cualquier parte de la sobrecarga que sea de larga duración, usando la Ecuación (5). Al calcular esta componente de la flecha, usar un coeficiente de fluencia lenta última $C_u = 1,6$ es conservador. El coeficiente de fluencia lenta se puede reducir aplicando el factor β_s definido en el Término (6) de la Ecuación (15).

Estos procedimientos sugieren utilizar sólo los valores correspondientes al centro del tramo, lo cual normalmente puede ser satisfactorio tanto para vigas simples como para vigas compuestas y también para aquellas que tienen una losa continua. La Referencia 10.10 presenta un ejemplo de una losa continua en una construcción por etapas.

9.5.5.2 Elementos sin apuntalar – Para los elementos construidos en etapas sin apuntalar, si el espesor de un elemento no pretensado prefabricado satisface los requisitos de espesor mínimo, no es necesario calcular las flechas. La Sección 9.5.5.2 también establece que, si el espesor de un elemento construido en etapas no pretensado sin apuntalar satisface los requisitos de espesor mínimo, no es necesario calcular las flechas que ocurren una vez que el elemento se comporta como compuesto, pero se debe investigar la flecha a largo plazo del elemento prefabricado en función de la magnitud y duración de la carga antes del inicio efectivo de su comportamiento como elemento compuesto.

$$\begin{aligned} \Delta_u = & \frac{(1)}{(\Delta_i)_2} + \frac{(2)}{0,77 k_r (\Delta_i)_2} + \frac{(3)}{0,83 k_r (\Delta_i)_2 \frac{I_2}{I_c}} + \frac{(4)}{0,36 \Delta_{sh}} + \frac{(5)}{0,64 \Delta_{sh} \frac{I_2}{I_c}} \\ & \frac{(6)}{+(\Delta_i)_1} + \frac{(7)}{+1,22 k_r (\Delta_i)_1 \frac{I_2}{I_c}} + \frac{(8)}{\Delta_{ds}} + \frac{(9)}{+(\Delta_i)_\ell} + \frac{(10)}{+(\Delta_{cp})_\ell} \end{aligned} \quad (19)$$

Con $k_r = 0,85$ (sin armadura de compresión en la viga prefabricada) y suponiendo Δ_{ds} igual a $0,50(\Delta_i)_1$, la Ecuación (19) se reduce a la Ecuación (20).

$$\Delta_u = \frac{(1+2+3)}{\left(1,65 + 0,71 \frac{I_2}{I_c}\right)} (\Delta_i)_2 + \frac{(4+5)}{\left(0,36 + 0,64 \frac{I_2}{I_c}\right)} \Delta_{sh} + \frac{(6+7+8)}{\left(1,50 + 1,04 \frac{I_2}{I_c}\right)} (\Delta_i)_1 + \frac{(9)}{(\Delta_i)_\ell} + \frac{(10)}{(\Delta_{cp})_\ell} \quad (20)$$

En las Ecuaciones (19) y (20), las partes de la fluencia lenta y contracción total que ocurren antes de y después de colar la losa se basan en la hipótesis que la viga prefabricada tiene una edad de 20 días en el momento de aplicar la carga permanente y 2 meses en el momento de colar la losa compuesta.

El Término (1) es la flecha inicial o instantánea debida a la carga permanente de la viga prefabricada, usando la Ecuación (3), con $M_a = M_2 =$ momento en el centro de la luz de la viga prefabricada debido a la carga permanente. Para calcular $(I_c)_2$ en la Ecuación (9-9), M_a se refiere a la carga permanente de la viga prefabricada, y M_{cr} , I_g e I_{cr} a la sección de la viga prefabricada en el centro de la luz.

El Término (2) es la flecha adicional a largo plazo por carga permanente de la viga prefabricada hasta el momento de colar la losa, usando la Ecuación (5), con $C_t = 0,48 \times 1,60 = 0,77$ (para edad de 20 días a 2 meses; Tabla 2.1 de ACI 435; para losas coladas a una edad diferente de 60 días, se deberían utilizar los valores correspondientes de la Tabla 2.1), y ρ' se refiere a cualquier armadura de compresión en la viga prefabricada, en el centro de la luz, al calcular k_r .

El Término (3) es la flecha adicional a largo plazo de la viga compuesta luego de colar la losa, debida a la carga permanente de la viga prefabricada, usando la Ecuación (5), siendo la fluencia lenta a largo plazo el valor restante una vez que se ha colado la losa, $C_t = 1,60 - 0,77 = 0,83$. Como se indica en el Término (3), si la losa se cuela a una edad diferente de 2 meses, C_t se deberá determinar a partir de la Tabla 2.1 de ACI 435, y el valor de C_t a utilizar para este término será la diferencia entre 1,60 y el valor usado para el Término (2). ρ' tiene el mismo significado que en el Término (2). La relación I_2/I_c modifica la tensión (deformación específica) inicial y toma en cuenta el efecto de la sección resistiendo la curvatura (deformación específica) adicional por fluencia lenta como un elemento compuesto, después del inicio efectivo de su comportamiento como elemento compuesto. A modo de aproximación se puede utilizar $I_2/I_c = [(I_2/I_c)_g + (I_2/I_c)_{cr}]/2$.

El Término (4) es la flecha debida al alabeo por contracción de la viga prefabricada hasta el momento de colar la losa, usando la Ecuación (6), con $(\epsilon_{sh})_t = 0,36(\epsilon_{sh})_u$ a la edad de 2 meses para hormigón curado al vapor (lo cual se asume es habitual para las vigas prefabricadas). El multiplicador 0,36 se obtiene de la Tabla 2.1 de la Referencia 10.4. Al igual que en los dos términos anteriores, si la losa se cuela a una edad diferente de 2 meses después de la fabricación de la viga, el porcentaje de la deformación específica última de contracción se debe ajustar para reflejar el valor adecuado de la Tabla 2.1 de ACI 435. $(\epsilon_{sh})_u = 400 \times 10^{-6}$ in./in.

El Término (5) es la flecha por contracción de la viga compuesta luego del colado de la losa, debida a la contracción del hormigón de la viga prefabricada, usando la Ecuación (6), con $\epsilon_{sh} = 0,64 (\epsilon_{sh})_u$. Este término no incluye el efecto de la contracción diferencial ni la fluencia lenta, el cual está dado por el Término (8). I_2/I_c es igual que en el Término (3).

El Término (6) es la flecha inicial o instantánea de la viga prefabricada debida a la carga permanente de la losa, usando la Ecuación (3), con la flecha adicional calculada de la siguiente manera: $(\Delta_i)_1 = (\Delta_i)_{1+2} - (\Delta_i)_2$, donde $(\Delta_i)_2$ es igual que en el Término (1). Para calcular $(I_c)_{1+2}$ y $(\Delta_i)_{1+2}$ en las Ecuaciones (9-8) y (3), $M_a = M_1 + M_2$ debido a la carga permanente de la viga prefabricada más la losa en el centro de la luz, y M_{cr} , I_g e I_{cr} se refieren a la sección de la viga prefabricada en el centro de la luz. Si se colocan tabiques, ciellorrasos, etc., simultáneamente con la losa, o muy poco tiempo después, su carga permanente se debería incluir en M_1 y M_a .

El Término (7) es la flecha adicional a largo plazo de la viga compuesta debida a la carga permanente de la losa, usando la Ecuación (5), con $C_u = \beta_s \times 1,60$. Para carga aplicada a los 2 meses de edad, $\beta_s = 0,89$ es el factor de corrección apropiado, como se observó al tratar el Término (6) de la Ecuación (15). Si la carga se aplica a una edad diferente, se debería utilizar el valor de β_s correspondiente. En este término, las deformaciones específicas, curvaturas y flechas iniciales debidas a la carga permanente de la losa se basan sólo en la sección prefabricada. Por lo tanto, las curvaturas y flechas a largo plazo se refieren al hormigón de la viga

prefabricada, aún cuando la sección compuesta está restringiendo las curvaturas y flechas como se mencionó al hablar del Término (3). k_r es igual que en el Término (2), e I_2/I_c es igual que en el Término (3).

El Término (8) es la flecha debida a la contracción diferencial y la fluencia lenta. A modo de aproximación, se puede usar $\Delta_{ds} = 0,50 (\Delta_i)_1$.

El Término (9) es la flecha inicial o instantánea debida a la sobrecarga (y otras cargas aplicadas a la viga compuesta y no incluidas en el Término (6)) de la viga compuesta, usando la Ecuación (4), con la flecha adicional estimada de la siguiente manera: $(\Delta_i)_\ell = (\Delta_i)_{d+\ell} - (\Delta_i)_d$, en base a la sección compuesta. Se cree que esta aproximación es conservadora, ya que $(\Delta_i)_d$ calculada es un valor menor que el real y por lo tanto $(\Delta_i)_\ell$ calculada es un valor mayor que el real, aún cuando en realidad los incrementos de carga son resistidos por diferentes secciones (elementos). Este método es igual que para el Término (5) de la Ecuación (17), e igual que el usado para las vigas monolíticas. Alternativamente, a modo de aproximación gruesa, se puede usar la Ecuación (3) con $M_a = M_1$ e $I_c = (I_c)_{cr}$. El primer método se ilustra en el Ejemplo 8.7, y el método alternativo en el Ejemplo 8.6.

El Término (10) es la flecha adicional a largo plazo debida a cualquier sobrecarga de larga duración aplicada a la viga compuesta, usando la Ecuación (5), con $C_u = \beta_s \times 1,60$. Como en los demás casos, β_s se da para diferentes momentos de aplicación de la carga, tal como se explicó al tratar el Término (6) de la Ecuación (15). p' se refiere a cualquier armadura de compresión en la losa, en el centro de la luz, al calcular k_r . Este término corresponde al Término (6) de las Ecuaciones (17) y (18).

REFERENCIAS

- 10.1 *Deflections of Concrete Structures*, Special Publication SP 43, American Concrete Institute, Detroit, MI, 1974.
- 10.2 Branson, D. E., *Deformation of Concrete Structures*, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1977.
- 10.3 Branson, D. E., "Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members," ACI 435.2R-66 (Reaprobada en 1984).
- 10.4 *Control of Deflection in Concrete Structures*, ACI 435R-95, American Concrete Institute, Detroit, MI, 1995.
- 10.5 *Designing for Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, Special Publication SP 76, American Concrete Institute, Detroit, MI, 1982.
- 10.6 *Designing for Effects of Creep, Shrinkage, and Temperature in Concrete Structures*, Special Publication SP 27, American Concrete Institute, Detroit, MI, 1971.
- 10.7 Nilson, A. H., y Walters, D. B., "Deflection for Two-Way Floor Systems by the Equivalent Frame Method," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 72, No. 5, Mayo 1975, pp. 210-218.
- 10.8 *PCI Design Handbook – Precast and Prestressed Concrete*, 4º Ed., Prestressed Concrete Institute, Chicago, IL, 1992.
- 10.9 Mast, R. F., "Analysis of Cracked Prestressed Concrete Sections: A Practical Approach," *PCI Journal*, Vol., 43, No. 4, Julio-Agosto 1998, pp. 80-91.
- 10.10 Branson, D. E., "Reinforced Concrete Composite Flexural Members," Capítulo 4, pp. 97-174, y "Prestressed Concrete Composite Flexural Members," Capítulo 5, pp. 148-210, *Handbook of Composite Construction Engineering*, G. M. Sabanis, Editor, Van Nostrand Reinhold Co., New York, NY, 1979.

