

# 7

## Diseño para Flexión y Carga Axial

### CONSIDERACIONES GENERALES – FLEXIÓN

Para el diseño o la investigación de los elementos solicitados a flexión (vigas y losas), la resistencia nominal de la sección transversal ( $M_n$ ) se debe reducir aplicando el factor de resistencia  $\phi$  a fin de obtener la resistencia de diseño ( $\phi M_n$ ) de la sección. La resistencia de diseño ( $\phi M_n$ ) debe ser mayor o igual que la resistencia requerida ( $M_u$ ). También se deben satisfacer los requisitos de comportamiento en servicio para limitar las flechas (9.5) y distribución de la armadura para limitar la fisuración (10.6).

Los Ejemplos 7.1 a 7.7 ilustran la correcta aplicación de los diversos requisitos del código que gobiernan el diseño de los elementos solicitados a flexión. Antes de los ejemplos de diseño se describen procedimientos paso a paso para el diseño de secciones rectangulares que sólo tienen armadura de tracción, secciones rectangulares con múltiples capas de armadura, secciones rectangulares con armadura de compresión, y secciones con alas que sólo tienen armadura de tracción.

### DISEÑO DE SECCIONES RECTANGULARES QUE SÓLO TIENEN ARMADURA DE TRACCIÓN<sup>7.1</sup>

En el diseño de secciones rectangulares que sólo tienen armadura de tracción (Fig. 7-1), las condiciones de equilibrio son las siguientes:

1. Equilibrio de fuerzas:

$$C = T \tag{1}$$

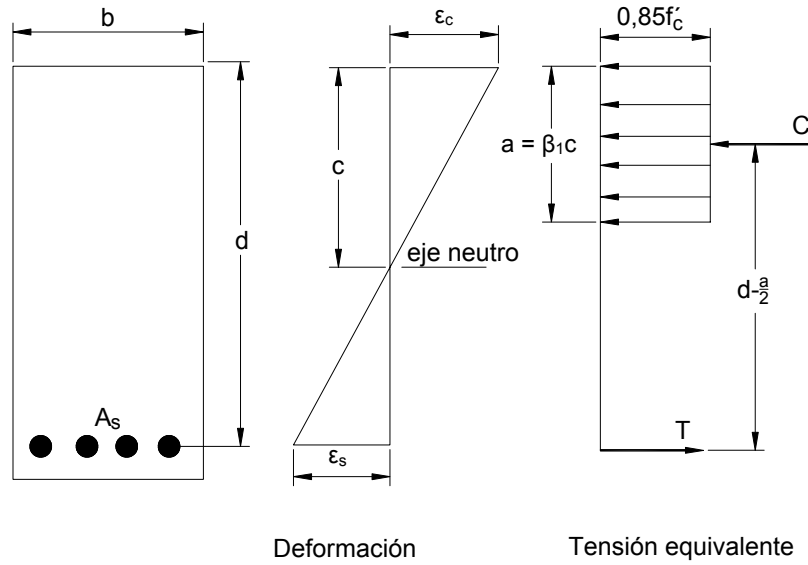
$$0,85 f_c' b a = A_s f_y = \rho b d f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f_c' b} = \frac{\rho d f_y}{0,85 f_c'}$$

2. Equilibrio de momentos:

$$M_n = (C \text{ ó } T) \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_n = \rho b d f_y \left( d - \frac{0,5 \rho d f_y}{0,85 f'_c} \right) \quad (2)$$



*Figura 7-1 – Deformación específica y distribución equivalente de tensiones en una sección rectangular*

Dividiendo ambos lados de la Ec. (2) por  $bd^2$  se obtiene un coeficiente de resistencia nominal  $R_n$ :

$$R_n = \frac{M_n}{bd^2} = \rho f_y \left( 1 - \frac{0,5 \rho f_y}{0,85 f'_c} \right) \quad (3)$$

Si  $b$  y  $d$  están prefijados,  $\rho$  se obtiene resolviendo la ecuación cuadrática para  $R_n$ :

$$\rho = \frac{0,85 f'_c}{f_y} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 R_n}{0,85 f'_c}} \right) \quad (4)$$

En la Figura 7-2 se ilustra la relación entre  $\rho$  y  $R_n$  para armadura Grado 60 y diferentes valores de  $f'_c$ .

La Ecuación (3) se puede usar para determinar la cuantía de acero  $\rho$  conociendo  $M_u$  o viceversa si se conocen las propiedades de la sección  $b$  y  $d$ . Reemplazando  $M_n = M_u / \phi$  en la Ecuación (3), y dividiendo ambos lados de la ecuación por  $f'_c$ :

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{\rho f_y}{f'_c} \left( 1 - \frac{0,5 \rho f_y}{0,85 f'_c} \right)$$

Se define  $\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c}$

Reemplazando  $\omega$  en la ecuación anterior:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \omega (1 - 0,59 \omega) \quad (5)$$

La Tabla 7-1, la cual se basa en la Ecuación (5), fue desarrollada para servir a modo de ayuda de diseño para el diseño o la investigación de secciones que solamente tienen armadura de tracción y para las cuales se conocen los valores b y d.

**Tabla 7-1 – Resistencia a la flexión  $M_u/\phi f'_c b d^2$  ó  $M_n/\phi f'_c b d^2$  de secciones rectangulares sólo con armadura de tracción**

$\omega$	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,00	0,0	0,0010	0,0020	0,0030	0,0040	0,0050	0,0060	0,0070	0,0080	0,0090
0,01	0,0099	0,0109	0,0119	0,0129	0,0139	0,0149	0,0159	0,0168	0,0178	0,0188
0,02	0,0197	0,0207	0,0217	0,0226	0,0236	0,0246	0,0256	0,0266	0,0275	0,0285
0,03	0,0295	0,0304	0,0314	0,0324	0,0333	0,0343	0,0352	0,0362	0,0372	0,0381
0,04	0,0391	0,0400	0,0410	0,0420	0,0429	0,0438	0,0448	0,0457	0,0467	0,0476
0,05	0,0485	0,0495	0,0504	0,0513	0,0523	0,0532	0,0541	0,0551	0,0560	0,0569
0,06	0,0579	0,0588	0,0597	0,0607	0,0616	0,0626	0,0634	0,0643	0,0653	0,0662
0,07	0,0671	0,0680	0,0689	0,0699	0,0708	0,0717	0,0726	0,0735	0,0744	0,0753
0,08	0,0762	0,0771	0,0780	0,0789	0,0798	0,0807	0,0816	0,0825	0,0834	0,0843
0,09	0,0852	0,0861	0,0870	0,0879	0,0888	0,0897	0,0906	0,0915	0,0923	0,0932
0,10	0,0941	0,0950	0,0959	0,0967	0,0976	0,0985	0,0994	0,1002	0,1001	0,1020
0,11	0,1029	0,1037	0,1046	0,1055	0,1063	0,1072	0,1081	0,1089	0,1098	0,1106
0,12	0,1115	0,1124	0,1133	0,1141	0,1149	0,1158	0,1166	0,1175	0,1183	0,1192
0,13	0,1200	0,1209	0,1217	0,1226	0,1234	0,1243	0,1251	0,1259	0,1268	0,1276
0,14	0,1284	0,1293	0,1301	0,1309	0,1318	0,1326	0,1334	0,1342	0,1351	0,1359
0,15	0,1367	0,1375	0,1384	0,1392	0,1400	0,1408	0,1416	0,1425	0,1433	0,1441
0,16	0,1449	0,1457	0,1465	0,1473	0,1481	0,1489	0,1497	0,1506	0,1514	0,1522
0,17	0,1529	0,1537	0,1545	0,1553	0,1561	0,1569	0,1577	0,1585	0,1593	0,1601
0,18	0,1609	0,1617	0,1624	0,1632	0,1640	0,1648	0,1656	0,1664	0,1671	0,1679
0,19	0,1687	0,1695	0,1703	0,1710	0,1718	0,1726	0,1733	0,1741	0,1749	0,1756
0,20	0,1764	0,1772	0,1779	0,1787	0,1794	0,1802	0,1810	0,1817	0,1825	0,1832
0,21	0,1840	0,1847	0,1855	0,1862	0,1870	0,1877	0,1885	0,1892	0,1900	0,1907
0,22	0,1914	0,1922	0,1929	0,1937	0,1944	0,1951	0,1959	0,1966	0,1973	0,1981
0,23	0,1988	0,1995	0,2002	0,2010	0,2017	0,2024	0,2031	0,2039	0,2046	0,2053
0,24	0,2060	0,2067	0,2075	0,2082	0,2089	0,2096	0,2103	0,2110	0,2117	0,2124
0,25	0,2131	0,2138	0,2145	0,2152	0,2159	0,2166	0,2173	0,2180	0,2187	0,2194
0,26	0,2201	0,2208	0,2215	0,2222	0,2229	0,2236	0,2243	0,2249	0,2256	0,2263
0,27	0,2270	0,2277	0,2284	0,2290	0,2297	0,2304	0,2311	0,2317	0,2324	0,2331
0,28	0,2337	0,2344	0,2351	0,2357	0,2364	0,2371	0,2377	0,2384	0,2391	0,2397
0,29	0,2404	0,2410	0,2417	0,2423	0,2430	0,2437	0,2443	0,2450	0,2456	0,2463
0,30	0,2469	0,2475	0,2482	0,2488	0,2495	0,2501	0,2508	0,2514	0,2520	0,2527

$M_n / f'_c b d^2 = \omega (1 - 0,59 \omega)$ , siendo  $\omega = \rho f_y / f'_c$

Para el diseño: Usando el momento mayorado  $M_u$ , ingresar a la tabla con  $M_u / \phi f'_c b d^2$ ; hallar  $\omega$  y calcular el porcentaje de acero  $\rho = \omega f'_c / f_y$ .

Para la investigación: Ingresar a la tabla con  $\omega = \rho f_y / f'_c$ ; hallar el valor de  $M_n / f'_c b d^2$  y resolver para la resistencia nominal,  $M_n$ .

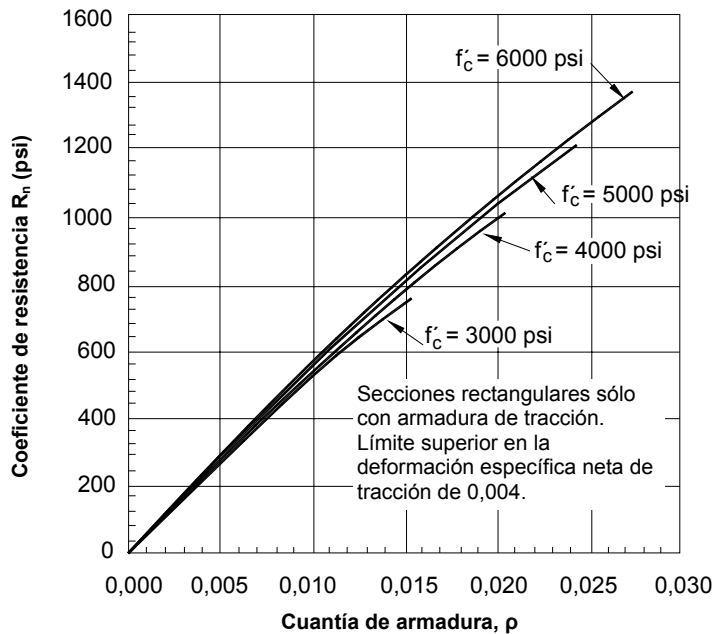


Figura 7-2 – Curvas de resistencia ( $R_n$  vs.  $\rho$ ) para armadura de Grado 60

La Figura 7-3 muestra el efecto del factor de reducción de la resistencia  $\phi$ . En particular, muestra lo que ocurre cuando se sobrepasa el límite para secciones controladas por tracción con un  $\phi$  igual a 0,9. Como se puede ver en la Figura 7-3, no se logra ningún beneficio diseñando un elemento solicitado a flexión por debajo del límite de deformación específica para secciones controladas por tracción de 0,005. Cualquier ganancia de resistencia que se pudiera obtener usando mayores cuantías de armadura es anulada por la reducción del factor de reducción de resistencia  $\phi$  que se debe aplicar para cuantías más elevadas. Por lo tanto, los elementos solicitados a flexión se deberían diseñar como secciones controladas por tracción.

Uno se podría preguntar "porqué se permiten cuantías más elevadas y menores deformaciones específicas netas de tracción si éstas no representan ningún beneficio?" En muchos casos el acero provisto está por encima del valor óptimo en el límite correspondiente a secciones controladas por tracción. La porción "horizontal" de la curva de la Figura 7-3 le permite al diseñador proveer armadura en exceso de la requerida (considerando tamaños de barra discretos) sin ser penalizados por "superar un límite codificado."

Aunque los elementos solicitados a flexión casi siempre se deberían diseñar como secciones controladas por tracción con  $\epsilon_t \geq 0,005$ , a menudo ocurre que las columnas con carga axial pequeña y grandes momentos flectores se encuentran en la "región de transición" con  $\epsilon_t$  comprendida entre 0,002 y 0,005, y  $\phi$  está comprendido entre el valor correspondiente a secciones controladas por compresión y el valor correspondiente a secciones controladas por tracción.

Generalmente las columnas se diseñan usando gráficas de interacción o tablas. En los diagramas de interacción el "punto límite" para el cual  $\epsilon_t = 0,005$  y  $\phi = 0,9$  puede estar por encima o por debajo de la línea de carga axial nula.

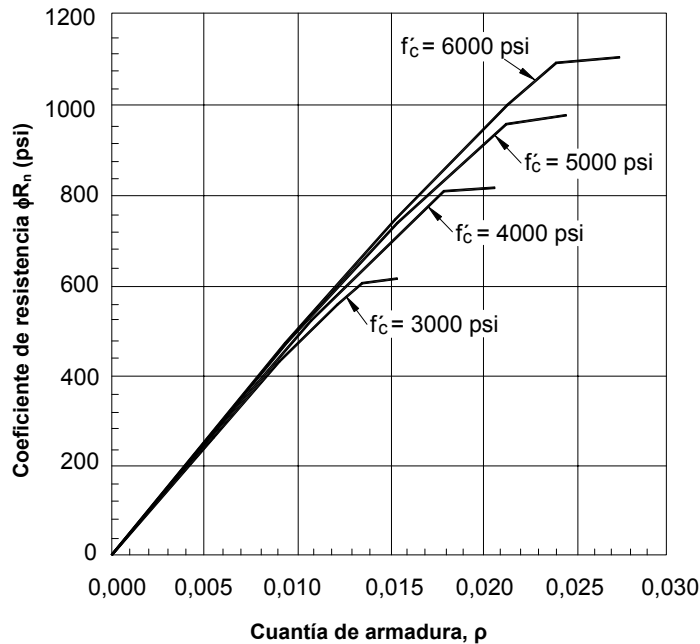


Figura 7-3 Curvas de resistencia de diseño ( $\phi R_n$  vs.  $\rho$ ) para armadura Grado 60

## PROCEDIMIENTO DE DISEÑO PARA SECCIONES QUE SÓLO TIENEN ARMADURA DE TRACCIÓN

Paso 1: Seleccionar un valor aproximado para la cuantía de tracción  $\rho$  menor o igual que  $\rho_t$  pero mayor que el mínimo (10.5.1), siendo la cuantía  $\rho_t$  igual a:

$$\rho_t = \frac{0,319 \beta_1 f'_c}{f_y}$$

donde  $\beta_1 = 0,85$  para  $f'_c \leq 4000$  psi

$$= 0,85 - 0,005 \left( \frac{f'_c - 4000}{1000} \right) \text{ para } 4000 \text{ psi} < f'_c < 8000 \text{ psi}$$

$$= 0,65 \text{ para } f'_c \geq 8000 \text{ psi}$$

Los valores de  $\rho_t$  se dan en la Tabla 6-1.

Paso 2: Con el  $\rho$  prefijado ( $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_t$ ) calcular  $bd^2$  requerida:

$$bd^2 \text{ (requerida)} = \frac{M_u}{\phi R_n}$$

donde  $R_n = \rho f_y \left( 1 - \frac{0,5 \rho f_y}{0,85 f'_c} \right)$ ,  $\phi = 0,90$  para flexión con  $\rho \leq \rho_t$ , y  $M_u$  = momento aplicado mayorado (resistencia a la flexión requerida):

Paso 3: Dimensionar el elemento de manera que el valor de  $bd^2$  provista sea mayor o igual que el valor de  $bd^2$  requerida.

Paso 4: En base a  $bd^2$  provista, calcular un nuevo valor revisado de  $\rho$  aplicando uno de los métodos siguientes:

1. Usando la Ecuación (4) con  $R_n = M_u / \phi bd^2$  (método exacto)
2. Usando curvas de resistencia como las ilustradas en las Figuras 7-2 y 7-3. Los valores de  $\rho$  para armadura Grado 60 se dan en términos de  $R_n = M_u / \phi bd^2$ .
3. Usando tablas de resistencia al momento tales como la Tabla 7-1. Los valores de  $\omega = \rho f_y / f_c$  se dan en términos de la resistencia al momento  $M_u / \phi f_c bd^2$ .
4. Por proporciones aproximadas

$$\rho \approx (\rho_{\text{original}}) \frac{(R_n \text{ revisada})}{(R_n \text{ original})}$$

Observar en la Figura 7-2 que la relación entre  $R_n$  y  $\rho$  es aproximadamente lineal.

Paso 5: Calcular  $A_s$  requerida:

$$A_s = (\rho \text{ revisada}) (bd \text{ provista})$$

Si los valores de  $b$  y  $d$  están prefijados,  $A_s$  requerida se puede calcular directamente como:

$$A_s = \rho (bd \text{ provista})$$

para lo cual  $\rho$  se calcula usando uno de los métodos indicados en el Paso 4.

## PROCEDIMIENTO DE DISEÑO PARA SECCIONES CON MÚLTIPLES CAPAS DE ARMADURA

La manera sencilla y conservadora de diseñar una viga con dos capas de armadura de tracción consiste en tomar  $d_t = d$ , la profundidad al baricentro de toda la armadura de tracción. Sin embargo, el código le permite al diseñador aprovechar el hecho de que  $d_t$ , medida hasta el centro de la capa más alejada de la cara comprimida, es mayor que  $d$ . Esto sólo sería necesario cuando se diseña en el límite de deformación específica de 0,005 correspondiente a las secciones controladas por tracción, o muy cerca de este límite.

La Figura 7-4 ilustran los diagramas de tensión y deformación para una sección con múltiples capas de acero en la cual la capa de acero exterior está en el límite de deformación específica para secciones controladas por tracción (0,005). Para esta sección  $\rho_2$  representa la máxima  $\rho$  (basada en  $d$ ).

$$\rho_2 = \frac{C}{f_y bd}$$

Sin embargo,

$$\rho_t = \frac{C}{f_y bd_t}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\rho_2}{\rho_t} = \frac{d_t}{d}$$

$$\rho_2 = \rho_t \left( \frac{d_t}{d} \right) \quad (6)$$

El diagrama de deformaciones de la Figura 7-4 contiene información adicional. La deformación específica de fluencia de la armadura Grado 60 es igual a 0,00207. Por similitud de triángulos, cualquier acero Grado 60 que esté a una distancia menor o igual que  $0,366d_t$  de la capa inferior estará en fluencia. Esto casi siempre es así, a menos que se distribuya acero en las caras laterales. Además, el acero comprimido estará en fluencia si se encuentra a una distancia menor o igual que  $0,116d_t$  (ó  $0,31c$ ) de la cara comprimida.

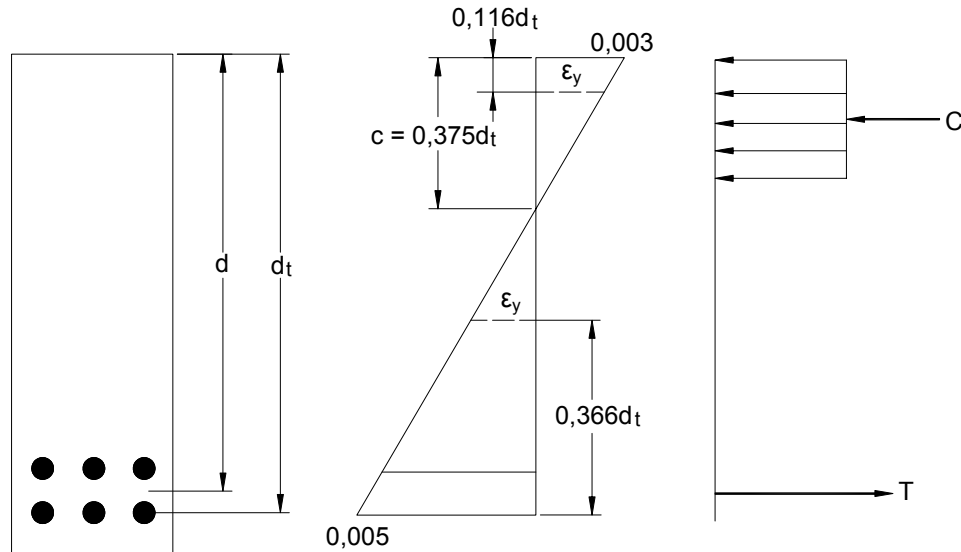


Figura 7-4 – Múltiples capas de armadura

## PROCEDIMIENTO DE DISEÑO PARA SECCIONES RECTANGULARES CON ARMADURA DE COMPRESIÓN (ver Parte 6)

Se resumen los pasos para el diseño de vigas rectangulares (con  $b$  y  $d$  prefijados) que requieren armadura de compresión (ver Ejemplo 7-3)

Paso 1: Verificar si es necesario colocar armadura de compresión. Calcular

$$R_n = \frac{M_n}{bd^2}$$

Comparar este valor con la máxima  $R_n$  para secciones controladas por tracción indicada en la Tabla 6-1. Si  $R_n$  es mayor que el valor tabulado, usar armadura de compresión.

Si se requiere armadura de compresión, es probable que sea necesario colocar dos capas de armadura de tracción. Estimar la relación  $d_t/d$ .

Paso 2: Hallar la resistencia al momento nominal resistida por una sección sin armadura de compresión, y la resistencia al momento adicional  $M'_n$  a ser resistida por la armadura de compresión y por la armadura de tracción agregada.

De la Tabla 6-1, hallar  $\rho_t$ . Luego, usando la Ecuación (6):

$$\rho = \rho_t \left( \frac{d_t}{d} \right)$$

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

Determinar  $M_{nt}$  de la Tabla 7-1.

Calcular la resistencia al momento a ser resistida por la armadura de compresión:

$$M'_n = M_n - M_{nt}$$

Paso 3: Verificar la fluencia de la armadura de compresión

Si  $d'/c < 0,31$  la armadura de compresión ha entrado en fluencia y  $f'_s = f_y$

Ver la Parte 6 para la determinación de  $f'_s$  para el caso en que la armadura de compresión no entra en fluencia.

Paso 4: Determinar la armadura total requerida,  $A'_s$  y  $A_s$

$$A'_s = \frac{M'_n}{(d - d') f'_s}$$

$$A_s = \frac{M'_n}{(d - d') f_y} + \rho b d$$

Paso 5: Verificar la capacidad de momento

$$\phi M_n = \phi \left[ (A - A'_s) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y (d - d') \right] \geq M_u$$

donde

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0,85 f'_c b}$$

## PROCEDIMIENTO DE DISEÑO PARA SECCIONES CON ALAS CON ARMADURA DE TRACCIÓN (ver Parte 6)

Se resumen los pasos para el diseño de secciones con alas que sólo tienen armadura de tracción (ver Ejemplos 7.4 y 7.5).

Paso 1: Determinar el ancho de ala efectivo  $b$  de acuerdo con 8.10.

Usando la Tabla 7-1, determinar la profundidad del bloque de tensiones equivalente,  $a$ , suponiendo comportamiento de sección rectangular con  $b$  igual al ancho de ala (es decir,  $a \leq h_f$ ):

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b} = \frac{\rho d f_y}{0,85 f'_c} = 1,18 \omega d$$

para lo cual  $\omega$  se obtiene de la Tabla 7-1 para  $M_u/\phi f_c b d^2$ . Asumir que se trata de una sección controlada por tracción con  $\phi = 0,9$ .

Paso 2: Si  $a \leq h_f$ , determinar la armadura como si se tratara de una sección rectangular que sólo tiene armadura de tracción. Si  $a > h_f$ , ir al paso 3.

Paso 3: Si  $a > h_f$ , calcular la armadura  $A_{sf}$  requerida y la resistencia al momento  $\phi M_{nf}$  correspondiente al ala saliente de la viga en compresión:

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{0,85 f'_c (b - b_w) h_f}{f_y}$$

$$\phi M_{nf} = \phi \left[ A_{sf} f_y \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right]$$

Paso 4: Calcular la resistencia al momento requerida a ser soportada por el alma de la viga:

$$M_{uw} = M_u - \phi M_{nf}$$

Paso 5: Usando la Tabla 7-1, calcular la armadura  $A_{sw}$  requerida para desarrollar la resistencia al momento a ser soportada por el alma:

$$A_{sw} = \frac{0,85 f'_c b_w a_w}{f_y}$$

siendo  $a_w = 1,18 \omega_w d$ ;  $\omega_w$  se obtiene de la Tabla 7-1 para  $M_{uw}/\phi f_c b_w d^2$ .

Alternativamente,  $A_{sw}$  se puede obtener de la siguiente manera:

$$A_{sw} = \frac{\omega_w f'_c b_w d}{f_y}$$

Paso 6: Determinar la armadura total requerida:

$$A_s = A_{sf} + A_{sw}$$

Paso 7: Verificar si la sección es controlada por tracción, con  $\phi = 0,9$ :

$$c = a_w / \beta_1$$

Si  $c/d_t \leq 0,375$  la sección es controlada por tracción

Si  $c/d_t > 0,375$  se debe agregar armadura de compresión

Paso 8: Verificar la capacidad de momento:

$$\phi M_n = \phi \left[ (A_s - A_{sf}) f_y \left( d - \frac{a_w}{2} \right) + A_{sf} f_y \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right] \geq M_u$$

$$\text{siendo } A_{sf} = \frac{0,85 f'_c (b - b_w) h_f}{f_y}$$

$$a_w = \frac{(A_s - A_{sf}) f_y}{0,85 f'_c b_w}$$

## CONSIDERACIONES GENERALES – FLEXIÓN Y CARGA AXIAL

El diseño o investigación de un elemento comprimido corto se basa fundamentalmente en la resistencia de su sección transversal. La resistencia de una sección transversal solicitada a una combinación de flexión y carga axial debe satisfacer tanto la condición de equilibrio de fuerzas como la condición de compatibilidad de las deformaciones (ver Parte 6). Luego la resistencia a la combinación de carga axial y momento ( $P_n, M_n$ ) se multiplica por el factor de reducción de la resistencia  $\phi$  que corresponda para determinar la resistencia de diseño ( $\phi P_n, \phi M_n$ ) de la sección. La resistencia de diseño debe ser mayor o igual que la resistencia requerida:

$$(\phi P_n, \phi M_n) \geq (P_u, M_u)$$

Todos los elementos solicitados a una combinación de flexión y carga axial se deben diseñar para satisfacer este requisito básico. Observar que la resistencia requerida ( $P_u, M_u$ ) representa los efectos estructurales de las diferentes combinaciones de cargas y fuerzas que pueden solicitar una estructura. En la Parte 5 se discute la Sección 9.2.

Se puede generar un "diagrama de interacción de las resistencias" graficando la resistencia a la carga axial de diseño  $\phi P_n$  en función de la correspondiente resistencia al momento de diseño  $\phi M_n$ ; este diagrama define la resistencia "utilizable" de una sección para diferentes excentricidades de la carga. En la Figura 7-5 se ilustra un típico diagrama de interacción de las resistencias a la carga axial y al momento de diseño, que muestra los diferentes segmentos de la curva de resistencia que se permiten para el diseño. El segmento "plano" de la curva de resistencia de diseño define la resistencia a la carga axial de diseño limitante  $P_{n(max)}$ . La Parte 5 contiene una discusión sobre 10.3.6. Como se ilustra en la figura, a medida que disminuye la resistencia a la carga axial de diseño  $\phi P_n$ , se produce una transición entre el límite correspondiente a secciones controladas por compresión y el límite correspondiente a secciones controladas por tracción. El Ejemplo 6.4 ilustra la construcción de un diagrama de interacción.