Ejemplo 10.1 – Viga de sección rectangular no pretensada de un solo tramo

Se pide: Analizar las flechas instantáneas y las flechas a largo plazo a las edades de 3 meses y 5 años (valor último)

Datos:

$$f'_c = 3000 \text{ psi (hormigón de peso normal)}$$

$$f_y = 40.000 \text{ psi}$$

$$A_s = 3 \text{ barras No. 7} = 1,80 \text{ in.}^2$$

$$E_s = 29.000.000 \text{ psi}$$

$$\rho = A_s/bd = 0,0077$$

$$A'_s = 3 \text{ barras No. 4} = 0,60 \text{ in.}^2$$

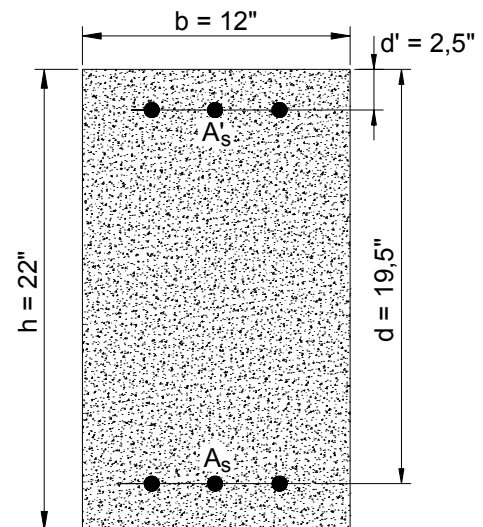
$$\rho' = A'_s/bd = 0,0026$$

(No se requiere A'_s por resistencia)

Carga permanente impuesta (excluyendo el peso de la viga) = 120 lb/ft

Sobrecarga = 300 lb/ft (50% sostenida o de larga duración)

Luz = 25 ft



Cálculos y discusión

Referencia del Código

1. Espesor mínimo de la viga, para elementos que no soportan, ni están unidos a, tabiques divisorios u otros elementos susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas.

$$h_{\min} = \left(\frac{\ell}{16} \right)$$

Tabla 9.5(a)

multiplicar por 0,8 para acero con $f_y = 40.000 \text{ psi}$

$$h_{\min} = \frac{25 \times 12}{16} \times 0,8 = 15 \text{ in.} < 22 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

2. Momentos:

$$w_d = 0,120 + (12)(22)(0,150)/144 = 0,395 \text{ kips/ft}$$

$$M_d = \frac{w_d \ell^2}{8} = \frac{(0,395)(25)^2}{8} = 30,9 \text{ ft-kips}$$

$$M_\ell = \frac{w_\ell \ell^2}{8} = \frac{(0,300)(25)^2}{8} = 23,4 \text{ ft-kips}$$

$$M_{d+\ell} = 54,3 \text{ ft-kips}$$

$$M_{\text{sos}} = M_d + 0,50M_\ell = 30,9 + (0,50)(23,4) = 42,6 \text{ ft-kips}$$

3. Módulo de rotura, módulo de elasticidad, relación de módulos:

$$f_r = 7,5\sqrt{f'_c} = 7,5\sqrt{3000} = 411 \text{ psi} \quad \text{Ec. (9-10)}$$

$$E_c = w_c^{1,5} 33\sqrt{f'_c} = (150)^{1,5} 33\sqrt{3000} = 3,32 \times 10^6 \text{ psi} \quad 8.5.1$$

$$n_s = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6}{3,32 \times 10^6} = 8,7$$

4. Momentos de inercia de la sección bruta y de la sección fisurada, usando la Tabla 8-2:

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{(12)(22)^3}{12} = 10.650 \text{ in.}^4$$

$$B = \frac{b}{(nA_s)} = \frac{12}{(8,7)(1,80)} = 0,766 \text{ in.}$$

$$r = \frac{(n-1)A'_s}{(nA_s)} = \frac{(7,7)(0,60)}{(8,7)(1,80)} = 0,295$$

$$kd = \left[\sqrt{2dB(1+rd'/d) + (1+r)^2} - (1+r) \right] / B$$

$$= \left[\sqrt{(2)(19,5)(0,766) \left\{ 1 + \frac{0,295 \times 2,5}{19,5} \right\} + (1,295)^2} - 1,295 \right] / 0,766 = 5,77 \text{ in.}$$

$$I_{cr} = \frac{bk^3d^3}{3} + nA_s(d-kd)^2 + (n-1)A'_s(kd-d')^2$$

$$= \frac{(12)(5,77)^3}{3} + (8,7)(1,80)(19,5-5,77)^2 + (7,7)(0,60)(5,77-2,5)^2$$

$$= 3770 \text{ in.}^4$$

$$\frac{I_g}{I_{cr}} = 2,8$$

5. Momentos efectivos de inercia, usando la Ecuación (9-7):

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} = \frac{(411)(10.650)(11)}{(12.000)} = 33,2 \text{ ft-kips} \quad \text{Ec. (9-9)}$$

a. Sólo con carga permanente

$$\frac{M_{cr}}{M_d} = \frac{33,2}{30,9} > 1. \text{ Por lo tanto } (I_e)_d = I_g = 10.650 \text{ in.}^4$$

b. Con carga de larga duración

$$\left(\frac{M_{cr}}{M_{sos}}\right)^3 = \left(\frac{33,2}{42,6}\right)^3 = 0,473$$

$$\begin{aligned}(I_e)_{sos} &= (M_{cr}/M_a)^3 I_g + \left[1 - (M_{cr}/M_a)^3\right] I_{cr} \leq I_g \\ &= (0,473)(10.650) + (1 - 0,473)(3770) \\ &= 7025 \text{ in.}^4\end{aligned}\tag{Ec. (9-8)}$$

c. Con carga permanente más sobrecarga

$$\left(\frac{M_{cr}}{M_{d+\ell}}\right)^3 = \left(\frac{33,2}{54,3}\right)^3 = 0,229$$

$$\begin{aligned}(I_e)_{d+\ell} &= (0,229)(10.650) + (1 - 0,229)(3770) \\ &= 5345 \text{ in.}^4\end{aligned}$$

d. Flechas iniciales o instantáneas, usando la Ecuación (3)

9.5.2.2
9.5.2.3

$$(\Delta_i)_d = \frac{K(5/48)M_d \ell^2}{E_c (I_e)_d} = \frac{(1)(5/48)(30,9)(25)^2 (12)^3}{(3320)(10.650)} = 0,098 \text{ in.}$$

K = 1 para tramos simples (ver Tabla 8-3)

$$(\Delta_i)_{sos} = \frac{K(5/48)M_{sos} \ell^2}{E_c (I_e)_{sos}} = \frac{(1)(5/48)(42,6)(25)^2 (12)^3}{(3320)(7025)} = 0,205 \text{ in.}$$

$$(\Delta_i)_{d+\ell} = \frac{K(5/48)M_{d+\ell} \ell^2}{E_c (I_e)_{d+\ell}} = \frac{(1)(5/48)(54,3)(25)^2 (12)^3}{(3320)(5345)} = 0,344 \text{ in.}$$

$$(\Delta_i)_\ell = (\Delta_i)_{d+\ell} - (\Delta_i)_d = 0,344 - 0,098 = 0,246 \text{ in.}$$

Flechas admisibles, Tabla 9.5(b):

Cubiertas planas que no soportan, ni están unidas a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

$$(\Delta_i)_\ell \leq \frac{\ell}{180} = \frac{300}{180} = 1,67 \text{ in.} > 0,246 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Entrepisos que no soportan, ni están unidos a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

$$(\Delta_i)_\ell \leq \frac{\ell}{360} = \frac{300}{360} = 0,83 \text{ in.} > 0,246 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

7. Flechas adicionales a largo plazo para 3 meses y 5 años de edad (valor último):

Flechas combinadas por fluencia lenta y contracción, usando las Ecuaciones (9-10) y (4):

Duración	ξ	$\lambda = \frac{\xi}{1+50\rho'}$	$(\Delta_i)_{\text{sos}}$ in.	$(\Delta_i)_\ell$ in.	$\Delta_{\text{cp}} + \Delta_{\text{sh}} = \lambda(\Delta_i)_{\text{sos}}$ in.	$\Delta_{\text{cp}} + \Delta_{\text{sh}} + (\Delta_i)_\ell$ in.
5 años	2,0	1,77	0,205	0,246	0,363	0,61
3 meses	1,0	0,89	0,205	0,246	0,182	0,43

Flechas por fluencia lenta y contracción por separado, usando las Ecuaciones (5) y (6):

Para $\rho = 0,0077$; $\rho' = 0,0026$

Para $\rho = 100\rho = 0,77$ y $\rho' = 100\rho' = 0,26$ leer $A_{\text{sh}} = 0,455$ (Fig. 8-3) y $K_{\text{sh}} = 0,125$ para tramos simples (Tabla 8-5).

Duración	C_t	$\lambda_{\text{cp}} = \frac{0,85C_t}{1+50\rho'}$	$\Delta_{\text{cp}} = \lambda_{\text{cp}}(\Delta_i)_{\text{sos}}$ in.	ϵ_{sh} in./in.	$\phi_{\text{sh}} = \frac{A_{\text{sh}}\epsilon_{\text{sh}}}{h}$ 1/in.	$\Delta_{\text{sh}} = K_{\text{sh}}\phi_{\text{sh}}\ell^2$ in.	$\Delta_{\text{cp}} + \Delta_{\text{sh}} + (\Delta_i)_\ell$ in.
5 años	1,6 (última)	1,20	0,246	400×10^{-6}	$\frac{0,455 \times 400 \times 10^{-6}}{22}$ $= 8,27 \times 10^{-6}$	$\frac{1}{8} \times 8,27 \times 10^{-6} \times (25 \times 12)^2$ $= 0,0093$	$0,246 + 0,093$ $+ 0,246 = 0,59$
3 meses	$0,56 \times$ $1,6 = 0,9$	0,68	0,14	$0,6 \times 400 \times 10^{-6}$ $= 240 \times 10^{-6}$	$4,96 \times 10^{-6}$	$= 0,0558$	$0,14 + 0,056$ $+ 0,246 = 0,44$

Flechas admisibles, Tabla 9.5(b):

Cubiertas o entrepisos que soportan, o están unidos a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas (limitación muy severa).

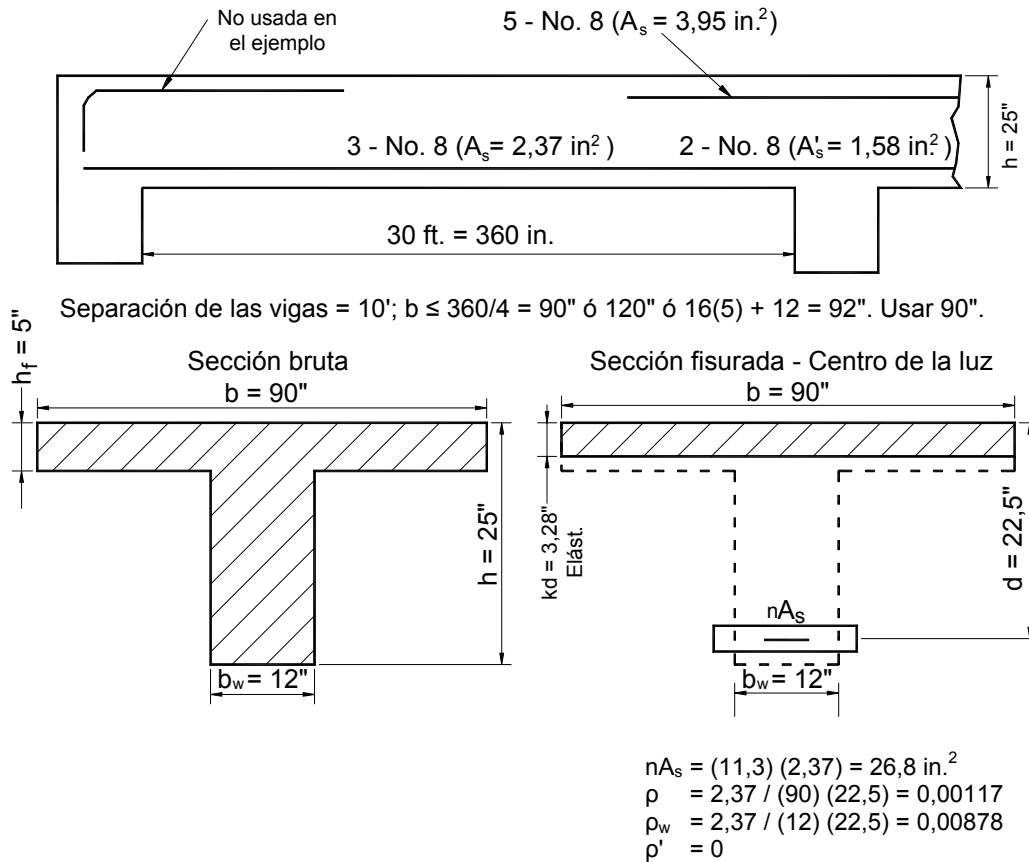
$$\Delta_{\text{cp}} + \Delta_{\text{sh}} + (\Delta_i)_\ell \leq \frac{\ell}{480} = \frac{300}{480} = 0,63 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA según ambos métodos}$$

Cubiertas o entrepisos que soportan, o están unidos a, elementos no estructurales que no son susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas.

$$\Delta_{\text{cp}} + \Delta_{\text{sh}} + (\Delta_i)_\ell \leq \frac{\ell}{240} = \frac{300}{240} = 1,25 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA según ambos métodos}$$

Ejemplo 10.2 – Viga Te continua no pretensada

Se pide: Analizar las flechas instantáneas y las flechas a largo plazo del tramo final de la viga de múltiples tramos ilustrada a continuación.



Datos:

$f'_c = 4000 \text{ psi}$ (hormigón de agregados livianos y arena)
 $f_y = 50.000 \text{ psi}$
 $w_c = 120 \text{ lb/ft}^3$

Separación de las vigas = 10 ft

Carga permanente impuesta (excluyendo el peso de la viga) = 20 lb/ft²

Sobrecarga = 100 lb/ft² (30% sostenida o de larga duración)

(No se requiere A'_s por resistencia)

Para determinar h_{\min} de la Tabla 9.5(a), I_e Promedio en la Ecuación (1), y K_{sh} en la Ecuación (6), la viga se supondrá continua solamente en uno de sus extremos, ya que el extremo exterior es soportado por una viga perimetral.

Cálculos y discusión

Referencia del Código

1. Espesor mínimo, para elementos que no soportan, ni están unidos a, tabiques divisorios u otros elementos susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

$$h_{\min} = \left(\frac{\ell}{18,5} \right)$$

Tabla 9.5(a)

Factores de modificación = 1,09 para $w_c = 120 \text{ lb/ft}^3$ [nota (a) de la Tabla 9.5(a)]

= 0,9 para $f_y = 50.000 \text{ psi}$ [nota (b) de la Tabla 9.5(a)]

$$h_{\min} = \left(\frac{360}{18,5} \right) (0,90)(1,09) = 19,1 \text{ in.} < h = 25 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

2. Cargas y momentos:

$$w_d = (20 \times 10) + (120)(12 \times 20 + 120 \times 5) / 144 = 900 \text{ lb/ft}$$

$$w_\ell = (100 \times 10) = 1000 \text{ lb/ft}$$

En lugar de realizar un análisis de momentos, se pueden usar los coeficientes de momento aproximados de ACI de la siguiente manera: $M_{\text{pos.}} = w\ell^2/14$ para I_e positivo y flecha máxima, $M_{\text{neg.}} = w\ell^2/10$ para I_e negativo.

8.3.3

a. Momentos positivos

$$M_d \text{ pos.} = \frac{w_d \ell_n^2}{14} = \frac{(0,900)(30)^2}{14} = 57,9 \text{ ft-kips}$$

$$M_\ell \text{ pos.} = \frac{(1000)(30)^2}{14} = 64,3 \text{ ft-kips}$$

$$M_{d+\ell} \text{ pos.} = 57,9 + 64,3 = 122,2 \text{ ft-kips}$$

$$M_{\text{sos}} \text{ pos.} = M_d + 0,30M_\ell = 57,9 + (0,30)(64,3) = 77,2 \text{ ft-kips}$$

b. Momentos negativos

$$M_d \text{ neg.} = \frac{w_d \ell_n^2}{10} = \frac{(0,900)(30)^2}{10} = 81,0 \text{ ft-kips}$$

$$M_\ell \text{ neg.} = \frac{(1000)(30)^2}{10} = 90,0 \text{ ft-kips}$$

$$M_{d+\ell} \text{ neg.} = 81,0 + 90,0 = 171,0 \text{ ft-kips}$$

$$M_{\text{sos}} \text{ neg.} = M_d + 0,30M_\ell = 81,0 + (0,30)(90,0) = 108,0 \text{ ft-kips}$$

3. Módulo de rotura, módulo de elasticidad, relación de módulos:

$$f_r = (0,85)(7,5)\sqrt{f'_c} = 6,38\sqrt{4000} = 404 \text{ psi} \quad (0,85 \text{ para hormigón de agregados livianos y arena})$$

Ec. (9-10)

9.5.2.3(b)

$$E_c = w_c^{1,5} 33 \sqrt{f'_c} = (120)^{1,5} 33 \sqrt{4000} = 2,74 \times 10^6 \text{ psi}$$

8.5.1

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6}{2,74 \times 10^6} = 10,6$$

4. Momentos de inercia de la sección bruta y de la sección fisurada:

a. Sección de momento positivo

$$\begin{aligned} y_t &= h - (1/2) \left[(b - b_w) h_f^2 + b_w h^2 \right] / \left[(b - b_w) h_f + b_w h \right] \\ &= 25 - (1/2) [(78)(5)^2 + (12)(25)^2] / [(78)(5) + (12)(25)] \\ &= 18,15 \text{ in.} \\ I_g &= (b - b_w) h_f^3 / 12 + b_w h^3 / 12 + (b - b_w) h_f (h - h_f / 2 - y_t)^2 + b_w h (y_t - h / 2)^2 \\ &= (78)(5)^3 / 12 + (12)(25)^3 / 12 + (78)(5)(25 - 2,5 - 18,15)^2 + (12)(25)(18,15 - 12,5)^2 \\ &= 33.390 \text{ in.}^4 \\ B &= \frac{b}{n A_s} = \frac{90}{(10,6)(2,37)} = 3,58 / \text{in.} \quad (\text{Tabla 10-2}) \\ kd &= \frac{\sqrt{2dB+1}-1}{B} = \frac{\sqrt{(2)(22,5)(3,58)+1}-1}{3,58} \\ &= 3,28 \text{ in.} < h_f = 5 \text{ in.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se debe tratar como un área comprimida rectangular.

$$\begin{aligned} I_{cr} &= bk^3 d^3 / 3 + n A_s (d - kd)^2 = (90)(3,28)^3 / 3 + (10,6)(2,37)(22,5 - 3,28)^2 \\ &= 10.340 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

b. Sección de momento negativo

$$\begin{aligned} I_g &= \frac{12 \times 25^3}{12} = 15.625 \text{ in.}^4 \\ I_{cr} &= 11.161 \text{ in.}^4 \quad (\text{similar al Ejemplo 8.1, para } b = 12 \text{ in.; } d = 22,5 \text{ in.; } d' = 2,5 \text{ in.; } A_s = 3,95 \text{ in.}^2; A'_s = 1,58 \text{ in.}^2) \end{aligned}$$

5. Momentos efectivos de inercia, usando las Ecuaciones (9-8) y (1):

a. Sección de momento positivo

$$M_{cr} = f_r I_g / y_t = [(404)(33.390) / (18,15)] / 12.000 = 61,9 \text{ ft-kips} \quad \text{Ec. (9-9)}$$

$$M_{cr} / M_d = 61,9 / 57,9 > 1 \quad \text{Por lo tanto } (I_e)_d = I_g = 33.390 \text{ in.}^4$$

$$(M_{cr} / M_{sos})^3 = (61,9 / 77,2)^3 = 0,515$$

$$(I_e)_{\text{sos}} = (M_{\text{cr}} / M_a)^3 I_g + [1 - (M_{\text{cr}} / M_a)^3] I_{\text{cr}} \leq I_g \quad \text{Ec. (9-8)}$$

$$= (0,515) (33.390) + (1 - 0,515) (10.340) = 22.211 \text{ in.}^4$$

$$(M_{\text{cr}} / M_{d+\ell})^3 = (61,9 / 122,2)^3 = 0,130$$

$$(I_e)_{d+\ell} = (0,130)(33.390) + (1 - 0,130)(10.340) = 13.336 \text{ in.}^4$$

b. Sección de momento negativo:

$$M_{\text{cr}} = [(404) (15.625) / (12,5)] / 12.000 = 42,1 \text{ ft-kips} \quad \text{Ec. (9-9)}$$

$$(M_{\text{cr}} / M_d)^3 = (42,1 / 81,0)^3 = 0,14$$

$$(I_e)_d = (0,14)(15.625) + (1 - 0,14)(11.161) = 11.786 \text{ in.}^4 \quad \text{Ec. (9-8)}$$

$$(M_{\text{cr}} / M_{\text{sos}})^3 = (42,1 / 108,0)^3 = 0,06$$

$$(I_e)_{\text{sos}} = (0,06)(15.625) + (1 - 0,06)(11.161) = 11.429 \text{ in.}^4 \quad \text{Ec. (9-8)}$$

$$(M_{\text{cr}} / M_{d+\ell})^3 = (42,1 / 171,0)^3 = 0,015$$

$$(I_e)_{d+\ell} = (0,015)(15.625) + (1 - 0,015)(11.161) = 11.228 \text{ in.}^4 \quad \text{Ec. (9-8)}$$

c. Valores promedios del momento de inercia:

$$(I_e)_{\text{promedio}} = 0,85 I_m + 0,15 (I_{\text{extremo cont.}}) \quad \text{Ec. (1)}$$

$$(I_e)_d \text{ promedio} = (0,85)(33.390) + (0,15)(11.786) = 30.149 \text{ in.}^4$$

$$(I_e)_{\text{sos}} \text{ promedio} = (0,85)(22.211) + (0,15)(11.429) = 20.594 \text{ in.}^4$$

$$(I_e)_{d+\ell} \text{ promedio} = (0,85)(13.336) + (0,15)(11.228) = 13.020 \text{ in.}^4$$

6. Flechas iniciales o instantáneas, con I_e correspondiente al centro de la luz y con I_e promedio: 9.5.2.4

$$(\Delta_i) = K \left(\frac{5}{48} \right) \frac{M_a \ell^2}{E_c I_e} \quad \text{Ec. (3)}$$

$$K = 1,20 - 0,20 M_o / M_a = 1,20 - (0,20) \left(w \ell_n^2 / 8 \right) / \left(w \ell_n^2 / 14 \right) = 0,850 \quad \text{Tabla (10-3)}$$

$$(\Delta_i)_d = \frac{K (5/48) M_d \ell^2}{E_c (I_e)_d} = \frac{(0,85)(5/48)(57,9)(30)^2 (12)^3}{(2740)(33.390)} = 0,087 \text{ in.}$$

$$= 0,096 \text{ in.}, \text{ usando } I_e \text{ promedio} = 30.149 \text{ in.}^4$$

$$(\Delta_i)_{\text{sos}} = \frac{K(5/48)M_{\text{sos}}\ell^2}{E_c(I_e)_{\text{sos}}} = \frac{(0,85)(5/48)(77,2)(30)^2(12)^3}{(2740)(22.211)} = 0,175 \text{ in.}$$

$$= 0,188 \text{ in.}, \text{ usando } I_e \text{ promedio} = 20.594 \text{ in.}^4$$

$$(\Delta_i)_{\text{d}+\ell} = \frac{K(5/48)M_{\text{d}+\ell}\ell^2}{E_c(I_e)_{\text{d}+\ell}} = \frac{(0,85)(5/48)(122,2)(30)^2(12)^3}{(2740)(13.336)} = 0,460 \text{ in.}$$

$$= 0,472 \text{ in.}, \text{ usando } I_e \text{ promedio} = 13.020 \text{ in.}^4$$

$$(\Delta_i)_\ell = (\Delta_i)_{\text{d}+\ell} - (\Delta_i)_\text{d} = 0,460 - 0,087 = 0,373 \text{ in.}$$

$$= 0,472 - 0,096 = 0,376 \text{ in.}, \text{ usando } I_e \text{ promedio de la Ecuación (1)}$$

Flechas admisibles, Tabla 9.5(b):

Para cubiertas planas que no soportan, ni están unidas a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas $-(\Delta_i)_\ell \leq \ell/180 = 2,00 \text{ in.} > 0,376 \text{ in.}$ VERIFICA

Para entrepisos que no soportan, ni están unidos a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas $-(\Delta_i)_\ell \leq \ell/360 = 360/360 = 1,00 \text{ in.}$ VERIFICA

7. Flechas últimas a largo plazo:

Usando el Método ACI con los efectos combinados de la fluencia lenta y la contracción:

$$\lambda = \frac{\xi}{1+50\rho'} = \frac{2,0(\text{valor último})}{1+0} = 2,0 \quad \text{Ec. (9-11)}$$

$$\Delta_{(\text{cp}+\text{sh})} = \lambda (\Delta_i)_{\text{sos}} = (2,0)(0,175) = 0,350 \text{ in.} \quad \text{Ec. (4)}$$

$$\Delta_{(\text{cp}+\text{sh})} + (\Delta_i)_\ell = 0,350 + 0,373 = 0,723 \text{ in.}$$

$$= [2(0,188) + 0,376] = 0,752 \text{ usando } I_e \text{ promedio de la Ecuación (1)}$$

Usando el Método Alternativo considerando las flechas por fluencia lenta y contracción por separado:

$$\lambda_{\text{cp}} = \frac{0,85 C_u}{1+50\rho'} = \frac{(0,85)(1,60)}{1+0} = 1,36$$

$$\Delta_{\text{cp}} = \lambda_{\text{cp}} (\Delta_i)_{\text{sos}} = (1,36)(0,175) = 0,238 \text{ in.} \quad \text{Ec. (5)}$$

$$= 1,36(0,188) = 0,256 \text{ usando } I_e \text{ promedio de la Ecuación (1)}$$

$$\rho = 100 \left(\frac{\rho + \rho_w}{2} \right) = 100 \left(\frac{2,37}{90 \times 22,5} + \frac{2,37}{12 \times 22,5} \right) / 2$$

$$= 100 (0,00117 + 0,00878) / 2 = 0,498\%$$

$$A_{sh} \text{ (de la Fig. 10-3)} = 0,555$$

$$\phi_{sh} = A_{sh} \frac{(\epsilon_{sh})_u}{h} = \frac{(0,555)(400 \times 10^{-6})}{25} = 8,88 \times 10^{-6} / \text{in.}$$

$$\Delta_{sh} = K_{sh} \phi_{sh} \ell^2 = (0,090)(8,88 \times 10^{-6})(30)^2 (12)^2 = 0,104 \text{ in.}$$

Ec. (6)

$$\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell = 0,238 + 0,104 + 0,373 = 0,715 \text{ in.}$$

$$= 0,256 + 0,104 + 0,376 = 0,736 \text{ usando } I_e \text{ promedio de la Ecuación (1)}$$

Flechas admisibles, Tabla 9.5(b):

Para entrepisos o cubiertas que soportan, o están unidas a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas (limitación muy severa) –

$$\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell \leq \frac{\ell}{480} = \frac{360}{480} = 0,75 \text{ in.}$$

Todos los resultados VERIFICAN.

Para cubiertas o entrepisos que soportan, o están unidos a, elementos no estructurales que no son susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas.

$$\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell \leq \frac{\ell}{240} = \frac{360}{240} = 1,50 \text{ in.}$$

Todos los resultados VERIFICAN.