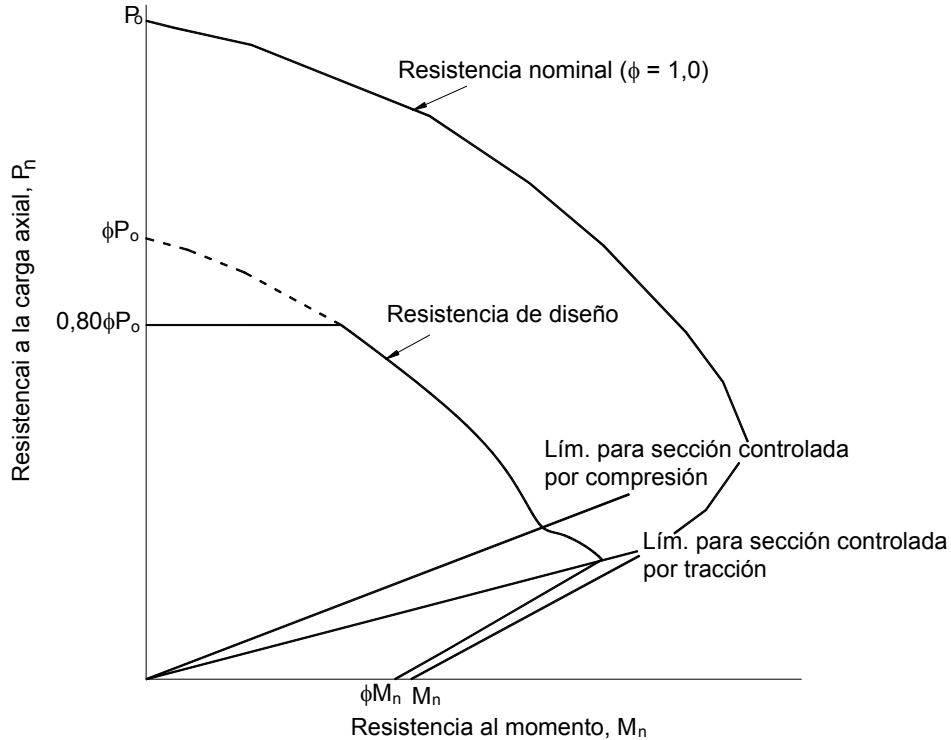


Figura 7-5 – Diagrama de interacción de las resistencias (columna con estribos cerrados)

## CONSIDERACIONES GENERALES – CARGA BIAxIAL

Una columna está solicitada a flexión biaxial cuando la carga provoca flexión simultánea respecto de ambos ejes principales. El caso más habitual de este tipo de carga ocurre en las columnas de esquina. El diseño para flexión biaxial y carga axial se menciona en R10.3.6 y R10.3.7. La Sección 10.11.6 trata los factores de amplificación de momento por consideraciones de esbeltez para los elementos comprimidos solicitados a carga biaxial. La sección R10.3.6 establece que "las columnas de esquina y otras que estén expuestas a momentos conocidos respecto de ambos ejes que ocurren en forma simultánea se deben diseñar para flexión biaxial y carga axial." Se recomiendan dos métodos para el diseño combinado a flexión biaxial y carga axial: el Método de las Cargas Recíprocas y el Método del Contorno de las Cargas. A continuación se presentan ambos métodos, junto con una extensión del Método del Contorno de las Cargas (Método del Contorno de las Cargas de la PCA).

## RESISTENCIA CON INTERACCIÓN BIAxIAL

Un diagrama de interacción uniaxial define la resistencia a la combinación de carga y momento en un único plano de una sección solicitada por una carga axial  $P$  y un momento uniaxial  $M$ . La resistencia a la flexión biaxial de una columna cargada axialmente se puede representar esquemáticamente como una superficie formada por una serie de curvas de interacción uniaxial trazadas en forma radial a partir del eje  $P$  (ver Figura 7-6). Los datos para estas curvas intermedias se obtienen variando el ángulo del eje neutro (para configuraciones de deformación específica supuestas) con respecto a los ejes principales (ver Figura 7-7).

La dificultad asociada con la determinación de la resistencia de las columnas armadas solicitadas a combinaciones de carga axial y flexión biaxial es fundamentalmente de naturaleza aritmética. La resistencia a la flexión de una columna cargada axialmente respecto de un eje oblicuo particular se determina mediante iteraciones que involucran cálculos sencillos pero laboriosos. Estos cálculos se vuelven aún más laboriosos si se desea optimizar la armadura o la sección transversal.

Para la flexión uniaxial es habitual utilizar ayudas de diseño en forma de curvas o tablas de interacción. Sin embargo, debido a la naturaleza voluminosa de los datos y a lo difícil que resulta realizar múltiples interpolaciones, no resulta práctico desarrollar curvas o tablas de interacción para diferentes relaciones entre los momentos flectores respecto de cada eje. Por este motivo se han desarrollado varios enfoques (todos ellos basados en aproximaciones aceptables) que relacionan la respuesta de una columna en flexión biaxial con su resistencia uniaxial respecto de cada uno de sus ejes principales.

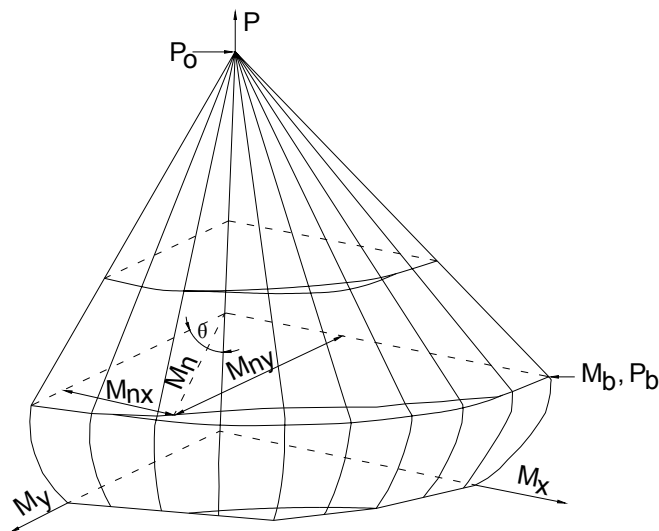


Figura 7-6 – Superficie de interacción biaxial

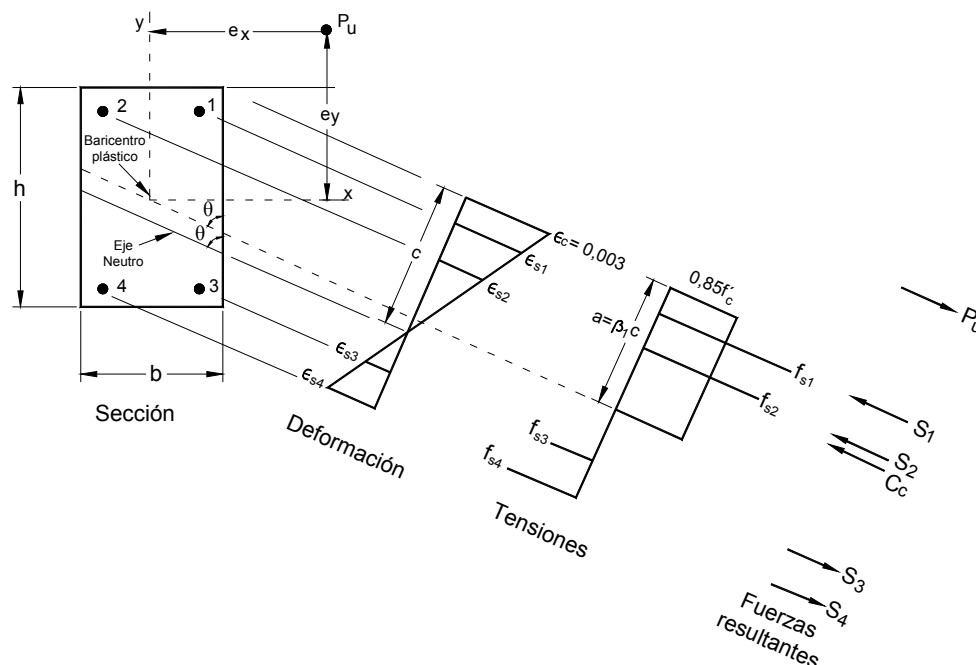
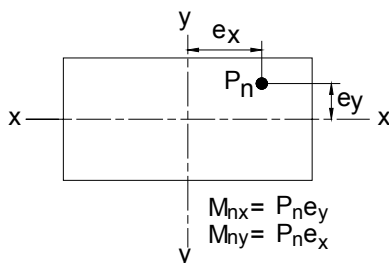


Figura 7-7 – Eje neutro que forma un ángulo respecto de los ejes principales

## SUPERFICIES DE FALLA

La resistencia nominal de una sección solicitada a flexión biaxial y compresión es una función de tres variables,  $P_n$ ,  $M_{nx}$  y  $M_{ny}$ , las cuales se pueden expresar en términos de una carga axial actuando con excentricidades  $e_x = M_{ny}/P_n$  y  $e_y = M_{nx}/P_n$ , como se ilustra en la Figura 7-8. Una superficie de falla se puede describir como una superficie generada graficando la carga de falla  $P_n$  en función de sus excentricidades  $e_x$  y  $e_y$ , o de sus momentos flectores asociados  $M_{ny}$  y  $M_{nx}$ . Se han definido tres tipos de superficies de falla.<sup>7.4, 7.5, 7.6</sup> La superficie básica  $S_1$  se define mediante una función que depende de las variables  $P_n$ ,  $e_x$  y  $e_y$ ; esta superficie se ilustra en la Figura 7-9(a). A partir de  $S_1$  se puede derivar una superficie recíproca; para generar la superficie  $S_2$  ( $1/P_n$ ,  $e_x$ ,  $e_y$ ) se utiliza la recíproca o inversa de la carga axial nominal  $P_n$  como se ilustra en la Figura 7-9(b). El tercer tipo de superficie de falla, ilustrado en la Figura 7-9(c), se obtiene relacionando la carga axial nominal  $P_n$  con los momentos  $M_{nx}$  y  $M_{ny}$  para producir la superficie  $S_3$  ( $P_n$ ,  $M_{nx}$ ,  $M_{ny}$ ). La superficie de falla  $S_3$  es la extensión tridimensional del diagrama de interacción uniaxial que mencionamos anteriormente.

Varios investigadores han desarrollado aproximaciones tanto para la superficie de falla  $S_2$  como para la  $S_3$  que se pueden usar para el diseño y el análisis.<sup>7.6 - 7.10</sup> A continuación presentamos una explicación de estos métodos utilizados en la práctica actual, junto con algunos ejemplos de diseño.



No se ilustran las barras de armadura

Figura 7-8 – Simbología utilizada para carga biaxial

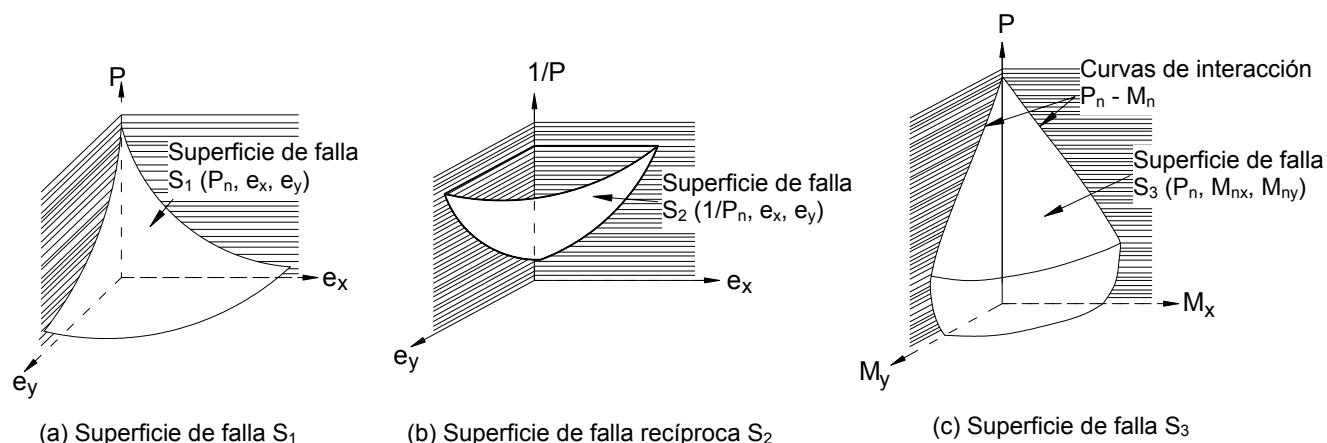


Figura 7-9 – Superficies de falla

### A. Método de las Cargas Recíprocas de Bresler

Este método aproxima la ordenada  $1/P_n$  en la superficie  $S_2$  ( $1/P_n, e_x, e_y$ ) mediante una ordenada correspondiente  $1/P'_n$  en el plano  $S'_2$  ( $1/P'_n, e_x, e_y$ ), el cual se define por los puntos característicos A, B y C como se indica en la Figura 7-10. Para cualquier sección transversal en particular, el valor  $P_o$  (correspondiente al punto C) es la resistencia a la carga bajo compresión axial pura;  $P_{ox}$  (correspondiente al punto B) y  $P_{oy}$  (correspondiente al punto A) son las resistencias a la carga bajo excentricidades uniaxiales  $e_y$  y  $e_x$ , respectivamente. Cada punto de la superficie verdadera se aproxima mediante un plano diferente; por lo tanto, la totalidad de la superficie se aproxima usando un número infinito de planos.

La expresión general para la resistencia a la carga axial  $p$  para cualquier valor de  $e_x$  y  $e_y$  es la siguiente:<sup>7.6</sup>

$$\frac{1}{P_n} \approx \frac{1}{P'_n} = \frac{1}{P_{ox}} + \frac{1}{P_{oy}} - \frac{1}{P_o}$$

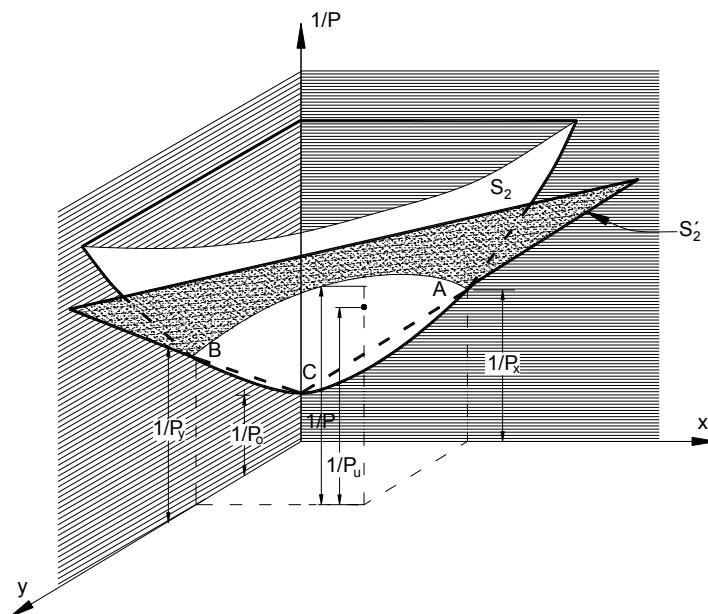


Figura 7-10 – Método de las cargas recíprocas

Reordenando las variables se obtiene:

$$P_n = \frac{1}{\frac{1}{P_{ox}} + \frac{1}{P_{oy}} - \frac{1}{P_o}} \quad (7)$$

donde:

$P_{ox}$  = Máxima resistencia a la carga uniaxial de la columna con un momento de  $M_{nx} = P_n e_y$

$P_{oy}$  = Máxima resistencia a la carga uniaxial de la columna con un momento de  $M_{ny} = P_n e_x$

$P_o$  = Máxima resistencia a la carga axial sin momentos aplicados

Esta ecuación tiene una forma sencilla y las variables se pueden determinar fácilmente. Las resistencias a la carga axial  $P_o$ ,  $P_{ox}$  y  $P_{oy}$  se determinan usando cualquiera de los métodos presentados anteriormente para flexión uniaxial con carga axial. Resultados experimentales han demostrado que esta ecuación será razonablemente exacta si la flexión no gobierna el diseño. La ecuación sólo se debe usar si:

$$P_n \geq 0,1 f_c A_g \quad (8)$$

## B. Método del Contorno de las Cargas de Bresler

En este método se aproxima la superficie  $S_3 (P_n, M_{nx}, M_{ny})$  mediante una familia de curvas correspondientes a valores constantes de  $P_n$ . Como se ilustra en la Figura 7-11, estas curvas se pueden considerar como "contornos de las cargas."