Ejemplo 10.3 – Losa sin vigas de borde (Placa plana)

Se pide: Analizar las flechas instantáneas y las flechas a largo plazo de un panel de esquina.

Datos:

Placa plana sin vigas de borde, diseñada por el Método de Diseño Directo

Losa: $f'_c = 3000$ psi, Columna $f'_c = 5000$ psi (hormigón de peso normal)

$f_y = 40.000$ psi

Paneles cuadrados: 15×15 ft entre los centros de las columnas

Columnas cuadradas: 14×14 in., Luz libre, $\ell_n = 15 - 1,17 = 13,83$ ft

Altura de piso = 10 ft, Altura o espesor de la losa, $h = 6$ in.

La armadura en las regiones de momento negativo de la franja de columna consiste en barras No. 5 con una separación de 7.5 in.

Por lo tanto, el área total de acero en una franja de 90 in. (la mitad de la longitud del panel) es igual a:

$$A_s = (90/7,5) (0,31) = 3,72 \text{ in.}^2$$

La distancia entre la cara comprimida de la losa y el centro de la armadura es:

$$d = 4,62 \text{ in.}$$

La armadura de la franja intermedia y los valores d no son necesarios para el cálculo de las flechas, ya que la losa permanece no fisurada en las franjas intermedias.

Carga permanente impuesta = 10 lb/ft^2

Sobrecarga = 50 lb/ft^2

Verificar considerando que 0% y 40% de la sobrecarga es sostenida o de larga duración.

Cálculos y discusión	Referencia del Código
----------------------	-----------------------

1. Espesor mínimo:

9.5.3.2

De la Tabla 8-6, con acero de Grado 60:

$$\text{Panel interior: } h_{\min} = \frac{\ell_n}{36} = (13,83 \times 12) / 36 = 4,61 \text{ in.}$$

$$\text{Panel exterior: } h_{\min} = \frac{\ell_n}{33} = (13,83 \times 12) / 33 = 5,03 \text{ in.}$$

Debido a que el espesor real de la losa es de 6 in., no es necesario calcular las flechas. Sin embargo, a título ilustrativo, verificaremos las flechas para un panel de esquina a fin de verificar que se satisfagan todas las flechas admisibles de acuerdo con la Tabla 9.5(b).

2. Comentario sobre el diseño de prueba con respecto a las flechas:

Considerando la relación entre las limitaciones de espesor mínimo y el espesor real de la losa, parece probable que las flechas calculadas satisfarán todas o la mayor parte de las flechas admisibles establecidas en el código. Finalmente veremos que se satisfacen todas las limitaciones.

3. Módulo de rotura, módulo de elasticidad, relación de módulos:

$$f_r = 7,5\sqrt{f'_c} = 7,5\sqrt{3000} = 411 \text{ psi}$$

Ec. (9-10)

$$E_{cs} = w_c^{1,5} 33 \sqrt{f'_c} = (150)^{1,5} 33 \sqrt{3000} = 3,32 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$E_{cc} = (150)^{1,5} 33 \sqrt{5000} = 4,29 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$n_s = \frac{E_s}{E_{cs}} = \frac{29}{3,32} = 8,73$$

4. Momentos bajo cargas de servicio y momento de fisuración:

$$w_d = 10 + (150)(6,0)/12 = 85,0 \text{ lb/ft}^2$$

$$(M_o)_d = w_d \ell_2 \ell_n^2 / 8 = (85,0)(15)(13,83)^2 / 8000 = 30,48 \text{ ft-kips}$$

$$(M_o)_{d+\ell} = w_d \ell_2 \ell_n^2 / 8 = (85,0 + 50,0)(15)(13,83)^2 / 8000 = 48,41 \text{ ft-kips}$$

$$(M_o)_{sos} = (85,0 + 0,4 \times 50)(15)(13,83)^2 / 8000 = 37,65 \text{ ft-kips}$$

Los momentos se distribuyen a los extremos y a los centros de la columna y a las franjas de columna e intermedia de acuerdo con los coeficientes dados en las tablas de las Secciones 13.6.3.3, 13.6.4.1, 13.6.4.2 y 13.6.4.4. En este caso, la relación de luces, ℓ_2 / ℓ_1 , es igual a 1,0. En la siguiente tabla se indican los multiplicadores del momento del panel, M_o , que se utilizan para hacer la distribución en un tramo extremo o final:

	Ext. negativo	Positivo	Int. negativo
Total del panel	0,26	0,52	0,70
Franja de columna	(1,0) (0,26)	(0,60) (0,52)	(0,75) (0,70)
Franja intermedia	(1,0-1,0) (0,26)	(1,0-0,60) (0,52)	(1-0-0,75) (0,70)

Los momentos resultantes aplicados a los extremos externo e interno y al centro de la luz de las franjas de columna e intermedia se indican en las siguientes tablas:

Momentos debidos a la carga permanente, ft-kips

	Ext. negativo	Positivo	Int. negativo
Total del panel	7,93	15,85	21,34
Franja de columna	7,93	9,51	16,00
Franja intermedia	0	6,34	5,34

Momentos debidos a la carga permanente + la sobrecarga, ft-kips

	Ext. negativo	Positivo	Int. negativo
Total del panel	12,59	25,18	33,89
Franja de columna	12,59	15,10	25,41
Franja intermedia	0	10,07	8,47

Momentos debidos a la carga sostenida, ft-kips (Carga permanente + 40% de la sobrecarga)

	Ext. negativo	Positivo	Int. negativo
Total del panel	9,79	19,58	26,36
Franja de columna	9,79	11,75	19,77
Franja intermedia	0	7,83	6,59

El momento de inercia de la sección bruta de un panel, denominado momento de inercia del pórtico equivalente, es:

$$I_{\text{pórtico}} = \ell_s h^3 / 12 = (15 \times 12)(6)^3 / 12 = 3.240 \text{ in.}^4$$

Para este caso, el momento de inercia de una franja de columna o de una franja intermedia es igual a la mitad del momento de inercia de la totalidad del pórtico equivalente:

$$I_g = \frac{3240}{2} = 1620 \text{ in.}^4$$

El momento de fisuración ya sea de una franja de columna o de una franja intermedia se obtiene a partir de las fórmulas habituales usadas para flexión, en base a la sección no fisurada, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (M_{cr})_{c/2} &= (M_{cr})_{m/2} = f_r I_g / y_t = (411)(15 \times 12)(6,0)^3 / (4)(12)(3,0)(12.000) \\ &= 9,25 \text{ ft-kips} \end{aligned}$$

5. Momentos efectivos de inercia:

Comparando los momentos aplicados de las tablas con el momento de fisuración se puede ver que el momento asignado en todas las ubicaciones, excepto en el apoyo interior de las franjas de columna para los casos de carga permanente y carga sostenida, es menor que el momento de fisuración bajo las cargas impuestas. Por lo tanto, el momento de inercia de la sección fisurada sólo se requiere para las franjas de columna en las zonas de momento negativo. Las fórmulas para calcular el momento de inercia de la sección fisurada se obtienen de la Tabla 10-2:

$$B = \frac{b}{n A_s} = \frac{\frac{1}{2}(15 \times 12)}{8,73 \times 3,72} = 2,77 \left(\frac{1}{\text{in.}} \right)$$

$$kd = \frac{\sqrt{2Bd+1}-1}{B} = \frac{\sqrt{2 \times 4,62 \times 2,77+1}-1}{2,77} = 1,50 \text{ in.}$$

$$I_{cr} = \frac{b(kd)^3}{3} + n A_s (d - kd)^2 = \frac{90 \times 1,50^3}{3} + 8,73 \times 3,72 (4,62 - 1,50)^2 = 417 \text{ in.}^4$$

Para obtener un momento de inercia equivalente para la ubicación fisurada, se debe aplicar la modificación de Branson a los momentos de inercia para secciones fisuradas y no fisuradas. El momento de inercia aproximado en las secciones fisuradas está dado por la fórmula general de la Ecuación (9-8) de ACI 318. A partir de las tablas desarrolladas en la Sección 4 anterior, las relaciones entre el momento debido a la carga permanente más la sobrecarga, y el momento debido a la carga sostenida, y el momento de fisuración se determinan de la siguiente manera:

Para carga permanente más sobrecarga:

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = \frac{18,50}{25,41} = 0,728$$

$$\left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = 0,386$$

y para el caso de la carga sostenida (carga permanente más 40% de la sobrecarga):

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = \frac{18,50}{19,77} = 0,936$$

$$\left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = 0,819$$

Ahora el momento de inercia equivalente para los dos casos se calcula ahora usando la Ecuación (9-8) de ACI 318):

Para carga permanente más sobrecarga:

$$I_e = (0,386) 1620 + (1 - 0,386) (417) = 881 \text{ in.}^4$$

Para la carga sostenida (carga permanente más 40% de la sobrecarga):

$$I_e = (0,819) 1620 + (1 - 0,819) (417) = 1402 \text{ in.}^4$$

Finalmente, el momento de inercia equivalente para las secciones no fisuradas es simplemente el momento de inercia de la sección bruta, I_g .

Luego, para obtener un momento de inercia promedio para calcular las flechas, los valores correspondientes a los "extremos" y al "centro de la luz" se combinan de acuerdo con la Ecuación (1)

Para carga permanente más sobrecarga:

$$I_e \text{ promedio} = 0,85(1620) + 0,15(881) = 1509 \text{ in.}^4$$

Para la carga sostenida (carga permanente más 40% de la sobrecarga):

$$I_e \text{ promedio} = 0,85(1620) + 0,15(1402) = 1587 \text{ in.}^4$$

Para obtener el momento de inercia equivalente para el "pórtico equivalente," el cual está formado por una franja de columna y una franja intermedia, se deben sumar los momentos de inercia promedio de las respectivas franjas. Para las franjas intermedias, el momento de inercia es el correspondiente a la sección bruta, I_g , y para las franjas de columna se utilizan los valores promedio calculados:

Para carga permanente solamente:

$$(I_e)_{\text{pórtico}} = 1620 + 1620 = 3240 \text{ in.}^4$$

Para carga permanente más sobrecarga:

$$(I_e)_{\text{pórtico}} = 1620 + 1509 = 3129 \text{ in.}^4$$

Para carga permanente más 40% de la sobrecarga:

$$(I_e)_{\text{pórtico}} = 1620 + 1587 = 3207 \text{ in.}^4$$

Nota: En este caso, en el cual estamos considerando un panel de esquina, sólo hay la mitad de una franja de columna a lo largo de los dos bordes exteriores. Sin embargo, las propiedades de la sección para la mitad de una franja son iguales a la mitad de aquellas para una franja entera; además, los momentos aplicados a una franja de borde son la mitad de los aplicados a una franja interior. En consecuencia, las flechas calculadas para la mitad de una franja son iguales a las calculadas para una franja entera. Estrictamente, estas relaciones sólo son aplicables porque todos los paneles tiene las mismas dimensiones en ambas direcciones. Si los paneles no fueran cuadrados, o si algunos paneles adyacentes tuvieran diferentes dimensiones, sería necesario efectuar cálculos adicionales.

6. Rigidez flexional (K_{cc}) de una columna exterior equivalente:

$$K_b = 0 \quad (\text{no hay vigas})$$

R13.7.4

La rigidez de la columna exterior equivalente se determina combinando la rigidez de las columnas superior e inferior en el borde exterior del entrepiso con la rigidez torsional de una franja de la losa de entrepiso, paralela al borde normal a la dirección del pórtico equivalente y que se extiende en toda la longitud del panel entre las columnas. En el caso de una columna de esquina, obviamente la longitud es solamente la mitad de la longitud del panel. El ancho de la franja es igual a la dimensión de la columna normal a la dirección del pórtico equivalente (ACI 318, R13.7.5).