La expresión general para estas curvas se puede aproximar<sup>7,6</sup> por medio de una ecuación de interacción adimensional de la forma

$$\left( \frac{M_{nx}}{M_{nox}} \right)^\alpha + \left( \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \right)^\beta = 1,0 \quad (9)$$

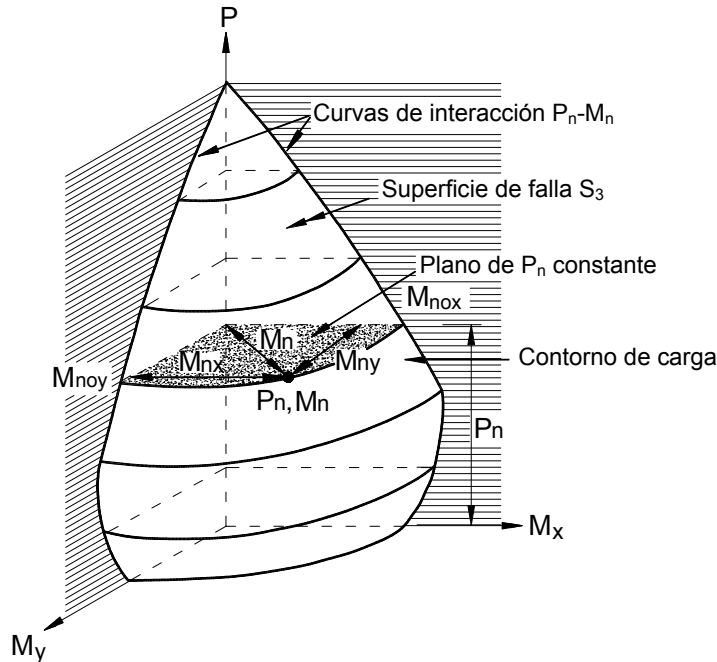


Figura 7-11 – Contornos de las cargas de Bresler para  $P_n$  constante en la superficie de falla  $S_3$

donde  $M_{nx}$  y  $M_{ny}$  son las resistencias nominales al momento biaxial en las direcciones de los ejes x e y, respectivamente. Observar que estos momentos son el equivalente vectorial del momento uniaxial  $M_n$ . El momento  $M_{nox}$  es la resistencia nominal al momento uniaxial respecto del eje x, y el momento  $M_{noy}$  es la resistencia nominal al momento uniaxial respecto del eje y. Los valores de los exponentes  $\alpha$  y  $\beta$  son función de la cantidad, distribución y ubicación de la armadura, las dimensiones de la columna, y la resistencia y las propiedades elásticas del acero y el hormigón. Bresler<sup>7.6</sup> indica que es razonable suponer  $\alpha = \beta$ ; por lo tanto, la Ecuación (9) se convierte en

$$\left( \frac{M_{nx}}{M_{nox}} \right)^\alpha + \left( \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \right)^\alpha = 1,0 \quad (10)$$

lo cual se representa gráficamente en la Figura 7-12.

Para utilizar la Ecuación (10) o la Figura 7-12 aún es necesario determinar el valor  $\alpha$  para la sección transversal considerada. Bresler indicó que, típicamente,  $\alpha$  variaba entre 1,15 y 1,55 y que un valor de 1,5 era razonablemente exacto para la mayoría de las secciones cuadradas y rectangulares con armadura uniformemente distribuida.

Fijando  $\alpha$  igual a la unidad, la ecuación de interacción se vuelve lineal:

$$\frac{M_{nx}}{M_{nox}} + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} = 1,0 \quad (11)$$

Como se ilustra en la Figura 7-12, con la Ecuación (11) siempre se obtendrán valores conservadores, ya que subestima la capacidad de la columna especialmente para el caso de cargas axiales elevadas o bajos porcentajes de armadura. Sólo se debería usar cuando

$$P_n < 0,1 f_c A_g \quad (12)$$

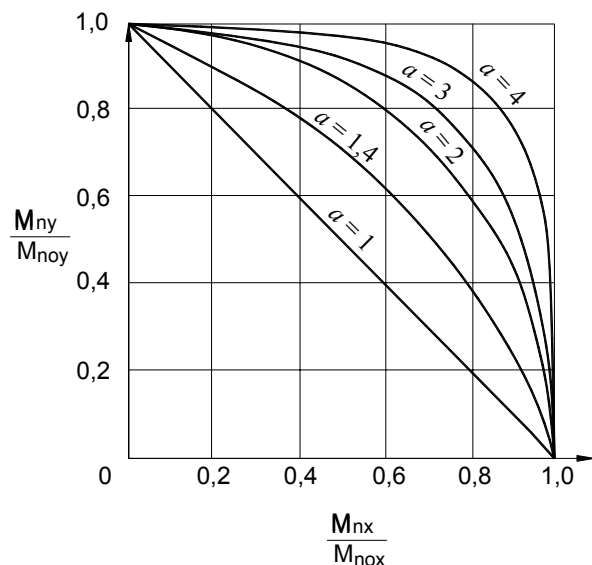


Figura 7-12 – Curvas de interacción para el Método del Contorno de las Cargas de Bresler [Ecuación (9)]

### C. Método del Contorno de las Cargas de la PCA

El enfoque de la PCA descrito a continuación fue desarrollado como una extensión o ampliación del Método del Contorno de las Cargas de Bresler. Se eligió la ecuación de interacción de Bresler [Ecuación (10)] como el método más viable en términos de exactitud, practicidad y potencial de simplificación.

En la Figura 7-13(a) se ilustra un contorno de carga típico según Bresler para una cierta  $P_n$ . En el método de la PCA,<sup>7,11</sup> el punto B se define de manera tal que las resistencias nominales al momento biaxial  $M_{nx}$  y  $M_{ny}$  tienen la misma relación que las resistencias al momento uniaxial  $M_{nox}$  y  $M_{noy}$ . Por lo tanto, en el punto B

$$\frac{M_{nx}}{M_{ny}} = \frac{M_{nox}}{M_{noy}} \quad (13)$$

Cuando el contorno de carga de la Figura 7-13(a) se hace adimensional toma la forma indicada en la Figura 7-13(b), y el punto B tendrá las coordenadas  $x$  e  $y$  iguales a  $\beta$ . Si se grafica la resistencia a la flexión en términos de los parámetros adimensionales  $P_n/P_o$ ,  $M_{nx}/M_{nox}$ ,  $M_{ny}/M_{noy}$  (estos dos últimos llamados momentos relativos), la superficie de falla generada  $S_4$  ( $P_n/P_o$ ,  $M_{nx}/M_{nox}$ ,  $M_{ny}/M_{noy}$ ) adopta la forma típica ilustrada en la Figura 7-13(c). La ventaja de expresar el comportamiento en términos relativos es que los contornos de la superficie (Fig. 7-13(b)) – es decir, la intersección formada por los planos de  $P_n/P_o$  constante y la superficie – para los propósitos del diseño se pueden considerar simétricos respecto del plano vertical que bisecta los dos planos coordenados. Aún para las secciones que son rectangulares o en las cuales la armadura no está uniformemente distribuida, esta aproximación permite obtener valores con precisión suficiente para el diseño.

La relación entre  $\alpha$  de la Ecuación (10) y  $\beta$  se obtiene reemplazando las coordenadas del punto B de la Figura 7-13(a) en la Ecuación (10), y resolviendo para  $\alpha$  en función de  $\beta$ . Así se obtiene:

$$\alpha = \frac{\log 0,5}{\log \beta}$$

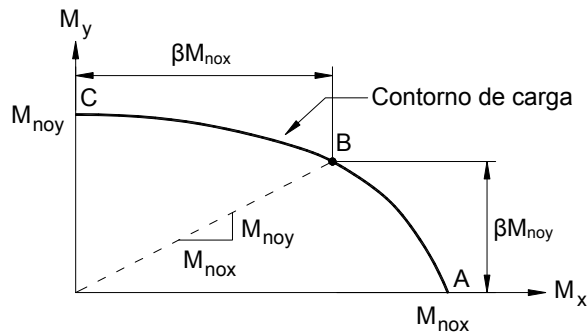


Figura 7-13(a) – Contorno de cargas de la superficie de falla  $S_3$  sobre un plano de  $P_n$  constante

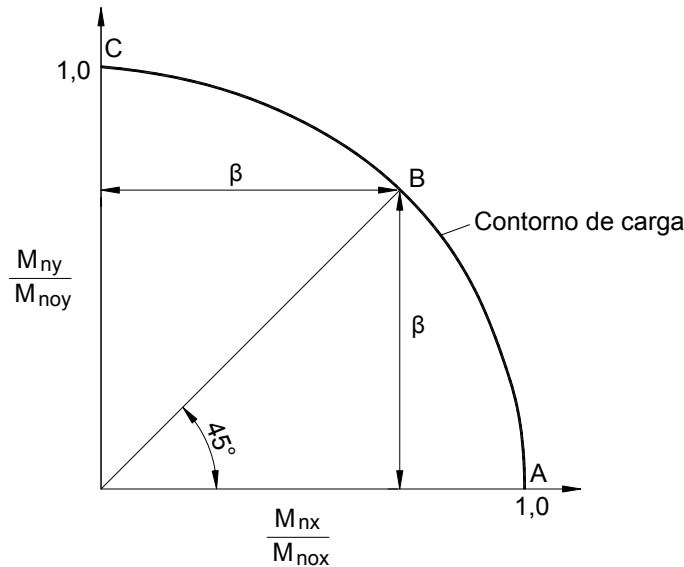


Figura 7-13(b) – Contorno de cargas adimensional para  $P_n$  constante

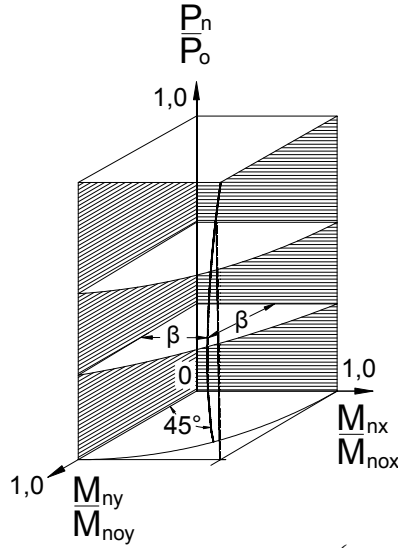


Figura 7-13(c) – Superficie de falla  $S_4 \left( \frac{P_n}{P_o}, \frac{M_{nx}}{M_{nox}}, \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \right)$

En consecuencia la Ecuación (10) se puede escribir como:

$$\left( \frac{M_{nx}}{M_{nox}} \right)^{\left( \frac{\log 0,5}{\log \beta} \right)} + \left( \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \right)^{\left( \frac{\log 0,5}{\log \beta} \right)} = 1,0 \quad (14)$$

Para simplificar el diseño, en la Figura 7-14 se grafican las curvas generadas por la Ecuación (14) para nueve valores de  $\beta$ . Observar que cuando  $\beta = 0,5$  (su límite inferior), la Ecuación (14) es una recta que une los puntos en los cuales los momentos relativos son iguales a 1,0 a lo largo de los planos coordenados. Cuando  $\beta = 1,0$  (su límite superior), la Ecuación (14) toma la forma de dos rectas, cada una de ellas paralela a uno de los planos coordenados.

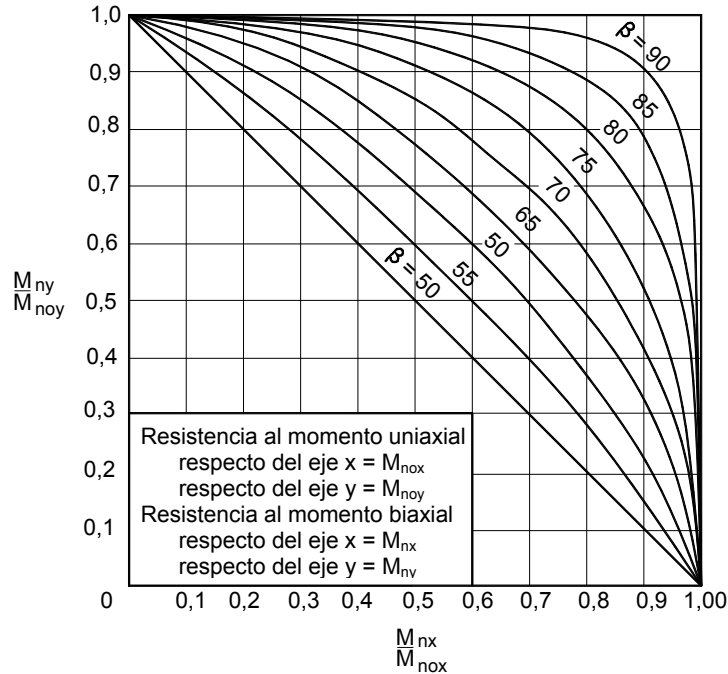


Figura 7-14 – Relación de resistencia al momento biaxial

Los valores de  $\beta$  se calcularon en base a 10.2, usando un bloque de tensiones rectangular y los principios básicos de equilibrio. Se halló que los parámetros  $\gamma$ ,  $b/h$  y  $f'_c$  no afectaban demasiado los valores de  $\beta$ . La máxima diferencia en  $\beta$  fue de alrededor de 5% para valores de  $P_n/P_o$  comprendidos entre 0,1 y 0,9. La mayoría de los valores de  $\beta$ , especialmente en el rango de  $P_n/P_o$  más utilizado, no presentaron diferencias mayores al 3%. En vista de estas pequeñas diferencias, sólo se desarrollaron envolventes de los valores de  $\beta$  más bajos para dos valores de  $f_y$  y diferentes disposiciones de las barras, como se ilustra en las Figuras 7-15 y 7-16.

Como se puede observar en las Figuras 7-15 y 7-16,  $\beta$  depende fundamentalmente de  $P_n/P_o$  y en menor medida, aunque todavía significativamente, de la distribución de las barras, del índice de armadura  $\omega$  y de la resistencia de la armadura.

La Figura 7-14, junto con las Figuras 7-15 y 7-16, constituyen una manera conveniente y directa de determinar la resistencia al momento biaxial de una sección transversal dada sujeta a una carga axial, ya que los valores de  $P_o$ ,  $M_{nox}$  y  $M_{noy}$  se pueden obtener fácilmente mediante los métodos antes descritos.

Aunque se ha simplificado la investigación de una sección dada, sólo se puede determinar una sección que satisfaga los requisitos de resistencia impuestos por una carga excéntrica respecto de ambos ejes realizando análisis sucesivos de secciones supuestas. Se puede lograr una convergencia rápida y sencilla que permite obtener una sección satisfactoria aproximando las curvas de la Figura 7-14 por medio de dos rectas que se intersecan en la línea de 45 grados, como se ilustra en la Figura 7-7.

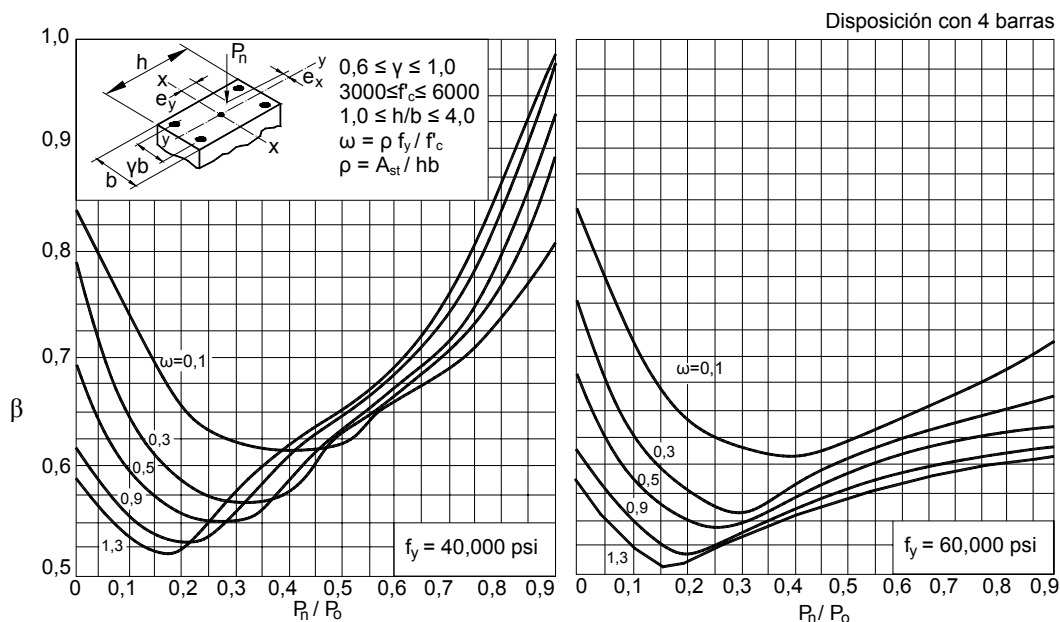


Figura 7-15 (a) – Constantes para el diseño biaxial – Disposición con 4 barras

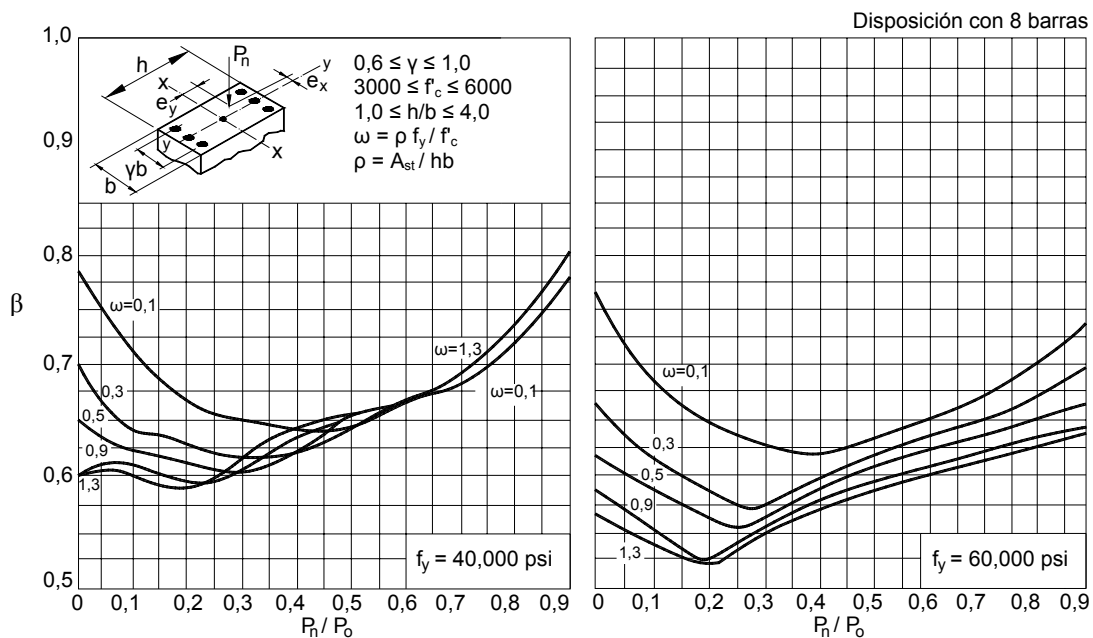


Figura 7-15 (b) – Constantes para el diseño biaxial – Disposición con 8 barras

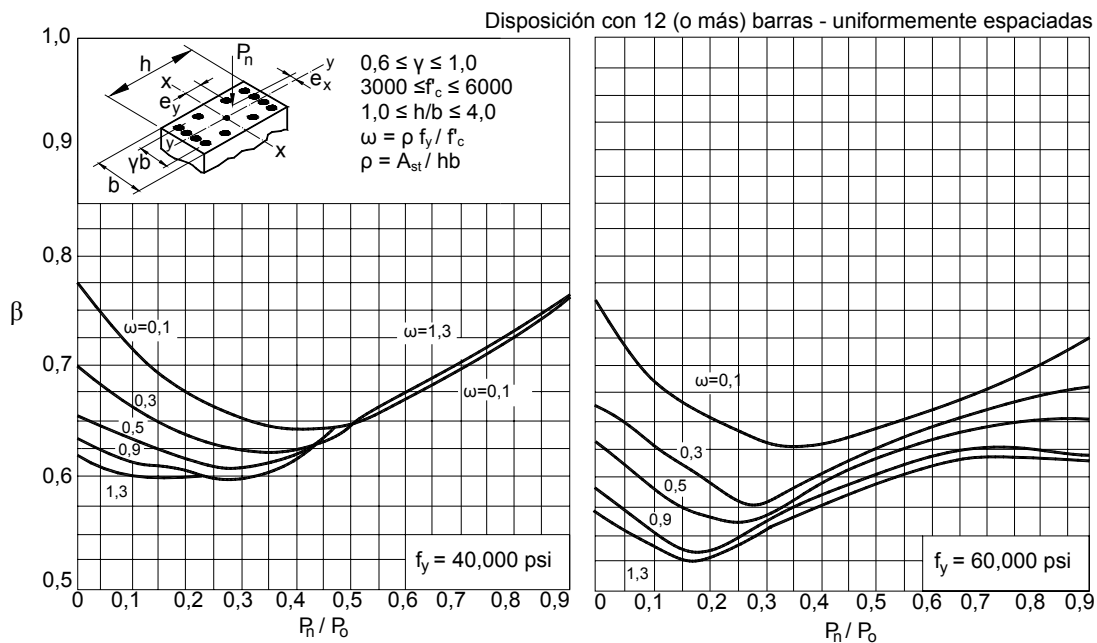


Figura 7-16 (a) – Constantes para el diseño biaxial – Disposiciones con 12 o más barras

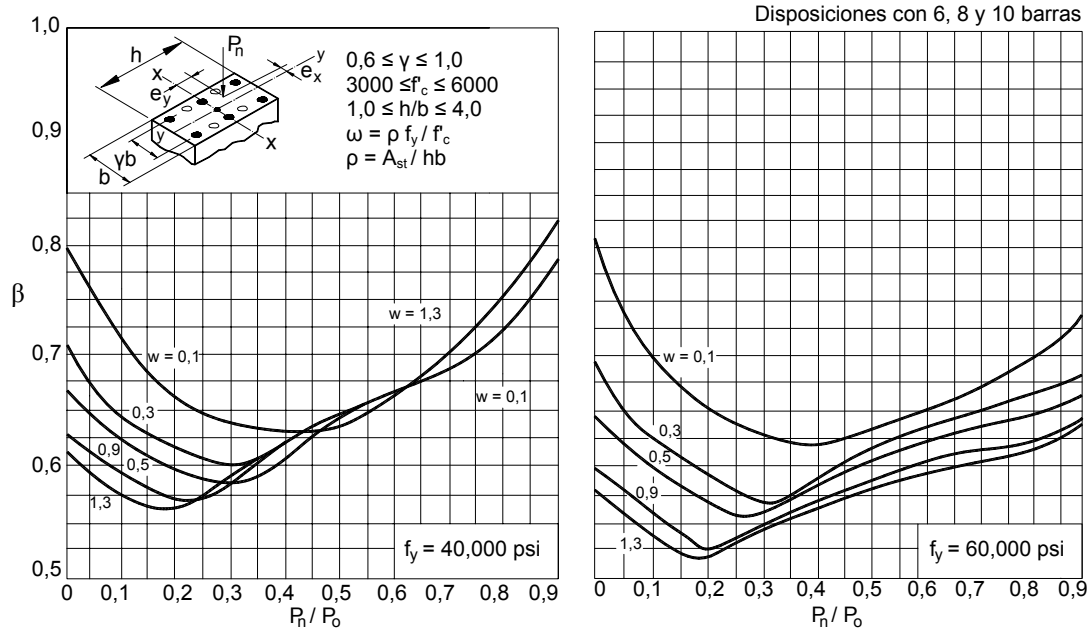


Figura 7-16 (b) – Constantes para el diseño biaxial – Disposición con 6, 8 y 10 barras

Por simples consideraciones geométricas se puede demostrar que la ecuación de las rectas superiores es:

$$\frac{M_{nx}}{M_{nox}} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} = 1 \text{ para } \frac{M_{ny}}{M_{nox}} > \frac{M_{noy}}{M_{nox}} \quad (15)$$

que por conveniencia se puede escribir como:

$$M_{nx} \left( \frac{M_{noy}}{M_{nox}} \right) \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) + M_{ny} = M_{noy} \quad (16)$$

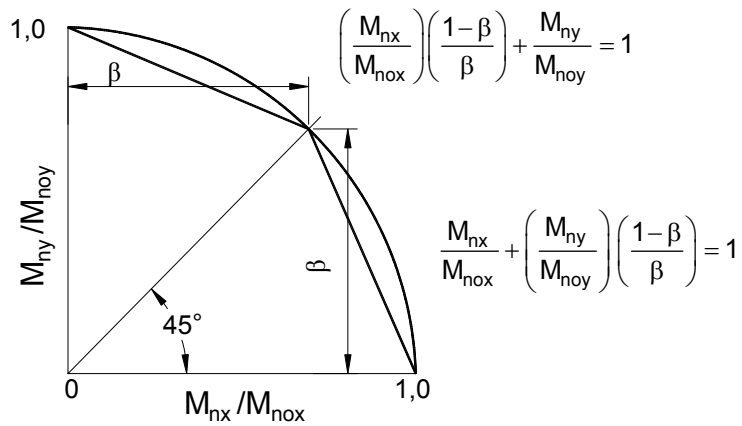


Figura 7-17 – Aproximación bilineal de un contorno de carga adimensionalizado [Fig. 7-13(b)]

Para las secciones rectangulares con armadura igualmente distribuida en todas sus caras, la Ecuación (16) se puede aproximar como:

$$M_{nx} \frac{b}{h} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) + M_{ny} \approx M_{noy} \quad (17)$$

La ecuación de la recta inferior de la Figura 7-17 es:

$$\frac{M_{nx}}{M_{nox}} + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) = 1 \quad \text{para} \quad \frac{M_{ny}}{M_{nx}} < \frac{M_{noy}}{M_{nox}} \quad (18)$$

ó

$$M_{nx} + M_{ny} \left( \frac{M_{nox}}{M_{noy}} \right) \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) = M_{nox} \quad (19)$$

Para las secciones rectangulares con armadura igualmente distribuida en todas sus caras,

$$M_{nx} + M_{ny} \frac{h}{b} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) = M_{nox} \quad (20)$$

En las ecuaciones de diseño (17) y (20), se debe seleccionar la relación  $b/h$  ó  $h/b$  y se debe suponer el valor de  $\beta$ . Para las columnas poco cargadas  $\beta$  generalmente variará entre 0,55 y alrededor de 0,70. Por lo tanto, en general una buena opción para iniciar un análisis de flexión biaxial consiste en tomar un valor de  $\beta$  igual a 0,65.

## PROCEDIMIENTO DE DISEÑO MANUAL

Para ayudarle al diseñador en el diseño de columnas solicitadas a flexión biaxial, a continuación se describe un procedimiento para diseño manual:

1. Elegir el valor de  $\beta$  ya sea igual a 0,65 o bien estimando un valor en base a las Figuras 7-15 y 7-16.
2. Si  $M_{ny}/M_{nx}$  es mayor que  $b/h$ , usar la Ecuación (17) para calcular una resistencia al momento uniaxial equivalente aproximada  $M_{noy}$ . Si  $M_{ny}/M_{nx}$  es menor que  $b/h$ , usar la Ecuación (20) para calcular una resistencia al momento uniaxial equivalente aproximada  $M_{nox}$ .
3. Diseñar la sección usando cualquiera de los métodos presentados anteriormente para flexión uniaxial con carga axial para obtener una resistencia a la carga axial  $P_n$  y una resistencia al momento uniaxial equivalente  $M_{noy}$  o  $M_{nox}$ .
4. Verificar la sección elegida mediante cualquiera de los tres métodos siguientes:
  - a. Método de las Cargas Recíprocas de Bresler:

$$P_n \leq \frac{1}{\frac{1}{P_{ox}} + \frac{1}{P_{oy}} - \frac{1}{P_o}} \quad (7)$$

- b. Método de los Contornos de las Cargas de Bresler:

$$\frac{M_{nx}}{M_{nox}} + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \leq 1,0 \quad (11)$$

- c. Método de los Contornos de las Cargas de la PCA: Usar la Ecuación (14) o bien

$$\frac{M_{nx}}{M_{nox}} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \leq 1,0 \text{ para } \frac{M_{ny}}{M_{nx}} > \frac{M_{noy}}{M_{nox}} \quad (15)$$

$$\frac{M_{nx}}{M_{nox}} + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) \leq 1,0 \text{ para } \frac{M_{ny}}{M_{nx}} < \frac{M_{noy}}{M_{nox}} \quad (18)$$

## REFERENCIAS

- 7.1 Wang, C. K. y Salmon, C. G., "*Reinforced Concrete Design*," Cuarta Edición, Harper & Row Publishers, New York, N.Y., 1985.
- 7.2 Mast, R. F. (1992), "Unified Design-Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Flexural and Compression Members," *ACI Structural Journal*, V. 89, pp. 185-199.
- 7.3 Munshi, J. A., (1998), "Design of Reinforced Concrete Flexural Sections by Unified Design Approach," *ACI Structural Journal*, V. 95, pp. 618-625.
- 7.4 Panell, F. N., "The Design of Biaxially Loaded Columns by Ultimate Load Methods," Magazine of Concrete Research, Londres, Julio 1960, pp. 103-104.
- 7.5 Panell, F. N., "Failure Surfaces for Members in Compression and Biaxial Bending," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 60, Enero 1963, pp. 129-149.
- 7.6 Bresler, Boris, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 57, Noviembre 1960, pp. 481-490, discussion pp. 1621-1638.
- 7.7 Furlong, Richard W., "Ultimate Strength of Square Columns under Biaxially Eccentric Loads," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 58, Marzo 1961, pp. 1129-1140.
- 7.8 Meek, J. L., "Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 60, Agosto 1963, pp. 1053-1064.
- 7.9 Aas-Jakosen, A., "Biaxial Eccentricities in Ultimate Load Design," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 61, Marzo 1964, pp. 293-315.
- 7.10 Ramamurthy, L. N., "Investigation of the Ultimate Strength of Square and Rectangular Columns under Biaxially Eccentric Loads," Symposium on Reinforced Concrete Columns, American Concrete Institute, Detroit, 1966, pp. 263-298.
- 7.11 *Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending*, Publication EB011D, Portland Cement Association, Skokie, IL, 1966.
- 7.12 *Biaxial and Uniaxial Capacity of Rectangular Columns*, Publication EB031D, Portland Cement Association, Skokie, IL, 1967.