La rigidez de la columna se calcula en base a la rotación resultante de la aplicación de un momento al extremo simplemente apoyado de un voladizo apuntalado, $M = 4EI/L$. En este caso el resultado es:

$$K_c = 4 E_{cc} I_c / \ell_c = 4 E_{cc} \left[(14)^4 / (12) \right] / \left[(10) / (12) \right] = 106,7 E_{cc}$$

Debido a que las columnas por encima y por debajo de la losa tienen las mismas dimensiones, la rigidez total de las columnas es el doble de la rigidez de una sola columna:

$$\sum K_c = 2K_c = (2)(106,7 E_{cc}) = 213,4 E_{cc}$$

La rigidez torsional de la franja de losa se calcula de acuerdo con la metodología indicada en R13.7.5 de ACI 318, $K_t = \sum 9E_{cs} / L_2 (1 - c_2 / L_2)^3$. La constante torsional de la sección transversal, C , se define en la Sección 13.0 de ACI 318.

$$C = (1 - 0,63 x / y) (x^3 y / 3) = (1 - 0,636 \times 6,0 / 14) (6,0^3 \times 14 / 3) = 735,8 \text{ in.}^4$$

$$K_t = \frac{\sum 9E_{cs} C}{\ell_s (1 - c_2 / \ell_2)^3} = \frac{(2)(9)E_{cs} (735,8)}{(15)(12) \left(1 - \frac{14}{15 \times 12} \right)} = 93,9 E_{cs}$$

Para un Pórtico Exterior, $K_t = 93,9 E_{cs} / 2 = 47 E_{cs}$, $E_{cc} = (4,29 / 3,32) E_{cs} = 1,292 E_{cs}$

La rigidez de la columna equivalente se obtiene tratando la rigidez de la columna y la rigidez de los elementos torsionales como si fueran resortes en serie:

$$K_{ec} = \frac{1}{\frac{1}{\sum K_c} + \frac{1}{K_t}} = \frac{E_{cs}}{\left(\frac{1}{213,4 \times 1,292}\right) + \left(\frac{1}{93,9}\right)} = 70 E_{cs} = 19.370 \text{ ft-kips/rad}$$

$$\text{Para un Pórtico Exterior, } K_{ec} = \frac{E_{cs}}{\left(\frac{1}{213,4 \times 1,292}\right) + \left(\frac{1}{47,0}\right)} = 40,1 E_{cs} = 11.090 \text{ ft-kips/rad}$$

7. Flechas, usando las Ecuaciones (7) a (14):

$$\Delta_{\text{pórtico}} (\text{extremos fijos}) = \frac{w \ell_2^4}{384 E_{cs} I_{\text{pórtico}}} \quad \text{Ec. (10)}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{\text{pórtico}} (\text{extremos fijos}))_{d,d+\ell} &= \frac{(85,0 \text{ ó } 135,0 \text{ ó } 105,0)(15)^2 (12)^3}{(384)(3,32 \times 10^6)(3240 \text{ ó } 3129 \text{ ó } 3207)} \\ &= 0,027 \text{ in.}; 0,044 \text{ in.}; 0,034 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\Delta_{c,m} (\text{extremos fijos}) = (LDF)_{c,m} (\Delta_{\text{pórtico}} \text{ extremos fijos}) (I_{\text{pórtico}} / I_{c,m}) \quad \text{Ec. (11)}$$

Estas flechas se distribuyen a las franjas de columna e intermedias en función a la relación entre el momento total aplicado y la rigidez (M/EI) de las respectivas franjas y la del pórtico completo. Como se puede ver en el Paso 4 anterior, la fracción de momento flector asignada a las franjas de columna o intermedias varía entre los extremos y el centro del tramo. Por lo tanto, al aproximar las flechas mediante este método, se utiliza la fracción de distribución de momentos promedio (Factor de Distribución Lateral - LDF). Además, debido a que el momento de inercia equivalente varía cada vez que se supera el momento de fisuración, se utiliza un momento de inercia promedio. Este momento de inercia promedio se calcula en base a la Ecuación (9-8) de ACI 318 y la Ecuación (1) de este capítulo. Finalmente, como el módulo de elasticidad es constante en toda la losa, el término E aparece tanto en el numerador como en el denominador y por lo tanto se cancela. Los factores de distribución lateral se calculan de la siguiente manera:

Para la franja de columna:

$$LDF_c = 1/2 \left[1/2 (M_{\text{int}}^- + M_{\text{ext}}^-) + M^+ \right] = 1/2 \left[1/2 (0,75 + 1,00) + 0,60 \right] = 0,738$$

Para la franja intermedia:

$$LDF_m = 1 - LDF_c = 0,262$$

$$(\Delta_c (\text{extremos fijos}))_d = (0,738)(0,027)(2) = 0,040 \text{ in.}$$

$$(\Delta_c (\text{extremos fijos}))_{d+\ell} = (0,738)(0,044)(3129/1509) = 0,067 \text{ in.}$$

$$(\Delta_c (\text{extremos fijos}))_\ell = 0,67 - 0,040 = 0,027 \text{ in.}$$

$$(\Delta_c (\text{extremos fijos}))_{\text{sos}} = (0,738)(0,034)(3207/1587) = 0,051 \text{ in.}$$

$$(\Delta_m \text{ (extremos fijos)})_d = (0,262)(0,027)(2) = 0,014 \text{ in.}$$

$$(\Delta_m \text{ (extremos fijos)})_{d+\ell} = (0,262)(0,044)(3129/1620) = 0,022 \text{ in.}$$

$$(\Delta_m \text{ (extremos fijos)})_\ell = 0,022 - 0,014 = 0,008 \text{ in.}$$

$$(\Delta_m \text{ (extremos fijos)})_{\text{sos}} = (0,262)(0,034)(3207/1587) = 0,018 \text{ in.}$$

Además de los desplazamientos de los extremos fijos hallados, es necesario sumar un incremento o flecha adicional a cada uno debido a la rotación real que ocurre en los apoyos. La magnitud del incremento es igual a $qL/8$. Las rotaciones, q , se determinan como los momentos netos en las ubicaciones de las columnas divididos por las rigideces efectivas de las columnas. En este caso, el momento de la franja de columna en la columna de la esquina del entrepiso es igual a la mitad del 100% de $0,26 \times M_o$ (ACI 318, Secciones 13.6.3.3 y 13.6.4.2). Debido a que la franja de columna en el borde del entrepiso tiene sólo la mitad del ancho de las franjas de columna interiores, sólo actúa la mitad del momento asignado. Los momentos netos en las otras columnas son muy pequeños o nulos, y por lo tanto se desprecian. Los momentos netos en una columna de esquina para los tres casos de carga son:

$$(M_{\text{neto}})_d = 1/2 \times 0,26 \times 1,00 \times (M_o)_d = 1/2 [(0,26)(1,00)](30,48) = 3,96 \text{ ft-kips}$$

$$(M_{\text{neto}})_{d+\ell} = 1/2 \times 0,26 \times 1,00 \times (M_o)_{d+\ell} = 1/2 [(0,26)(1,00)](48,41) = 6,29 \text{ ft-kips}$$

$$(M_{\text{neto}})_{\text{sos}} = 1/2 \times 0,26 \times 1,00 \times (M_o)_{\text{sos}} = 1/2 [(0,26)(1,00)](37,65) = 4,89 \text{ ft-kips}$$

Tanto para la franja de columna como para la franja intermedia,

$$\theta_d \text{ extremo} = (M_{\text{neto}})_d / K_{\text{ec prom.}} = 3,96 / 11.090 = 0,000357 \text{ rad} \quad \text{Ec. (12)}$$

$$\theta_{d+\ell} \text{ extremo} = 6,29 / 11.090 = 0,000567 \text{ rad}$$

$$\theta_{\text{sos}} \text{ extremo} = 4,89 / 11.090 = 0,000441 \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = (\theta \text{ extremo})(\ell/8)(I_g / I_e)_{\text{pórtico}} \quad \text{Ec. (14)}$$

$$(\Delta\theta)_d = (0,000357)(15)(12)(1)/8 = 0,008 \text{ in.}$$

$$(\Delta\theta)_{d+\ell} = (0,000567)(15)(12)(1620/1509)/8 = 0,014 \text{ in.}$$

$$(\Delta\theta)_\ell = 0,0014 - 0,008 = 0,006 \text{ in.}$$

$$(\Delta\theta)_{\text{sos}} = (0,000441)(15)(12)/8 = 0,010 \text{ in.}$$

Estas flechas debidas a las rotaciones que hemos calculado corresponden a las franjas de columna. Las flechas debidas a las rotaciones de los extremos para las franjas intermedias se supondrán iguales a las de las franjas de columna. Por lo tanto, las flechas de las franjas se calculan mediante la relación general:

$$\Delta_{c,m} = \Delta_{c,m} \text{ (extremos fijos)} + (\Delta\theta) \quad \text{Ec. (9)}$$

$$(\Delta_c)_d = 0,040 + 0,008 = 0,048 \text{ in.}$$

$$(\Delta_m)_d = 0,014 + 0,008 = 0,022 \text{ in.}$$

$$(\Delta_c)_\ell = 0,027 + 0,006 = 0,033 \text{ in.}$$

$$(\Delta_m)_\ell = 0,008 + 0,006 = 0,014 \text{ in.}$$

$$(\Delta_c)_{\text{sos}} = 0,051 + 0,010 = 0,061 \text{ in.}$$

$$(\Delta_m)_{\text{sos}} = 0,018 + 0,010 = 0,028 \text{ in.}$$

$\Delta = \Delta_{\text{cx}} + \Delta_{\text{my}}$ = flecha en el centro de un panel de esquina

Ec. (7)

$$(\Delta_i)_d = 0,048 + 0,022 = 0,070 \text{ in.}$$

$$(\Delta_i)_\ell = 0,033 + 0,014 = 0,047 \text{ in.}$$

$$(\Delta_i)_{\text{sos}} = 0,061 + 0,028 = 0,089 \text{ in.}$$

La flecha a largo plazo se puede calcular usando la Ecuación (9-11) de ACI 318 (Nota: $\rho' = 0$):

Sólo para carga permanente:

$$(\Delta_{\text{cp+sh}})_d = 2,0 \times (\Delta_i)_d = (2)(0,070) = 0,140 \text{ in.}$$

Para carga sostenida (carga permanente + 40% de la sobrecarga):

$$(\Delta_{\text{cp+sh}})_{\text{sos}} = 2,0 \times (\Delta_i)_{\text{sos}} = (2)(0,109) = 0,218 \text{ in.}$$

La flecha a largo plazo debida a la carga sostenida más la sobrecarga se calcula como:

$$(\Delta_{\text{cp+sh}})_{\text{sos}} + (\Delta_i)_\ell = 0,218 + 0,047 = 0,265 \text{ in.}$$

Estas flechas calculadas se comparan con las flechas admisibles de la Tabla 9.5(b) del código de la siguiente manera:

Cubiertas planas que no soportan, ni están unidas a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

$$(\Delta_i)_\ell \leq (\ell_n \text{ ó } \ell) / 180 = (13,83 \text{ ó } 15)(12) / 180 = 0,92 \text{ in. ó } 1,00 \text{ in.} > 0,047 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Entrepisos que no soportan, ni están unidos a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

$$(\Delta_i)_\ell \leq (\ell_n \text{ ó } \ell) / 360 = 0,46 \text{ in. ó } 0,50 \text{ in.} > 0,047 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Cubiertas o entrepisos que soportan, o están unidos a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

$$\Delta_{(cp+sh)} + (\Delta_i)_\ell \leq (\ell_n \text{ ó } \ell) / 480 = 0,35 \text{ in. ó } 0,38 \text{ in.} > 0,265 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Cubiertas o entrepisos que soportan, o están unidos a, elementos no estructurales que no son susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

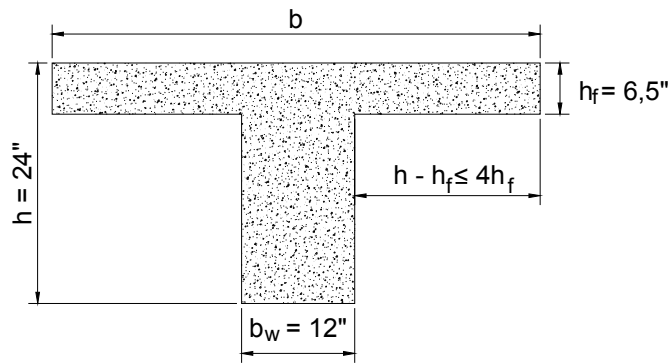
$$\Delta_{(cp+sh)} + (\Delta_i)_\ell \leq (\ell_n \text{ ó } \ell) / 240 = 0,69 \text{ in. ó } 0,75 \text{ in.} > 0,265 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Todas las flechas calculadas son satisfactorias en los cuatro casos.

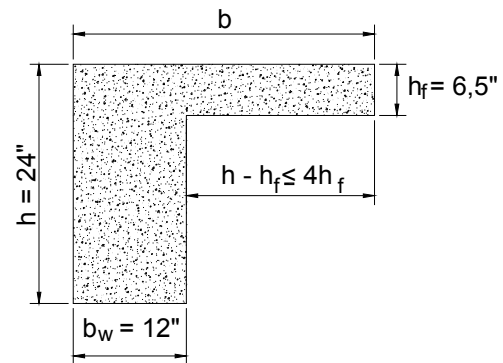
Ejemplo 10.4 – Losa armada en dos direcciones apoyada en vigas

Se pide: Altura o espesor mínimo para control de las flechas.

Datos:



Viga interior



Viga de borde

$f_y = 60.000$ psi; espesor de la losa $h_f = 6,5$ in.

Paneles cuadrados: 22×22 ft entre los centros de las columnas

Todas las vigas: $b_w = 12$ in. $h = 24$ in. $\ell_n = 22 - 1 = 21$ ft

Observar que en este análisis no se requieren f'_c ni las cargas.