## Ejemplo 7.1 – Diseño de una viga rectangular sólo con armadura de tracción

Seleccionar un tamaño de viga y la armadura requerida  $A_s$  para soportar momentos bajo carga de servicio  $M_D = 56$  ft-kips y  $M_L = 35$  ft-kips. Seleccionar la armadura para limitar la fisuración por flexión.

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60.00 \text{ psi}$$

Cálculos y discusión	Referencia del Código
1. Para ilustrar un procedimiento de diseño completo para secciones rectangulares sólo con armadura de tracción, se calculará una altura mínima de viga usando la máxima armadura permitida para elementos flexionados controlados por tracción, $\rho_t$ . El procedimiento de diseño seguirá el método descrito en las páginas anteriores.	10.3.4
Paso 1. Determinar la máxima cuantía de armadura para sección controlada por tracción para las resistencias de los materiales $f'_c = 4000$ psi y $f_y = 60.00$ psi	
$\rho_t = 0,01806$ de la Tabla 6-1	
Paso 2. Calcular el área $bd^2$ requerida.	
Resistencia al momento requerida:	
$M_u = (1,2 \times 56) + (1,6 \times 35) = 123,2$ ft-kips	Ec. (9-2)
$R_n = \rho f_y \left( 1 - \frac{0,5 \rho f_y}{0,85 f'_c} \right)$	
$= (0,01806 \times 60.000) \left( 1 - \frac{0,5 \times 0,01806 \times 60.000}{0,85 \times 4000} \right) = 911 \text{ psi}$	
$bd^2 (\text{requerida}) = \frac{M_u}{\phi R_n} = \frac{123,2 \times 12 \times 1000}{0,90 \times 911} = 1803 \text{ in.}^3$	
Paso 3. Dimensionar el elemento de manera que $bd^2$ provista sea $\geq$ que $bd^2$ requerida.	
Fijar $b = 10$ in. (ancho de las columnas)	
$d = \sqrt{\frac{1803}{10}} = 13,4 \text{ in.}$	
Altura mínima de la viga $\approx 13,4 + 2,5 = 15,9$ in.	
Para la resistencia al momento, una viga de $10 \times 16$ in. es adecuada. Sin embargo, la flecha es una consideración fundamental en el diseño de las vigas por el Método de Diseño por Resistencia. La limitación de la fisuración se discute en la Parte 10.	
Paso 4. Usando la altura de viga de 16 in., calcular un valor revisado de $\rho$ . A título ilustrativo, se calculará $\rho$ aplicando los cuatro métodos antes descritos.	

$$d = 16 - 2,5 = 13,5 \text{ in.}$$

1. Usando la Ecuación (4) (método exacto):

$$R_n = \frac{M_u}{\phi(bd^2 \text{ provista})} = \frac{123,2 \times 12 \times 1000}{0,90(10 \times 13,5^2)} = 901 \text{ psi}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{0,85f'_c}{f_y} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0,85f'_c}} \right) \\ &= \frac{0,85 \times 4}{60} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 901}{0,85 \times 4000}} \right) = 0,0178 \end{aligned}$$

2. Usando curvas de resistencia como las ilustradas en la Figura 7-2:

$$\text{para } R_n = 901 \text{ psi, } \rho \approx 0,0178$$

3. Usando tablas de resistencia al momento tales como la Tabla 7-1:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c bd^2} = \frac{123,2 \times 12 \times 1000}{0,90 \times 4000 \times 10 \times 13,5^2} = 0,2253$$

$$\omega \approx 0,2676$$

$$\rho = \frac{\omega f'_c}{f_y} = 0,2676 \times \frac{4}{60} = 0,0178$$

4. Por proporciones aproximadas:

$$\rho \approx (\rho \text{ original}) \frac{(R_n \text{ revisada})}{(R_n \text{ original})}$$

$$\rho = 0,01806 \times \frac{901}{911} = 0,0179$$

Paso 5. Calcular  $A_s$  requerida.

$$A_s = (\rho \text{ revisada}) (bd \text{ provista})$$

$$= 0,0178 \times 10 \times 13,5 = 2,40 \text{ in.}^2$$

Comparar los resultados con los obtenidos en el Ejemplo 10.1 del documento *Notes on ACI 318-99*, diseñado según el código de 1999.

	Según 318-99	Según 318-02
$M_u$	138 ft-k	123 ft-k
$\phi$	0,9	0,9
Dimensiones de la viga ( $b \times d$ )	10 × 16 in.	10 × 16 in.
$A_s$ requerida	2,78 in. <sup>2</sup>	2,40 in. <sup>2</sup>

La reducción de  $A_s$  es una consecuencia directa del hecho que, con factores de carga más bajos, no es necesario reducir  $\phi$  a menos de 0,9 para flexión en los elementos controlados por tracción.

2. Se puede revisar que los cálculos sean correctos aplicando consideraciones estáticas.

$$T = A_s f_y = 2,40 \times 60 = 144,0 \text{ kips}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b} = \frac{144,0}{0,85 \times 4 \times 10} = 4,24 \text{ in.}$$

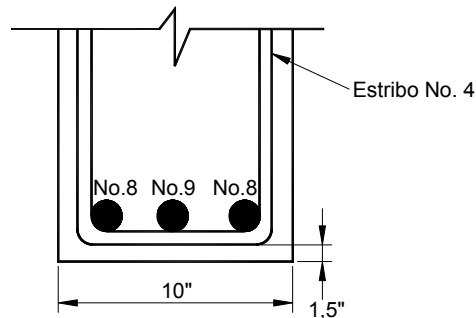
Resistencia al momento de diseño:

$$\begin{aligned} \phi M_n &= \phi \left[ A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \right] = 0,9 \left[ 144,0 \left( 13,5 - \frac{4,24}{2} \right) \right] \\ &= 1475 \text{ in.-kips} = 122,9 \text{ ft-kips} \approx M_u \text{ requerido} = 123,2 \text{ ft-kips} \quad \text{VERIFICA} \end{aligned}$$

3. Seleccionar la armadura de manera de satisfacer los requisitos de distribución de la armadura de flexión indicados en 10.6. 10.6

$$A_s \text{ requerida} = 2,40 \text{ in.}^2$$

A modo de ejemplo, seleccionamos 1 barra No. 9 y 2 barras No. 8 ( $A_s = 2,40 \text{ in.}^2$ ). En la práctica se prefiere utilizar un solo tamaño de barra.



$$c_c = 1,5 + 0,5 = 2,0 \text{ in.}$$

Máxima separación permitida,

$$s = \frac{540}{f_s} - 2,5c_c \quad \text{Ec. (10-4)}$$

Usar  $f_s = 36 \text{ ksi}$

$$s = \frac{540}{36} - (2,5 \times 2,0) = 10 \text{ in.}$$

o ver Tabla 9-1: para  $f_s = 36$  y  $c_c = 2 \therefore s = 10 \text{ in.}$

$$\begin{aligned} \text{Separación provista} &= \frac{1}{2} \left\{ 10 - 2 \left( 1,5 + 0,5 + \frac{1,0}{2} \right) \right\} \\ &= 2,50 \text{ in.} < 10 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA} \end{aligned}$$

---

## Ejemplo 7.2 – Diseño de una losa maciza armada en una dirección

---

Determinar el espesor y la armadura requerida para una losa continua de dos o más tramos iguales armada en una sola dirección.  
Luz libre  $\ell = 18$  ft.

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60.00 \text{ psi}$$

$$\text{Cargas de servicio: } w_d = 75 \text{ psf (asumir una losa de 6 in.); } w_\ell = 50 \text{ psf}$$

---

Cálculos y discusión	Referencia del Código
----------------------	-----------------------

---

1. Calcular las resistencias al momento requeridas usando el análisis aproximado de momentos permitido por 8.3.3.  
El diseño se basará en el tramo final.

$$\text{Carga mayorada } w_u = (1,2 \times 75) + (1,6 \times 50) = 170 \text{ psf} \quad \text{Ec. (9-2)}$$

Momento positivo en el extremo discontinuo integral con el apoyo:

$$+M_u = w_u \ell_n^2 / 14 = 0,170 \times 18^2 / 14 = 3,93 \text{ ft-kips/ft} \quad 8.3.3$$

Momento negativo en la cara exterior del primer apoyo interior:

$$-M_u = w_u \ell_n^2 / 10 = 0,170 \times 18^2 / 10 = 5,51 \text{ ft-kips/ft} \quad 8.3.3$$

2. Determinar el espesor de losa requerido. 10.3.3

Seleccionar un porcentaje de armadura  $\rho$  aproximadamente igual a  $0,5\rho_t$ , o un medio del máximo permitido para secciones controladas por tracción, de manera de limitar la flecha a valores razonables.

$$\text{De la Tabla 6-1, para } f'_c = 4000 \text{ psi y } f_y = 60.000 \text{ psi: } \rho_t = 0,01806$$

$$\text{Fijar } \rho = 0,5 (0,01806) = 0,00903$$

El procedimiento de diseño seguirá el método descrito anteriormente:

$$\begin{aligned} R_n &= \rho f_y \left( 1 - \frac{0,5 \rho f_y}{0,85 f'_c} \right) \\ &= (0,00903 \times 60.000) \left( 1 - \frac{0,5 \times 0,00903 \times 60.000}{0,85 \times 4000} \right) = 499 \text{ psi} \end{aligned}$$

$$\text{d requerida: } d = \sqrt{\frac{M_u}{\phi R_n b}} = \sqrt{\frac{5,51 \times 12.000}{0,90 \times 499 \times 12}} = 3,50 \text{ in.}$$

$$\text{Suponiendo barras No. 5, h requerida es } h = 3,50 + 0,31/2 + 0,75 = 4,41 \text{ in.}$$

Estos cálculos indican que un espesor de losa de 4,5 in. es adecuado. Sin embargo, la Tabla 9-5(a) indica un espesor mínimo de  $\ell/24 \geq 9$  in., a menos que se calculen las flechas. También se debe observar que la Tabla 9-5(a) sólo es aplicable a "elementos que no soportan ni están unidos a tabiques u otros elementos no estructurales que pueden sufrir daños por grandes flechas." Si no se satisface esta condición es necesario calcular las flechas.

A título ilustrativo se calculará la armadura requerida para  $h = 4,5$  in.,  $d = 3,59$  in.

3. Calcular la armadura de momento negativo requerida.

$$R_n = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{5,51 \times 12 \times 1000}{0,9 \times 12 \times 3,59^2} = 475$$

$$\rho \approx 0,00903 \left( \frac{475}{499} \right) = 0,00860$$

$$-A_s \text{ (requerida)} = \rho b d = 0,00860 \times 12 \times 3,59 = 0,37 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

Usar barras No. 5 con una separación de 10 in. ( $A_s = 0,37 \text{ in.}^2/\text{ft}$ )

4. Para la armadura de momento positivo usar la Tabla 7-1:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{3,93 \times 12.000}{0,90 \times 4000 \times 12 \times 3,59^2} = 0,0847$$

De la Tabla 7-1,  $\omega = 0,090$

$$\rho = \frac{\omega f'_c}{f_y} = 0,090 \times \frac{4}{60} = 0,006$$

$$+A_s \text{ (requerida)} = \rho b d = 0,006 \times 12 \times 3,59 = 0,258 \text{ in.}^2/\text{ft}$$

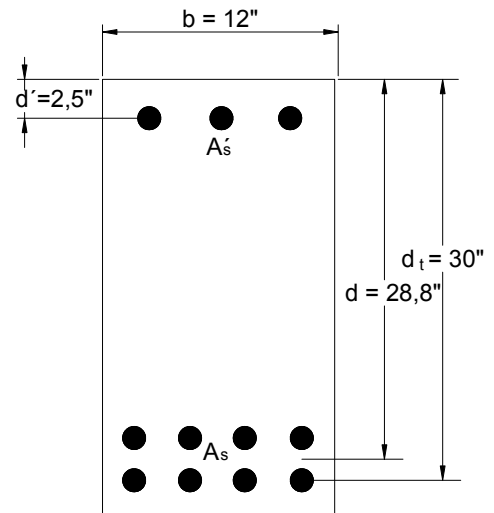
Usar barras No. 4 con una separación de 9 in. ( $A_s = 0,27 \text{ in.}^2/\text{ft}$ ) o barras No. 5 con una separación de 12 in. ( $A_s = 0,31 \text{ in.}^2/\text{ft}$ )

### Ejemplo 7.3 – Diseño de una viga rectangular con armadura de compresión

Las dimensiones de la sección transversal de una viga se limitan a los valores ilustrados. Determinar el área de armadura requerida para momentos bajo carga de servicio  $M_D = 430$  ft-kips y  $M_L = 175$  ft-kips. Verificar los requisitos para limitación de la fisuración del artículo 10.6.

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60.00 \text{ psi}$$



### Cálculos y discusión

### Referencia del Código

- Determinar la armadura requerida.

Paso 1. Determinar si se requiere armadura de compresión.

$$M_u = 1,2 M_D + 1,6 M_L = 796 \text{ ft-kips}$$

Ec. (9-2)

$$M_n = M_u / \phi = 796 / 0,9 = 884 \text{ ft-kips}$$

$$R_n = \frac{M_n}{bd^2} = \frac{884 \times 12 \times 1000}{12 \times 30^2} = 982$$

Este valor es mayor que el máximo  $R_n$  de 911 para secciones controladas por tracción construidas de hormigón de 4000 psi, sin armadura de compresión (ver Tabla 6-1). Además, parece que será necesario usar dos capas de armadura. Estimar  $d = d_t - 1,2 \text{ in.} = 28,8 \text{ in.}$

Paso 2. Hallar el momento de resistencia nominal resistido por el hormigón de la sección, sin armadura de compresión.

$$\rho_t = 0,01806 \text{ de la Tabla 6-1}$$

$$\rho = \rho_t \left( \frac{d_t}{d} \right) = 0,01806 \left( \frac{30}{28,8} \right) = 0,01881$$

(6)

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0,01881 \times \frac{60}{4} = 0,282$$

$$\frac{M_{nt}}{f'_c b d^2} = 0,2351 \text{ de la Tabla 7-1}$$

$$M_{nt} = 0,2351 \times 4 \times 12 \times 28,8^2 = 9360 \text{ in.-kips} = 780 \text{ ft-kips resistidos por el hormigón}$$

Resistencia al momento requerida a ser resistida por la armadura de compresión:

$$M'_n = 884 - 780 = 104 \text{ ft-kips}$$

Paso 3. Determinar la tensión en el acero de compresión  $f'_s$ .