Cálculos y discusión

Referencia del Código

1. Ancho efectivo b y propiedades de la sección, usando la Tabla 8-2:

a. Viga interior:

$$I_s = (22)(12)(6,5)^3 / 12 = 6040 \text{ in.}^4$$

$$h - h_f = 24 - 6,5 = 17,5 \text{ in.} \leq 4h_f = (4)(6,5) = 26 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

$$\text{Por lo tanto, } b = 12 + (2)(17,5) = 47 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned} y_t &= h - (1/2) \left[(b - b_w) h_f^2 + b_w h^2 \right] / \left[(b - b_w) h_f + b_w h \right] \\ &= 24 - (1/2) \left[(35)(6,5)^2 + (12)(24)^2 \right] / \left[(35)(6,5) + (12)(24) \right] \\ &= 15,86 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_b &= (b - b_w) h_f^3 / 12 + b_w h^3 / 12 + (b - b_w) h_f (h - h_f / 2 - y_t)^2 + b_w h (y_t - h / 2)^2 \\ &= (35)(6,5)^3 / 12 + (12)(24)^3 / 12 + (35)(6,5)(24 - 3,25 - 15,86)^2 + (12)(24)(15,86 - 12)^2 \\ &= 24.360 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

$$\alpha = E_{cb} I_b / E_{cs} I_s = I_b / I_s = 24.360 / 6040 = 4,03$$

b. Viga de borde:

$$I_s = (11)(12)(6,5)^3 / 12 = 3020 \text{ in.}^4$$

$$b = 12 + (24 - 6,5) = 29,5 \text{ in.}$$

$$y_t = 24 - (1/2) [(17,5)(6,5)^2 + (12)(24)^2] / [(17,5)(6,5) + (12)(24)] = 14,48 \text{ in.}$$

$$I_b = (17,5)(6,5)^3 / 12 + (12)(24)^3 / 12 + (17,5)(6,5)(24 - 3,25 - 14,48)^2 + (12)(24)(14,48 - 12)^2 \\ = 20.470 \text{ in.}^4$$

$$\alpha = I_b / I_s = 20.470 / 3020 = 6,78$$

Valores de α_m y β :

α_m (valor promedio de α para vigas en todos los bordes de un panel):

$$\text{Panel interior: } \alpha_m = 4,03$$

$$\text{Panel lateral: } \alpha_m = [(3)(4,03) + 6,78] / 4 = 4,72$$

$$\text{Panel de esquina: } \alpha_m = [(2)(4,03) + (2)(6,78)] / 4 = 5,41$$

Para paneles cuadrados, β = relación de las luces libres en las dos direcciones = 1

2. Espesor mínimo:

9.5.3.3

Como para todos los paneles $\alpha_m > 2,0$ se puede aplicar la Ecuación (9-12).

$$h_{\min} = \frac{\ell_n \left(0,8 + \frac{f_y}{200.000} \right)}{36 + 9 \beta} \quad \text{Ec. (9-13)}$$

$$= \frac{(21 \times 12) \left(0,8 + \frac{60.000}{200.000} \right)}{36 + 9(1)} = 6,16 \text{ in.} \quad (\text{todos los paneles})$$

Por lo tanto, el espesor de la losa igual a 6,5 in. > 6,16 in. es satisfactorio para todos los paneles, y no es necesario verificar las flechas.

Ejemplo 10.5 – Viga Te pretensada de un solo tramo

Se pide: Analizar las contraflechas y flechas instantáneas y las flechas a largo plazo.

Datos:

8ST36 (Detalles de diseño de acuerdo con el Manual PCI, 3ª Edición, 1985)

Luz = 80 ft, la viga está parcialmente fisurada

$f'_{ci} = 3500$ psi $f'_c = 5000$ psi (hormigón de peso normal)

$f_{pu} = 270.000$ psi

$E_p = 27.000.000$ psi

Cables deprimidos (1 Pt.) de 14-1/2 in. de diámetro

Cables no pretensados de 4-1/2 in. de diámetro

(Suponer el mismo baricentro al calcular I_{cr})

$P_i = (0,7) (14) (0,153) (270) = 404,8$ kips

$P_o = (0,90) (404,8) = 364$ kips

$P_e = (0,78) (404,8) = 316$ kips

$e_e = 11,15$ in. $e_c = 22,51$ in.

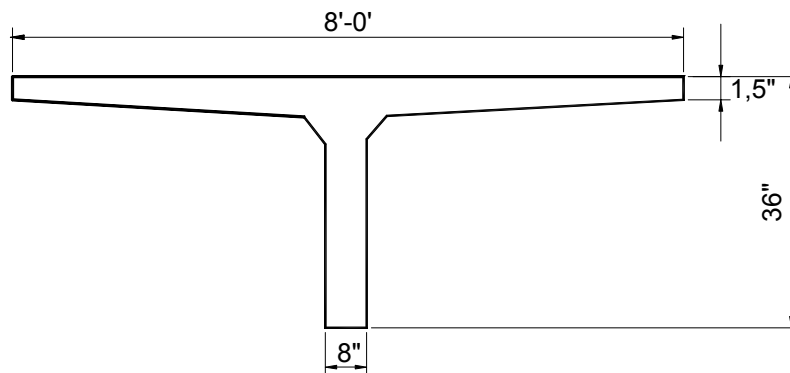
$y_t = 26,01$ in. $A_g = 570$ in.² $I_g = 68.920$ in.⁴

Peso propio, $w_o = 594$ lb/ft

Carga impuesta DL, $w_s = (8) (10 \text{ lb/ft}^2) = 80$ lb/ft. Esta carga se aplica a una edad de dos meses ($\beta_s = 0,76$ en el Término (6) de la Ecuación (15)).

Sobrecarga, $w_\ell = (8) (51 \text{ lb/ft}^2) = 408$ lb/ft

La capacidad es determinada por la resistencia a la flexión.



Cálculos y discusión

Referencia del Código

1. Relaciones longitud-profundidad (usando el Manual PCI):

Las relaciones típicas longitud-profundidad para las vigas Te simples son entre 25 y 35 para los entrepisos y entre 35 y 40 para las cubiertas, que comparando con $(80) (12) / 36 = 27$ indica que se trata de una viga relativamente alta. Resulta que se satisfacen todas las flechas admisibles de la Tabla 9.5(b).

2. Momentos para calcular las flechas:

$$M_o = \frac{w_o \ell^2}{8} = \frac{(0,594)(80)^2}{8} = 475 \text{ ft-kips}$$

($\times 0,96 = 456$ ft-kips a $0,4\ell$ para calcular las tensiones e I_e – tendones deprimidos en un punto)

$$M_s = \frac{w_s \ell^2}{8} = \frac{(0,080)(80)^2}{8} = 64 \text{ ft-kips (61 ft-kips a } 0,4\ell)$$

$$M_\ell = \frac{w_\ell \ell^2}{8} = \frac{(0,408)(80)^2}{8} = 326 \text{ ft-kips (313 ft-kips a } 0,4\ell)$$

3. Módulo de rotura, módulo de elasticidad, momento de inercia:

$$f_r = 7,5\sqrt{f'_c} = 7,5\sqrt{5000} = 530 \text{ psi} \quad \text{Ec. (9-10)}$$

$$E_c = w_c^{1,5} 33 \sqrt{f'_c} = (150)^{1,5} 33 \sqrt{5000} = 3,59 \times 10^6 \text{ psi} \quad 8.5.1$$

$$E_c = w_c^{1,5} 33 \sqrt{f'_c} = (150)^{1,5} 33 \sqrt{5000} = 4,29 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$n_s = \frac{E_p}{E_c} = \frac{27 \times 10^6}{4,29 \times 10^6} = 6,3$$

El momento de inercia de la sección fisurada a $0,4\ell$ se puede obtener mediante la fórmula aproximada dada en la Ecuación 4.8.2 del Manual PCI:

$$\begin{aligned} I_{cr} &= nA_{st}d^2 \left(1 - 1,6\sqrt{np}\right) = (6,3)(18 \times 0,153)(30,23)^2 \left(1 - 1,6\sqrt{6,3 \times 0,000949}\right) \\ &= 13.890 \text{ in.}^4 \text{ (a } 0,4\ell) \end{aligned}$$

Se puede demostrar que el momento de inercia de la sección fisurada calculado mediante las fórmulas dadas en la Tabla 10.2 es muy similar al valor obtenido mediante el método aproximado utilizado. Los resultados difieren en aproximadamente 1%; por lo tanto, cualquiera de ambos métodos es adecuado para este caso.

4. Determinación de la clasificación de la viga:

A fin de clasificar la viga de acuerdo con los requisitos de la Sección 18.3.3 de ACI, se calcula la máxima tracción por flexión y se la compara con el módulo de rotura. Las clasificaciones se definen de la siguiente manera:

$$\text{Clase U:} \quad f_t \leq 7,5\sqrt{f'_c}$$

$$\text{Clase T:} \quad 7,5\sqrt{f'_c} < f_t \leq 12\sqrt{f'_c}$$

$$\text{Clase C:} \quad f_t > 12\sqrt{f'_c}$$

Las tres clases de la clasificación se refieren a comportamiento de sección no fisurada (U), transición (T) y fisurada (C).

La máxima tensión de tracción debida a las cargas de servicio y las fuerzas de pretensado se calculan usando las fórmulas habituales para vigas solicitadas a momentos flectores y cargas axiales. Se puede demostrar que en una viga pretensada las máximas tensiones por flexión ocurren a aproximadamente $0,4\ell$. La excentricidad de la fuerza de pretensado a $0,4\ell$ ($e = 20,24 \text{ in.}$) se obtiene interpolando linealmente entre la excentricidad en el extremo ($e_e = 11,15 \text{ in.}$) y la excentricidad en el centro ($e_c = 22,51 \text{ in.}$). El cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$M_{tot} = M_d + M_\ell$$

$$f_t = \frac{M_{tot} y_t}{I_g} - \frac{P_e \cdot y_t}{I_g} - \frac{P_e}{A_g}$$

$$= [(456 + 61 + 313) (12) - (316) (20,24)] [(26,01) / 68.929] - 316 / 570$$

$$f_t = 791 \text{ psi}$$

Verificar la relación entre la tensión de tracción calculada y la raíz cuadrada de f'_c :

$$\frac{f_t}{\sqrt{f'_c}} = \frac{791}{\sqrt{5000}} = 11,2$$

La relación está comprendida entre 7,5 y 12 por lo tanto, de acuerdo con las definiciones de la Sección 18.3.3 de ACI 318, la clasificación de la viga es Clase T, región de transición. La Tabla R18.3.3 exige que las flechas para esta clasificación se basen en las propiedades de la sección fisurada, asumiendo una relación momento-curvatura bilineal; la Sección 9.5.4.2 del código permite realizar los cálculos en función de una relación momento-curvatura bilineal o de un momento de inercia equivalente determinado de acuerdo con la Ecuación (9-8).

5. Determinar el momento por sobrecarga que provoca la primera fisuración:

Verificar la tensión de tracción debida exclusivamente a la carga permanente y las fuerzas de pretensado. Como se mencionó anteriormente, las máximas tensiones de tracción ocurren a aproximadamente 0,4ℓ:

$$f_t = [(456 + 61) (12) - (316) (20,4)] [(26,01) / 68.920] - 316 / 570 = -627 \text{ psi}$$

El signo negativo indica que se trata de una tensión de compresión. Por lo tanto, la sección es no fisurada bajo la carga permanente más las fuerzas de pretensado, y las flechas por carga permanente se pueden basar en el momento de inercia de la sección bruta de hormigón. En párrafos anteriores se demostró que la máxima tensión de tracción debida a la combinación de carga permanente más sobrecarga es igual a 791 psi, valor mayor que el módulo de rotura, $f_r = 530$ psi.

Esto indica que las flechas debidas a la sobrecarga se deben calcular en base a un análisis de sección fisurada, ya que el comportamiento es inelástico luego de agregar la totalidad de la sobrecarga. En particular, la Tabla R18.3.3 de ACI 318 exige utilizar la relación bilineal para determinar las flechas en estos casos. Sin embargo, la Sección 9.5.4.2 permite calcular las flechas ya sea en base a la relación bilineal o en base a un momento de inercia efectivo.