Verificar la fluencia de la armadura de compresión. Como la sección se diseñó para el límite de deformación específica neta de tracción correspondiente a sección controlada por tracción  $\epsilon_t = 0,005$ ,  $c/d_t = 0,375$

$$c = 0,375 d_t = 0,375 \times 30 = 11,25 \text{ in.}$$

$$d'_e/c = 2,5 / 11,25 = 0,22 < 0,31$$

La armadura de compresión entra en fluencia al alcanzar la resistencia nominal ( $f'_s = f_y$ )

Paso 4. Determinar la armadura total requerida:

$$\begin{aligned} A'_s &= \frac{M'_n}{f_y (d - d')} \\ &= \frac{104 \times 12 \times 1000}{60.000 (28,8 - 2,5)} = 0,79 \text{ in.}^2 \end{aligned}$$

$$A_s = 0,79 + \rho b d$$

$$= 0,79 + (0,01881 \times 12 \times 28,8) = 7,29 \text{ in.}^2$$

Paso 5. Verificar la capacidad de momento.

Cuando la armadura de compresión entra en fluencia:

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0,85 f'_c b} = \frac{6,50 \times 60}{0,85 \times 4 \times 12} = 9,56 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned} \phi M_n &= \phi \left[ (A_s - A'_s) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y (d - d') \right] \\ &= 0,9 \left[ 6,50 \times 60 \left( 28,8 - \frac{9,56}{2} \right) + (0,79 \times 60) (28,8 - 2,5) \right] / 12 \end{aligned}$$

$$= 796 \text{ ft-kips} = M_u = 796 \text{ ft-kips} \quad \text{VERIFICA}$$

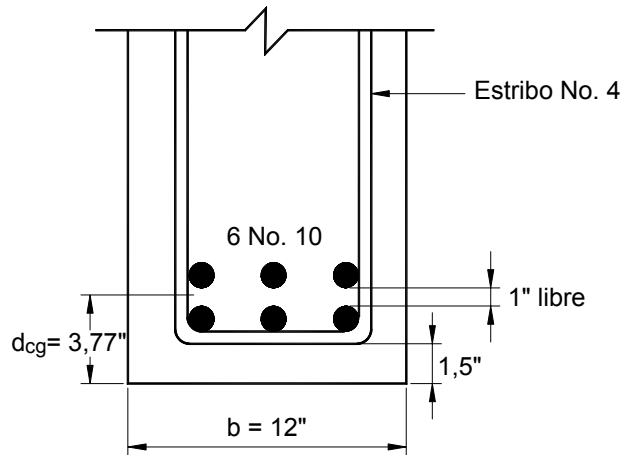
2. Seleccionar la armadura para satisfacer los criterios de fisuración por flexión de 10.6.

Armadura de compresión:

Seleccionar 2 barras No. 6 ( $A'_s = 0,88 \text{ in.}^2 > 0,79 \text{ in.}^2$ )

Armadura de tracción:

Seleccionar 6 barras No. 10 en dos capas ( $A_s = 7,62 \text{ in.}^2 > 7,29 \text{ in.}^2$ )



Máxima separación permitida,

$$s = \frac{540}{f_s} - 2,5 c_c \quad \text{Ec. (10-4)}$$

$$C_c = 1,5 + 0,5 = 2,0 \text{ in.}$$

Usar  $f_s = 36 \text{ ksi}$

$$s = \frac{540}{36} - (2,5 \times 2) = 10 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned} \text{Separación provista} &= \frac{1}{2} \left\{ 12 - 2 \left( 1,5 + 0,5 + \frac{1,27}{2} \right) \right\} \\ &= 4,68 \text{ in.} < 10 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA} \end{aligned}$$

4. Se requieren zunchos o estribos cerrados en toda la distancia en la cual por motivos de resistencia se requiere armadura de compresión. 7.11.1

$$\text{Máxima separación} = 16 \times \text{diámetro de las barras longitudinales} = 16 \times 0,75 = 12 \text{ in. (determinante)} \quad \text{7.10.5.2}$$

$$= 48 \times \text{diámetro de las barras de los estribos} = 48 \times 0,5 = 24 \text{ in.}$$

$$= \text{menor dimensión del elemento} = 12 \text{ in.}$$

Usar  $s_{\max} = 12 \text{ in.}$  para estribos No. 4

Comparar la armadura requerida con la del Ejemplo 10.3 del documento *Notes on ACI 318-99*.

	<b>Según 318-99</b>	<b>Según 318-02</b>	<b>Según 318-02 suponiendo <math>d_t = d</math></b>
$M_u$	900 ft-k	796 ft-k	796 ft-k
$\phi$	0,9	0,9	0,9
$A'_s$ requerida	0,47 in. <sup>2</sup>	0,79 in. <sup>2</sup>	0,97
$A_s$ requerida	8,17 in. <sup>2</sup>	7,29 in. <sup>2</sup>	7,21
Armadura total	8,67 in. <sup>2</sup>	8,08 in. <sup>2</sup>	8,18

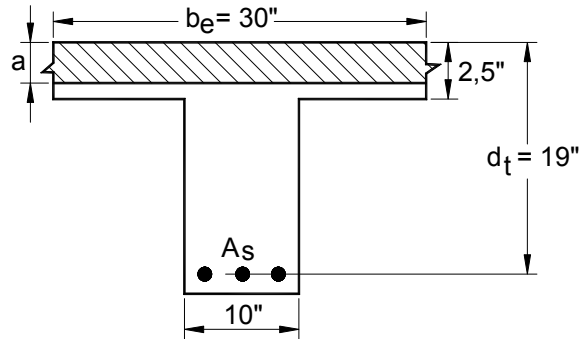
Se requiere algo más de acero de compresión, pero usando ACI 318-02 se obtiene una reducción significativa del acero de tracción.

También se indican los resultados de un cálculo (no incluido) realizado usando la hipótesis simplificadora  $d = d_t$ . El acero adicional es de apenas 1,2 por ciento.

## Ejemplo 7.4 – Diseño de una sección con alas sólo con armadura de tracción

Seleccionar la armadura para la sección ilustrada, de manera que soporte los siguientes momentos por carga permanente y sobrecarga de servicio:  $M_D = 72$  ft-kips y  $M_L = 88$  ft-kips.

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$
$$f_y = 60.00 \text{ psi}$$



### Cálculos y discusión

### Referencia del Código

1. Determinar la resistencia a la flexión requerida.

$$M_u = (1,2 \times 72) + (1,6 \times 88) = 227 \text{ ft-kips}$$

Ec. (9-2)

2. Usando la Tabla 7-1, determinar la profundidad del bloque de tensiones equivalente,  $a$ , como para una sección rectangular. Asumir  $\phi = 0,9$ .

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{227 \times 12}{0,9 \times 4 \times 30 \times 19^2} = 0,0699$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,073$

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b} = \frac{\rho d f_y}{0,85 f'_c} = 1,18 \omega d = 1,18 \times 0,073 \times 19 = 1,64 \text{ in.} < 2,5 \text{ in.}$$

Como  $a < h_f$ , determinar  $A_s$  como para una sección rectangular (para el caso que  $a > h_f$  ver el Ejemplo 7.5).

Verificar  $\phi$ :

$$c = a / \beta_1 = 1,64 / 0,85 = 1,93 \text{ in.}$$

$$c / d_t = 1,93 / 19 = 0,102 < 0,375$$

La sección es controlada por la tracción, y  $\phi = 0,9$ .

3. Calcular  $A_s$  requerida.

$$A_s f_y = 0,85 f'_c b a$$

$$A_s = \frac{0,85 \times 4 \times 30 \times 1,64}{60} = 2,78 \text{ in.}^2$$

Alternativamente,

$$A_s = \rho b d = \omega \frac{f'_c}{f_y} b d$$

$$= 0,073 \times \frac{4}{60} \times 30 \times 19 = 2,77 \text{ in.}^2$$

Intentar con 3 barras No. 9 ( $A_s = 3,0 \text{ in.}^2$ )

4. Verificar armadura mínima requerida.

10.5

Para  $f'_c < 4444 \text{ psi}$ ,

Ec. (10-3)

$$\rho_{\min} = \frac{200}{f_y} = \frac{200}{60.000} = 0,0033$$

$$\frac{A_s}{b_w d} = \frac{3,0}{30 \times 19} = 0,0053 > 0,0033 \quad \text{VERIFICA}$$

5. Verificar distribución de la armadura.

10.6

Máxima separación permitida,

$$s = \frac{540}{f_s} - 2,5c_c$$

$$c_c = 1,5 + 0,5 = 2,0 \text{ in.}$$

Usar  $f_s = 36 \text{ ksi}$

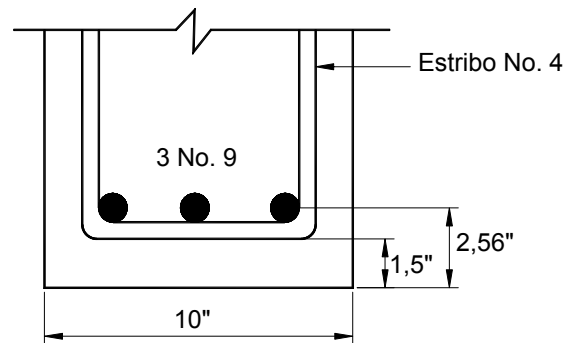
$$s = \frac{540}{36} - (2,5 \times 2,0) = 10 \text{ in.}$$

$$\text{Separación provista} = \frac{1}{2} \left\{ 10 - 2 \left( 1,5 + 0,5 + \frac{1,128}{2} \right) \right\}$$

$$= 2,44 \text{ in.} < 10 \text{ in.}$$

VERIFICA

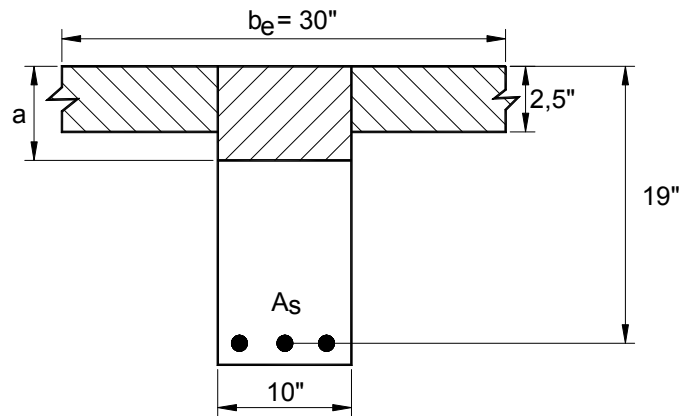
Ec. (10-4)



## Ejemplo 7.5 – Diseño de una sección con alas sólo con armadura de tracción

Seleccionar la armadura para la sección en Te ilustrada, para soportar un momento mayorado  $M_u = 400$  ft-kips.

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$
$$f_y = 60.00 \text{ psi}$$



### Cálculos y discusión

### Referencia del Código

#### 1. Determinar la armadura requerida.

Paso 1. Usando la Tabla 7-1, determinar la profundidad del bloque de tensiones equivalente,  $a$ , como para una sección rectangular.

Asumir que la sección es controlada por tracción,  $\phi = 0,9$ .

$$M_n = M_u / \phi = 400 / 0,9 = 444 \text{ ft-kips}$$

Asumir  $a < 2,5$  in.

$$\frac{M_n}{f'_c b d^2} = \frac{444 \times 12}{4 \times 30 \times 19^2} = 0,123$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,134$

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b} = 1,18 \omega d$$

$$= 1,18 \times 0,134 \times 19 = 3,0 \text{ in.} > 2,5 \text{ in.}$$

Paso 2. Como el valor de  $a$  calculado como para sección rectangular es mayor que el espesor del ala, el bloque de tensiones equivalente se extiende hacia el alma, y el diseño se debe basar en un comportamiento como sección Te. Para el caso en que  $a$  es menor que el espesor del ala, ver el Ejemplo 7.4.

Paso 3. Calcular la armadura requerida  $A_{sf}$  y la resistencia nominal al momento requerida  $M_{nf}$  correspondientes al ala que sobresale de la viga solicitada a compresión (ver Parte 6).

Resistencia a la compresión del ala

$$C_f = 0,85 f'_c (b - b_w) h_f$$

$$= 0,85 \times 4 (30 - 10) 2,5 = 170 \text{ kips}$$

$A_{sf}$  requerida para equilibrar  $C_f$ :

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{170}{60} = 2,83 \text{ in.}^2$$

Resistencia nominal al momento del ala:

$$M_{nf} = \left[ A_{sf} f_y \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right]$$

$$= [2,83 \times 60 (19 - 1,25)] / 12 = 251 \text{ ft-kips}$$

Paso 4. Resistencia nominal al momento requerida a ser soportada por el alma de la viga:

$$M_{nw} = M_n - M_{nf} = 444 - 251 = 193 \text{ ft-kips}$$

Paso 5. Usando la Tabla 7-1, calcular la armadura  $A_{sw}$  requerida para desarrollar la resistencia al momento a ser soportada por el alma.

$$\frac{M_{nw}}{f'_c b d^2} = \frac{193 \times 12}{4 \times 10 \times 19^2} = 0,1604$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,179$

$$\rho_w = 0,179 \times \frac{4}{60} = 0,01193$$

Paso 6. Verificar si la sección es controlada por tracción, con  $\phi = 0,9$ :

$$\rho_t = 0,01806 \text{ de la Tabla 6-1}$$

Por lo tanto,  $\rho_w < \rho_t$  y la sección es controlada por tracción ( $\phi = 0,9$ )

$$A_{sw} = \rho_w b d = 0,01193 \times 10 \times 19 = 2,27 \text{ in.}^2$$

Paso 7. Armadura total requerida para soportar el momento mayorado  $M_u = 400 \text{ ft-kips}$ :

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 2,83 + 2,27 = 5,10 \text{ in.}^2$$

Paso 8. Verificar la capacidad de momento.

$$\phi M_n = \phi \left[ (A - A_{sf}) f_y \left( d - \frac{a_w}{2} \right) + A_{sf} f_y \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right]$$

$$a_w = \frac{(A_s - A_{sf}) f_y}{0,85 f'_c b_w}$$

$$= \frac{(5,10 - 2,83) \times 60}{0,85 \times 4 \times 10} = 4,01 \text{ in.}$$

$$\phi M_n = 0,9 \left[ (5,10 - 2,83) 60 \left( 19 - \frac{4,01}{2} \right) + (2,83 \times 60) \left( 19 - \frac{2,5}{2} \right) \right] / 12$$

$$= 400 \text{ ft-kips} = M_u = 400 \text{ ft-kips} \quad \text{VERIFICA}$$

2. Seleccionar la armadura para satisfacer los criterios de limitación de la fisuración.

10.6

Intentar con 5 barras No. 9 dispuestas en dos capas ( $A_s = 5,00 \text{ in.}^2$ )  
(2% menos de lo requerido, se supone suficiente)

Máxima separación permitida,

$$s = \frac{540}{f_s} - 2,5c_c \quad \text{Ec. (10-4)}$$

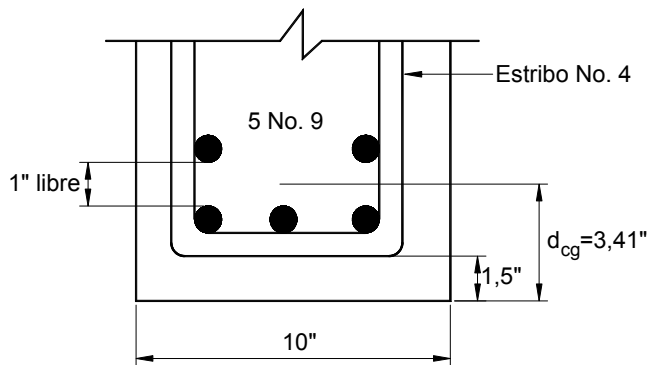
$$c_c = 1,5 + 0,5 = 2,0 \text{ in.}$$

Usar  $f_s = 36 \text{ ksi}$

$$s = \frac{540}{36} - (2,5 \times 2,0) = 10 \text{ in.}$$

$$\text{Separación provista} = \frac{1}{2} \left\{ 10 - 2 \left( 1,5 + 0,5 + \frac{1,128}{2} \right) \right\}$$

$$= 2,44 \text{ in.} < 10 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$



Nota: Se requieren dos capas de armadura, lo cual puede no haber sido reconocido al suponer  $d$  igual a 19 in. Además, la armadura provista es ligeramente menor que la requerida. Por lo tanto, la altura total debería ser algo mayor que  $d + d_{cg} = 22,41 \text{ in.}$ , o bien se debería aumentar la cantidad de armadura.