Para calcular la flecha suponiendo una relación momento-curvatura bilineal, primero es necesario determinar la fracción de la sobrecarga total que provoca la primera fisuración. Esto significa hallar la fracción de sobrecarga que producirá una máxima tensión de tracción igual a f_r . El valor deseado del momento por sobrecarga se puede obtener reacomodando la ecuación utilizada anteriormente para determinar la tensión de tracción total (cuando se determinó la clasificación), y fijando la tensión de tracción igual a f_r . El valor del momento se obtiene de la siguiente manera (Nota: Los valores se calculan a 0,4ℓ):

$$\text{Momento de fisuración por sobrecarga} = \frac{f_r I_g}{y_t} + P_e e + \frac{P_e I_g}{A_g y_t} - M_d$$

$$= (530) (68.920) / (12.000) (26,01) + 316 (20,24 / 12) + [(316 / 570) (68.920 / 26,01)] / 12 - 517$$

$$= 117 + 533 + 122 - 517$$

$$= 255 \text{ ft-kips}$$

La relación entre el momento de fisuración por sobrecarga y el momento total por sobrecarga es:

$$255 / 313 = 0,815$$

6. Contraflecha y flecha, usando la Ecuación (15):

$$\begin{aligned} \text{Término (1)} \quad \Delta_{po} &= \frac{P_o (e_c - e_e) \ell^2}{12 E_{ci} I_g} + \frac{P_o e_e \ell^2}{8 E_{ci} I_g} \quad (\text{del Manual PCI para cables deprimidos en un solo punto}) \\ &= \frac{(364)(22,51 - 11,15)(80)^2 (12)^2}{(12)(3590)(68.920)} + \frac{(364)(11,15)(80)^2 (12)^2}{(8)(3590)(68.920)} \\ &= 3,17 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\text{Término (2)} \quad \Delta_o = \frac{5 M_o \ell^2}{48 E_{ci} I_g} = \frac{(5)(475)(80)^2 (12)^3}{(48)(3590)(68.590)} = 2,21 \text{ in.}$$

$$\text{Término (3)} \quad k_r = 1 / \left[1 + (A_s / A_{ps}) \right] = 1 / \left[1 + (4 / 14) \right] = 0,78$$

$$\left[-\frac{\Delta P_u}{P_o} + (k_r C_u) \left(1 - \frac{\Delta P_u}{2 P_o} \right) \right] \Delta P_o$$

El aumento en la fuerza de pretensado es:

$$\Delta P_u = P_o - P_e = 364 - 316 = 48 \text{ kips}$$

En consecuencia:

$$\Delta P_u / P_o = 48 / 364 = 0,13$$

Por lo tanto, la flecha es:

$$= [-0,13 + (0,78 \times 2,0) (1 - 0,065)] (3,17) = 4,21 \text{ in.}$$

$$\text{Término (4)} \quad (k_r C_u) \Delta_o = (0,78)(2,0)(2,21) = 3,45 \text{ in.}$$

$$\text{Término (5)} \quad \Delta_s = \frac{5 M_s \ell^2}{48 E_c I_g} = \frac{(5)(64)(80)^2 (12)^3}{(48)(4290)(68.920)} = 0,25 \text{ in.}$$

$$\text{Término (6)} \quad (\beta_s k_r C_u) \Delta_s = (0,76)(0,78)(1,6)(0,25) = 0,24 \text{ in.}$$

$$\text{Término (7)} \quad \text{Flecha inicial debida a la sobrecarga}$$

La relación entre el momento de fisuración por sobrecarga y el momento total por sobrecarga ya se determinó previamente. Para calcular la flecha de acuerdo con la relación momento-curvatura bilineal, la flecha debida a la fracción de la sobrecarga por debajo del valor de fisuración se basa en el momento de inercia de la sección bruta; la flecha debida al resto de la sobrecarga se basa en el momento de inercia de la sección fisurada. Además, las flechas

se basan en momentos en el centro del tramo, aún cuando el momento que provoca la primera fisuración se evaluó a 0,4ℓ.

La fórmula usada para la flecha es la expresión habitual:

$$\Delta = \frac{5 ML^2}{48 EI}$$

Para la porción de la sobrecarga aplicada por debajo de la carga que provoca el momento de fisuración, el valor de M es el valor calculado anteriormente, 255 ft-kips, y el momento de inercia es el correspondiente a la sección bruta:

$$\Delta_{\ell 1} = 5(255)(80)^2 (12)^3 / 48(3590)(68.590) = 1,19 \text{ in.}$$

La flecha debida al resto de la sobrecarga se calcula de manera similar, con un momento de 313 - 255 = 58 ft-kips y el momento de inercia de la sección fisurada, 13.890 in.4.

$$\Delta_{\ell 2} = 5(58)(80)^2 (12)^3 / 48(3590)(13.890) = 1,34 \text{ in.}$$

La flecha total debida a la sobrecarga es la sumatoria de las dos componentes calculadas:

$$\Delta_{\ell} = 1,19 + 1,34 = 2,53 \text{ in.}$$

Mediante otros cálculos se puede verificar que la flecha calculada en base al momento debido a la totalidad de la sobrecarga y el momento de inercia efectivo, calculado conforme a la Ecuación 9-8 de ACI 318, es ligeramente menor que el calculado en este ejemplo en base a una relación momento-curvatura bilineal.

Resultados combinados y comparación con los límites establecidos en el código:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{(1)} & \underline{(2)} & \underline{(3)} & \underline{(4)} & \underline{(5)} & \underline{(6)} & \underline{(7)} \\ \Delta_u = -317 & + 2,21 & - 4,21 & + 3,45 & + 0,25 & + 0,24 & + 2,53 = 1,30 \text{ in.} \downarrow \end{array} \quad \text{Ec. (15)}$$

$$\text{Contraflecha inicial} = \Delta_{po} - \Delta_o = 3,17 - 2,21 = 0,96 \text{ in.} \quad \uparrow \text{ comparada con 1,6 in. durante el montaje en el Manual PCI.}$$

$$\text{Contraflecha residual} = \Delta_{\ell} - \Delta_u = 2,53 - 0,87 = 1,66 \text{ in.} \quad \uparrow \text{ comparada con 1,1 in.}$$

Flecha dependiente del tiempo más flecha por carga permanente impuesta y sobrecarga:

$$= -4,21 + 3,45 + 0,25 + 0,24 + 2,53 = 2,26 \text{ in.} \quad \text{o}$$

$$= \Delta_u - (\Delta_o - \Delta_{po}) = 0,87 - (-0,96) = 2,26 \text{ in.} \quad \downarrow$$

Estas flechas calculadas se comparan con las flechas admisibles indicadas en la Tabla 9.5(b) de la siguiente manera:

$$\ell / 180 = (80)(12) / 180 = 5,33 \text{ contra } \Delta_{\ell} = 2,53 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

$$\ell / 360 = (80)(12) / 360 = 2,67 \text{ contra } \Delta_{\ell} = 2,53 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

$$\ell / 480 = (80)(12) / 480 = 2,00 \text{ contra la flecha dependiente del tiempo, etc.} = 2,26 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Observar que la flecha a largo plazo que ocurre luego de unir los elementos no estructurales (2,26 in.) supera el límite de $L/480$. En realidad satisface $L/425$. Como el límite de $L/480$ sólo se aplica en el caso de *elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas*, para poder juzgar si las flechas calculadas son aceptables sería necesario considerar el uso particular que tendrá la viga. Ver las notas al pie de la Tabla 9.5(b) de ACI 318.

Ejemplo 10.6 – Viga compuesta no pretensada sin apuntalar

Se pide: Analizar las flechas a corto plazo y las flechas últimas a largo plazo.

Datos:

Hormigón de peso normal

Losa: $f'_c = 3000$ psi

Viga prefabricada: $f'_c = 4000$ psi

$f_y = 40.000$ psi

$A_s = 3$ barras No. 9 = 3,00 in.²

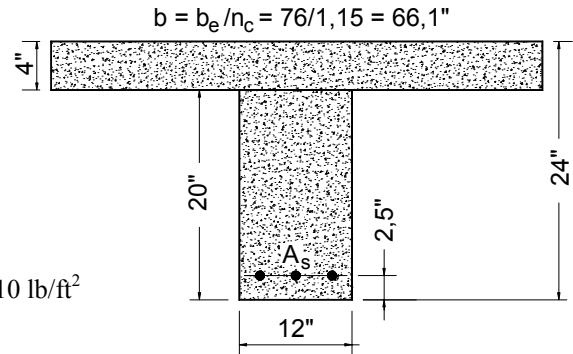
$E_s = 29.000.000$ psi

Carga permanente impuesta (excluyendo el peso de la viga y la losa) = 10 lb/ft²

Sobrecarga = 75 lb/ft² (20% sostenida o de larga duración)

Tramo simple = 26 ft = 312 in. Separación 8 ft = 96 in.

$b_e = 312/4 = 78,0$ in. o separación = 96,0 in. ó $16(4) + 12 = 76,0$ in.



Cálculos y discusión

Referencia del Código

1. Espesor mínimo para elementos que no soportan, ni están unidos a, tabiques divisorios u otros elementos susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas:

$$h_{\min} = \left(\frac{\ell}{16} \right) (0,80 \text{ para } f_y) = \left(\frac{312}{16} \right) (0,80) = 15,6 \text{ in.} < h = 20 \text{ in.} \text{ ó } 24 \text{ in.}$$

Tabla 9.5(a)

2. Cargas y momentos:

$$w_1 = (10 \text{ lb/ft}^2) (8) + (150 \text{ lb/ft}^3) (96) (4) / 144 = 480 \text{ lb/ft}$$

$$w_2 = (150 \text{ lb/ft}^3) (12) (20) / 144 = 250 \text{ lb/ft}$$

$$w_\ell = (150 \text{ lb/ft}^3) (12) (20) / 144 = 600 \text{ lb/ft}$$

$$M_1 = w_1 \ell^2 / 8 = (0,480) (26)^2 / 8 = 40,6 \text{ ft-kips}$$

$$M_2 = w_2 \ell^2 / 8 = (0,250) (26)^2 / 8 = 21,1 \text{ ft-kips}$$

$$M_\ell = w_\ell \ell^2 / 8 = (0,600) (26)^2 / 8 = 50,7 \text{ ft-kips}$$

3. Módulo de rotura, modulo de elasticidad, relación de módulos:

$$(E_c)_1 = w_c^{1,5} 33 \sqrt{f'_c} = (150)^{1,5} 33 \sqrt{3000} = 3,32 \times 10^6 \text{ psi}$$

8.5.1

$$(f_r)_2 = 7,5 \sqrt{f'_c} = 7,5 \sqrt{4000} = 474 \text{ psi}$$

Ec. (9-10)

$$(E_c)_2 = (150)^{1,5} 33 \sqrt{4000} = 3,83 \times 10^6 \text{ psi}$$

8.5.1

$$n_c = \frac{(E_c)_2}{(E_c)_1} = \frac{3,83}{3,32} = 1,15$$

$$n = \frac{E_s}{(E_c)_2} = \frac{29}{3,83} = 7,56$$

4. Momentos de inercia de la sección bruta y de la sección fisurada, usando la Tabla 10-2:

Sección prefabricada:

$$I_g = (12)(20)^3 / 12 = 8000 \text{ in.}^4$$

$$B = b / (nA_s) = 12 / (7,56)(3,00) = 0,529 / \text{in.}$$

$$kd = (\sqrt{2dB+1} - 1) / B = (\sqrt{(2)(17,5)(0,529)+1} - 1) / 0,529 = 6,46 \text{ in.}$$

$$I_{cr} = \frac{bk^3d^3}{3} + nA_s(d - kd)^2 = (12)(6,46)^3 / 3 + (7,56)(3,00)(17,5 - 6,46)^2 = 3840 \text{ in.}^4$$

Sección compuesta:

$$y_t = h - (1/2) \left[(b - b_w)h_f^2 + b_w h^2 \right] / \left[(b - b_w)h_f + b_w h \right]$$

$$= 24 - (1/2) [(54,1)(4)^2 + (12)(24)^2] / [(54,1)(4) + (12)(24)] = 16,29 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned} I_g &= (b - b_w)h_f^3 / 12 + b_w h^3 / 12 + (b - b_w)h_f(h - h_f/2 - y_t)^2 + b_w h(y_t - h/2)^2 \\ &= (54,1)(4)^3 / 12 + (12)(24)^3 / 12 + (54,1)(4)(24 - 2 - 16,29)^2 + (12)(24)(16,29 - 12)^2 \\ &= 26.470 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

$$B = \frac{b}{nA_s} = \frac{66,1}{(7,56)(3,00)} = 2,914$$

$$d = \frac{\sqrt{2dB+1} - 1}{B} = \frac{\sqrt{(2)(21,5)(2,914)+1} - 1}{2,914}$$

= 3,51 in. < h_f = 4 in. Por lo tanto, se debe tratar como un área comprimida rectangular.

$$\begin{aligned} I_{cr} &= bk^3d^3 / 3 + nA_s(d - kd)^2 = (66,1)(3,51)^3 / 3 + (7,56)(3,00)(21,5 - 3,51)^2 \\ &= 8295 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

$$I_2 / I_c = \left[(I_2 / I_c)_g + (I_2 / I_c)_{cr} \right] / 2 = \left[(8000 / 26.470) + (3840 / 8295) \right] / 2 = 0,383$$

5. Momentos de inercia efectivos, usando la Ecuación (9-8):

Para el Término (1), Ecuación (19) — Sección prefabricada:

$$M_{cr} = f_r I_g / y_t = (474)(8000)/(10)(12.000) = 31,6 \text{ ft-kips} \quad \text{Ec. (9-9)}$$

$$M_{cr} / M_2 = 31,6 / 21,1 > 1 \quad \text{Por lo tanto } (I_e)_2 = I_g = 8000 \text{ in.}^4$$

Para el Término (6), Ecuación (19) — Sección prefabricada:

$$\left[M_{cr} / (M_1 + M_2) \right]^3 = \left[31,6 / (40,6 + 21,1) \right]^3 = 0,134$$

$$(I_e)_{1+2} = (M_{cr} / M_a)^3 I_g + \left[1 - (M_{cr} / M_a)^3 \right] I_{cr} \leq I_g \quad \text{Ec. (9-8)}$$

$$= (0,134)(8000) + (1 - 0,134)(3840) = 4400 \text{ in.}^4$$

6. Flecha, usando la Ecuación (19):

$$\text{Término (1)} — (\Delta_i)_2 = \frac{K(5/48)M_2 \ell^2}{(E_c)_2 (I_e)_2} = \frac{(1)(5/48)(21,1)(26)^2(12)^3}{(3830)(8000)} = 0,084 \text{ in.}$$

Término (2) — $k_r = 0,85$ (no hay armadura comprimida en la viga prefabricada)

$$0,77 k_r (\Delta_i)_2 = (0,77)(0,85)(0,084) = 0,055 \text{ in.}$$

$$\text{Término (3)} — 0,83 k_r (\Delta_i)_2 \frac{I_2}{I_c} = (0,83)(0,85)(0,083)(0,383) = 0,023 \text{ in.}$$

Término (4) — $k_{sh} = 1/8$. Sección prefabricada: $\rho = (100)(3,00)/(12)(17,5) = 1,43\%$

De la Figura 8-3, $A_{sh} = 0,789$

$$\phi_{sh} = A_{sh} (\epsilon_{sh})_u / h = (0,789)(400 \times 10^{-6}) / 20 = 15,78 \times 10^{-6} / \text{in.}$$

$$\Delta_{sh} = K_{sh} \phi_{sh} \ell^2 = (1/8)(15,78 \times 10^{-6})(26)^2(12)^2 = 0,192 \text{ in.}$$

La relación entre la deformación por contracción a los 2 meses y la última es 0,36 (Tabla 2.1, Referencia 10.4). Por lo tanto, la flecha por contracción de la viga prefabricada a los 2 meses es:

$$0,36 \Delta_{sh} = (0,36)(0,192) = 0,069 \text{ in.}$$

$$\text{Término (5)} — 0,64 \Delta_{sh} \frac{I_2}{I_c} = (0,64)(0,192)(0,383) = 0,047 \text{ in.}$$

$$\text{Término (6)} — (\Delta_i)_1 = \frac{K(5/48)(M_1 + M_2) \ell^2}{(E_c)_2 (I_e)_{1+2}} - (\Delta_i)_2$$

$$= \frac{(1)(5/48)(40,6 + 21,1)(26)^2(12)^3}{(3830)(4400)} - 0,088 = 0,358 \text{ in.}$$

Término (7) — Flecha adicional a largo plazo de la viga compuesta debida a la carga permanente de la losa. La losa se cuela a los 2 meses. Por lo tanto, la fracción del coeficiente de fluencia lenta, C_u , se obtiene multiplicando el valor correspondiente a condiciones normales (1,60) por un valor $b_s = 0,89$. (Ver la explicación del Término (6) de la Ecuación (15)). La fluencia lenta total de la viga se reduce por la relación entre el momento de inercia de la viga y el momento de inercia de la sección compuesta. Al igual que antes, k_r se toma igual a 0,85:

$$(0,89)(1,60)k_r(\Delta_i)_1 \frac{I_2}{I_c} = (0,89)(1,60)(0,85)(0,358)(0,383) = 0,166 \text{ in.}$$

Término (8) — Debido a que la viga y la losa se colaron en momentos diferentes, habrá alguna contribución a la flecha total por la tendencia de las dos partes de sufrir fluencia lenta y contracción a tasas diferentes. En la Tabla 2.1 de ACI 435R-95 (Referencia 10.4) se observa que la fluencia lenta y la contracción a los dos meses es casi la mitad del valor total. En consecuencia, el comportamiento de la sección compuesta será afectado por esta diferencia de edades. Calcular correctamente la flecha resultante es muy complejo. En este ejemplo, la flecha debida a las diferentes edades del hormigón se aproxima como la mitad de la flecha por carga permanente de la viga debida a la carga permanente de la losa. Se advierte al lector que este procedimiento sólo permite obtener una estimación aproximada. La mitad de la flecha por carga permanente es

$$\Delta_{ds} = 0,50(\Delta_i)_1 = (0,50)(0,358) = 0,179 \text{ in.} \quad (\text{estimación aproximada})$$

Término (9) — Usando el método alternativo,

$$(\Delta_i)_\ell = \frac{K(5/48)M_\ell \ell^2}{(E_c)_2(I_c)_{cr}} = \frac{(1)(5/48)(50,7)(26)^2(12)^3}{(3830)(8295)} = 0,194 \text{ in.}$$

Término (10) — $k_r = 0,85$ (despreciando el efecto de cualquier armadura comprimida en la losa)

$$\begin{aligned} (\Delta_{cp})_\ell &= k_r C_u [0,20(\Delta_i)_\ell] \\ &= (0,85)(1,60)(0,20 \times 0,194) = 0,053 \text{ in.} \end{aligned}$$

En la Ecuación (19): $\Delta_u = 0,084 + 0,055 + 0,023 + 0,069 + 0,047 + 0,358 + 0,166 + 0,179 + 0,194 + 0,053 = 1,23 \text{ in.}$

Verificando con la Ecuación (20) (igual solución),

$$\begin{aligned} \Delta_u &= \left(1,65 + 0,71 \frac{I_2}{I_c}\right)(\Delta_i)_2 + \left(0,36 + 0,64 \frac{I_2}{I_c}\right)\Delta_{sh} + \left(1,05 + 1,21 \frac{I_2}{I_c}\right)(\Delta_i)_1 + (\Delta_i)_\ell + (\Delta_{cp})_\ell \\ &= (1,65 + 0,71 \times 0,383)(0,084) + (0,36 + 0,64 \times 0,383)(0,192) + (1,50 + 1,21 \times 0,383)(0,358) + 0,194 + 0,053 \\ &= 1,23 \text{ in. (igual al valor anterior)} \end{aligned}$$

Suponiendo que los elementos no estructurales se instalan después que la losa compuesta ha endurecido,

$$\begin{aligned} \Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell &= \text{Términos (3) + (5) + (7) + (8) + (9) + (10)} \\ &= 0,023 + 0,047 + 0,166 + 0,179 + 0,194 + 0,053 = 0,66 \text{ in.} \end{aligned}$$

Al final del Ejemplo 8.7 se compara con las flechas admisibles de la Tabla 9.5(b).

Ejemplo 10.7 – Viga compuesta no pretensada apuntalada

Se pide: Analizar las flechas a corto plazo y las flechas últimas a largo plazo, para demostrar los beneficios de los puntales en términos de reducción de las flechas.

Datos: Igual que para el Ejemplo 8.6, excepto que la construcción será apuntalada.

Cálculos y discusión	Referencia del Código
----------------------	-----------------------

1. Momentos de inercia efectivos para la sección compuesta, usando la Ecuación (9-8):

$$M_{cr} = f_r I_g / y_t = (474)(26.470) / (16,29)(12.000) = 64,2 \text{ ft-kips} \quad \text{Ec. (9-9)}$$

$$M_{cr} / (M_1 + M_2) = [64,2 / (40,6 + 21,1)] = 1,04 > 1$$

$$\text{Por lo tanto } (I_e)_{1+2} = I_g = 26.470 \text{ in.}^4$$

En el Término (5), Ecuación (17) — Sección compuesta,

$$[M_{cr} / (M_1 + M_2 + M_\ell)]^3 = [64,2 / (40,6 + 21,1 + 50,7)]^3 = 0,186$$

$$(I_e)_{d+\ell} = (M_{cr} / M_a)^3 I_g + [1 - (M_{cr} / M_a)^3] I_{cr} \leq I_g \quad \text{Ec. (9-8)}$$

$$= (0,186)(26.470) + (1 - 0,186)(8295) = 11.675 \text{ in.}^4$$

a diferencia del método alternativo del Ejemplo 8.6 donde se utilizó $I_e = (I_c)_{cr} = 8295 \text{ in.}^4$ con el momento debido a la sobrecarga directamente.

2. Flechas, usando las Ecuaciones (17) y (18):

$$\begin{aligned} \text{Término (1)} - (\Delta_i)_{1+2} &= \frac{K(5/48)(M_1 + M_2)\ell^2}{(E_c)_2(I_e)_{1+2}} \\ &= \frac{(1)(5/48)(40,6 + 21,1)(26)^2(12)^3}{(3830)(26.470)} = 0,074 \text{ in.} \end{aligned}$$

Término (2) — Flecha adicional a largo plazo debida al peso permanente total de la viga y la losa. El valor de C_u para la viga se toma igual a 1,60. Para la losa considerar un valor de C_u levemente mayor. Para puntales que se retiran a los 10 días, se puede demostrar por comparación de los factores de corrección, K_{to}^c para aplicación de las cargas a 10 y 20 días (Secciones 2.3.4, ACI 435, Referencia 10.4) que el coeficiente último de fluencia lenta para la losa es aproximadamente igual a 1,74. De forma conservadora se supone que k_r tiene un valor de 0,85.

El coeficiente de fluencia lenta promedio para la sección compuesta es:

$$C_u \text{ promedio} = 1/2(1,60 + 1,74) = 1,67$$

$$1,67k_r (\Delta_i)_{1+2} = (1,67)(0,85)(0,074) = 0,105 \text{ in.}$$

Término (3) — Flecha por contracción de la viga prefabricada una vez retirados los puntales. Como se indicó en el Término (4) del Ejemplo 8.6, la fracción de la deformación por contracción de la viga prefabricada a los 2 meses es 0,36. Se asume que los puntales se retiran alrededor de 10 días después de cumplidos los 2 meses. Por lo tanto, considerar que la fracción restante de contracción es $1 - 0,36 = 0,64$. Recordar que la contracción última es $(\epsilon_{sh})_u = 400 \times 10^{-6}$. Usar el resultado hallado para Δ_{sh} en el Término (4) del Ejemplo 10.6:

$$(\epsilon_{sh})_{\text{restante}} = (0,64) (400 \times 10^{-6}) = 256 \times 10^{-6}$$

$$\Delta_{sh} \frac{I_2}{I_c} = (256/400)(0,192)(0,383) = 0,047 \text{ in.}$$

Término (4) — Flecha debida a que la fluencia lenta y la contracción difieren en la viga y la losa. Este es un tema muy complejo. Para este ejemplo, asumimos que la magnitud de esta componente se puede aproximar como la flecha inicial por carga permanente de la sección compuesta.

$$\Delta_{ds} = (\Delta_i)_{1+2} = 0,074 \text{ in.} \quad (\text{estimación aproximada})$$

$$\begin{aligned} \text{Término (5)} \quad (\Delta_i)_\ell &= \frac{K(5/48)(M_1 + M_2 + M_\ell)\ell^2}{(E_c)_2(I_e)_{d+\ell}} - (\Delta_i)_{1+2} \\ &= \frac{(1)(5/48)(40,6 + 21,1 + 50,7)(26)^2(12)^3}{(3830)(11.675)} - 0,074 \text{ in.} = 0,232 \text{ in.} \end{aligned}$$

Término (6) — $k_r = 0,85$ (despreciando el efecto de cualquier armadura comprimida en la losa),

$$(\Delta_{cp})_\ell = k_r C_u [0,20(\Delta_i)_\ell] = (0,85)(1,60)(0,20 \times 0,232) = 0,063 \text{ in.}$$

En la Ecuación (17): $\Delta_u = 0,074 + 0,105 + 0,047 + 0,074 + 0,232 + 0,063 = 0,60 \text{ in.}$

comparado con 1,23 in. para el caso de construcción sin apuntalar.

Esto demuestra los beneficios que se logran usando puntales, en términos de reducción de las flechas totales.

Verificando con la Ecuación (18) (igual solución),

$$\begin{aligned} \Delta_u &= 3,42(\Delta_i)_{1+2} + \Delta_{sh} \frac{I_2}{I_c} + (\Delta_i)_\ell + (\Delta_{cp})_\ell \\ &= (3,42)(0,074) + 0,046 + 0,232 + 0,063 = 0,60 \text{ in.} \quad (\text{igual al valor anterior}) \end{aligned}$$

Suponiendo que los elementos no estructurales se instalan después de retirar los puntales:

$$\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell = \Delta_u - (\Delta_i)_{1+2} = 0,60 - 0,07 = 0,53 \text{ in.}$$

Comparación de los resultados de los Ejemplos 8.6 y 8.7

Las flechas calculadas $(\Delta_i)_\ell = 0,19$ in. del Ejemplo 10.6 y $(\Delta_i)_\ell = 0,23$ in. del Ejemplo 10.7; y $\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell = 0,66$ in. del Ejemplo 10.6 y $\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell = 0,53$ in. del Ejemplo 10.7, se comparan con las flechas admisibles de la Tabla 9.5(b) de la siguiente manera:

Cubiertas planas que no soportan, ni están unidas a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas —

$$(\Delta_i)_\ell \leq \ell / 180 = 312 / 180 = 1,73 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Entrepisos que no soportan, ni están unidos a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas —

$$(\Delta_i)_\ell \leq \ell / 360 = 312 / 360 = 0,87 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Cubiertas o entrepisos que soportan, o están unidos a, elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas (limitación muy severa) —

$$\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell \leq \ell / 480 = 312 / 480 = 0,65 \text{ in.}$$

Observar que la flecha a largo plazo que ocurre luego de colocar los elementos no estructurales (0,66 in.) supera el límite de $L/480$. En realidad satisface $L/473$. Como el límite de $L/480$ sólo se aplica en el caso de *elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas*, para poder juzgar si las flechas calculadas son aceptables sería necesario considerar el uso particular que tendrá la viga. Ver las notas al pie de la Tabla 9.5(b) de ACI 318.

Cubiertas o entrepisos que soportan, o están unidos a, elementos no estructurales que no son susceptibles de sufrir daños por efecto de las flechas —

$$\Delta_{cp} + \Delta_{sh} + (\Delta_i)_\ell \leq \ell / 240 = 312 / 240 = 1,30 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$