## Ejemplo 7.6 – Diseño de un sistema nervurado armado en una dirección

Determinar la altura y armadura requerida para el sistema nervurado ilustrado a continuación. Los nervios tienen 6 in. de ancho y la separación entre centros es de 36 in. La altura de la losa es de 3,5 in.

$$f'_c = 4000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60.00 \text{ psi}$$

DL de servicio = 130 psf (se asume como total correspondiente a los nervios y las vigas más las cargas permanentes impuestas)

LL de servicio = 60 psf

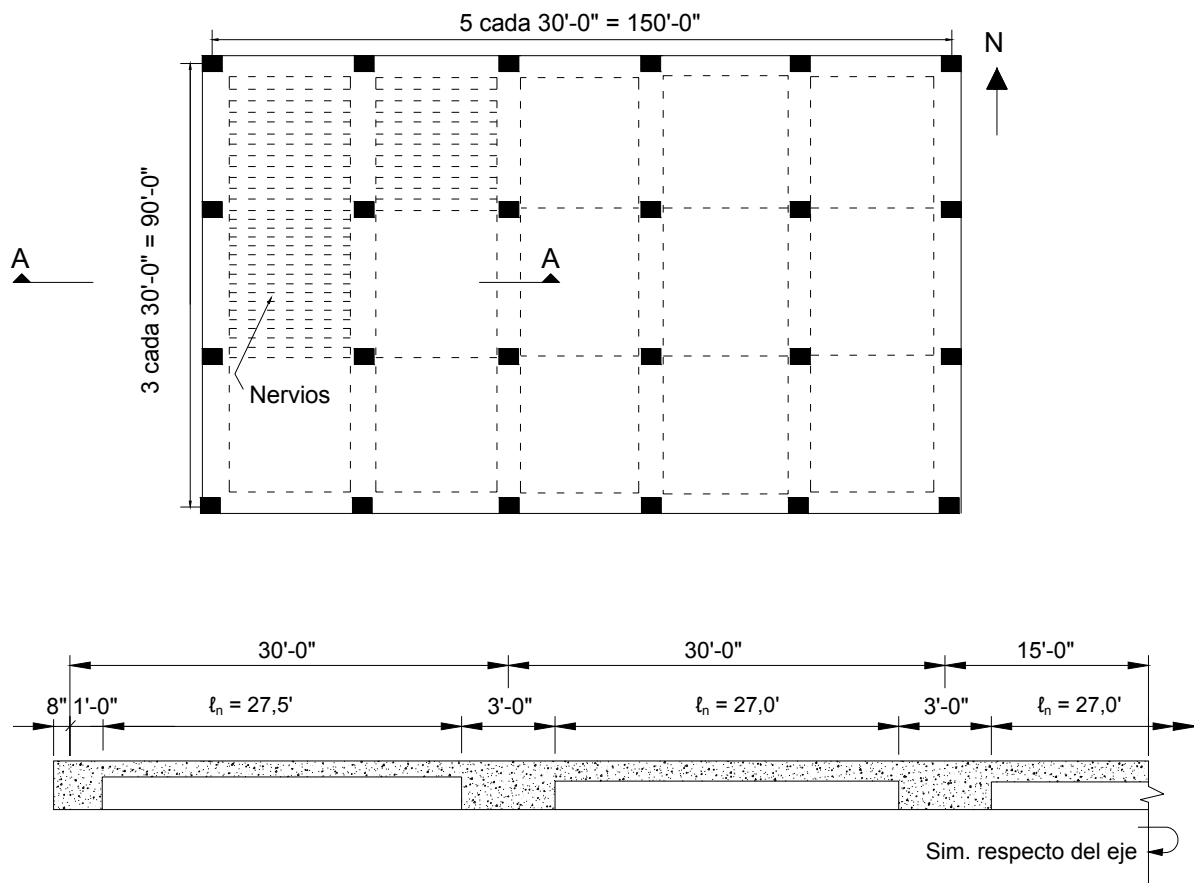
Ancho de las vigas perimetrales = 20 in.

Ancho de las vigas interiores = 36 in.

Columnas: interiores =  $18 \times 18$  in.

exteriores =  $16 \times 16$  in.

Altura de piso (típica) = 13 ft



Corte A-A

1. Calcular los momentos mayorados en las caras de los apoyos y determinar la altura de los nervios.

$$w_u = [(1,2 \times 0,13) + (1,6 \times 0,06)] \times 3 = 0,756 \text{ kips/ft} \quad \text{Ec. (9-2)}$$

Usando los coeficientes aproximados, los momentos mayorados en el tramo son los siguientes: 8.3.3

Ubicación	$M_u$ (ft-kips)
Tramo exterior	
Ext. neg.	$w_u \ell_n^2 / 24 = 0,756 \times 27,5^2 / 24 = 23,8$
Pos.	$w_u \ell_n^2 / 14 = 0,756 \times 27,5^2 / 14 = 40,8$
Int. neg.	$w_u \ell_n^2 / 10 = 0,756 \times 27,5^2 / 10 = 56,1$
Tramo interior	
Pos.	$w_u \ell_n^2 / 16 = 0,756 \times 27^2 / 16 = 34,4$
Neg.	$w_u \ell_n^2 / 11 = 0,756 \times 27^2 / 11 = 50,1$

Para una limitación razonable de las flechas, seleccionar una cuantía  $\rho$  igual a aproximadamente  $0,5\rho_t$ . De la Tabla 6-1,  $\rho_t = 0,01806$ .

$$\text{Fijar } \rho = 0,5 \times 0,01806 = 0,00903$$

Determinar la altura requerida de los nervios en base a  $M_u = 56,1$  ft-kips:

$$\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c} = \frac{0,00903 \times 60}{4} = 0,1355$$

De la Tabla 7-1,  $M_u / \phi f'_c b d^2 = 0,1247$

$$d = \sqrt{\frac{M_u}{\phi f'_c b_w (0,1247)}} = \sqrt{\frac{56,1 \times 12}{0,9 \times 4 \times 6 \times 0,1247}} = 15,8 \text{ in.}$$

$$h \approx 15,8 + 1,25 = 17,1 \text{ in.}$$

De la Tabla 9-5(a), la mínima altura requerida para los nervios es:

$$h_{\min} = \frac{\ell}{18,5} = \frac{30 \times 12}{18,5} = 19,5 \text{ in.}$$

Usar nervios de 19,5 in. de altura (16 + 3,5).

2. Calcular la armadura requerida.

- a. Tramo exterior, momento exterior negativo

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{23,8 \times 12}{0,9 \times 4 \times 6 \times 18,25^2} = 0,0397$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,041$

$$A_s = \frac{\omega b d f'_c}{f_y} = \frac{0,041 \times 6 \times 18,25 \times 4}{60} = 0,30 \text{ in.}^2$$

Para  $f'_c < 4444 \text{ psi}$ , usar

$$A_{s,\min} = \frac{200 b_w d}{f_y} = \frac{200 \times 6 \times 18,25}{60.000} = 0,37 \text{ in.}^2 > A_s \quad \text{Ec. (10-3)}$$

Distribuir las barras uniformemente en la losa superior:

$$A_s = \frac{0,37}{3} = 0,123 \text{ in.}^2 / \text{ft}$$

Usar barras No. 3 con una separación de 10 in. ( $A_s = 0,13 \text{ in.}^2 / \text{ft}$ )

b. Tramo exterior, momento positivo

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{40,8 \times 12}{0,9 \times 4 \times 36 \times 18,25^2} = 0,0113$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,012$

$$A_s = \frac{\omega b d f'_c}{f_y} = \frac{0,012 \times 36 \times 18,25 \times 4}{60} = 0,53 \text{ in.}^2$$

Verificar comportamiento de sección rectangular:

$$a = \frac{A_s f_y}{0,85 f'_c b} = \frac{0,53 \times 60}{0,85 \times 4 \times 36} = 0,26 \text{ in.} < 3,5 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Usar 2 barras No. 5 ( $A_s = 0,62 \text{ in.}^2$ )

c. Tramo exterior, momento interior negativo

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{56,1 \times 12}{0,9 \times 4 \times 6 \times 18,25^2} = 0,0936$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,100$

$$A_s = \frac{\omega b d f'_c}{f_y} = \frac{0,100 \times 6 \times 18,25 \times 4}{60} = 0,73 \text{ in.}^2$$

Distribuir la armadura uniformemente en la losa:

$$A_s = \frac{0,73}{3} = 0,24 \text{ in.}^2 / \text{ft}$$

Usar barras No. 5 con una separación de 12 in. por consideraciones de limitación de la fisuración (ver Tabla 9-1).

- d. La armadura para las demás secciones se obtiene de manera similar. La siguiente tabla resume los resultados. Observar que en todas las secciones se satisfacen los requisitos de 10.6 sobre limitación de la fisuración.

Ubicación	$M_u$ (ft-kips)	$A_s$ (in. <sup>2</sup> )	Armadura
Tramo exterior			
Ext. neg.	23.8	0.37	Barras No. 3 separadas 10 in.
Pos.	40.8	0.53	2 barras No. 5
Int. neg.	56.1	0.73	Barras No. 5 separadas 12 in.*
Tramo interior			
Pos.	34.4	0.42	2 barras No. 5
Neg.	50.1	0.65	Barras No. 5 separadas 12 in.

\* Separación máxima de 12 in. requerida para limitar la fisuración en la losa.

- e. A menudo la armadura de la losa normal a los nervios se coloca a la mitad de la altura de la losa de manera que resista tanto momento positivo como momento negativo.

$$\text{Usar } M_u = \frac{w_u \ell_n^2}{12} = \frac{0,185 \times 2,5^2}{12} = 0,096 \text{ ft-kips}$$

$$\text{donde } w_u = 1,2 (44 + 30) + 1,6 (60)$$

$$= 185 \text{ psf} = 0,185 \text{ kips-ft}^2$$

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{0,096 \times 12}{0,9 \times 4 \times 12 \times 1,75^2} = 0,0087$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,0087$

$$A_s = \frac{\omega b d f'_c}{f_y} = \frac{0,0087 \times 12 \times 1,75 \times 4}{60} = 0,01 \text{ in.}^2 / \text{ft}$$

Para las losas, la armadura mínima está determinada por los requisitos dados en 7.12.2.1:

$$A_{s,\min} = 0,0018 \times 12 \times 3,5 = 0,08 \text{ in.}^2 / \text{ft}$$

$$s_{\max} = 5h = 5 \times 3,5 = 17,5 \text{ in. (valor determinante)}$$

7.12.2.2

$$= 18 \text{ in.}$$

Usar barras No. 3 con una separación de 16 in. ( $A_s = 0,08 \text{ in.}^2 / \text{ft}$ )

3. Se debe verificar el corte en los apoyos. Dado que los nervios satisfacen los requisitos de 8.11, se permite que la contribución del hormigón a la resistencia al corte  $V_c$  sea 10% mayor que la especificada en el Capítulo 11.

8.11.8

---

## Ejemplo 7.7 – Diseño de vigas continuas

---

Determinar la altura y armadura requerida para las vigas de apoyo ubicadas a lo largo de la línea de columnas interiores del Ejemplo 7.6. El ancho de las vigas es de 36 in.

$$f_c = 4000 \text{ psi}$$

$$f_y = 60.00 \text{ psi}$$

$$\text{DL de servicio} = 130 \text{ psf (se asume como total correspondiente a los nervios y las vigas más las cargas permanentes impuestas)}$$

$$\text{LL de servicio} = 60 \text{ psf}$$

$$\begin{aligned} \text{Columnas: interiores} &= 18 \times 18 \text{ in.} \\ &\text{exteriores} = 16 \times 16 \text{ in.} \end{aligned}$$

$$\text{Altura de piso (típica)} = 13 \text{ ft}$$

---

### Cálculos y discusión

### Referencia del Código

---

1. Calcular los momentos mayorados en las caras de los apoyos y determinar la altura de la viga.

$$w_u = [(1,2 \times 0,13) + (1,6 \times 0,06)] \times 30 = 7,56 \text{ kips/ft} \quad \text{Ec. (9-2)}$$

Usando los coeficientes aproximados, los momentos mayorados en los tramos son los siguientes: 8.3.3.3

Ubicación	$M_u$ (ft-kips)
Tramo exterior	
Ext. neg.	$w_u \ell_n^2 / 16 = 7,56 \times 28,58^2 / 16 = 385,9$
Pos.	$w_u \ell_n^2 / 14 = 7,56 \times 28,58^2 / 14 = 441,1$
Int. neg.	$w_u \ell_n^2 / 10 = 7,56 \times 28,54^2 / 10 = 615,8$
Tramo interior	
Pos.	$w_u \ell_n^2 / 16 = 7,56 \times 28,50^2 / 16 = 383,8$

Por motivos de economía global, seleccionar la altura de la viga igual a la altura de los nervios determinada en el Ejemplo 7.6.

Verificar la altura de 19,5 in. para  $M_u = 615,8$  ft-kips:

De la Tabla 6-2:

$$\phi R_{nt} = 820 = \frac{M_{ut}}{bd^2}$$

$$M_{ut} = 820 \times 36 \times 17^2 / 1000 = 8531 \text{ in.-kips} = 711 \text{ ft-kips}$$

$$M_u < M_{ut}$$

La sección será controlada por tracción sin armadura de compresión.

Verificar la altura de la viga en base a los criterios para limitación de las flechas de la Tabla 9.5(a):

$$h_{\min} = \frac{\ell}{18,5} = \frac{30 \times 12}{18,5} = 19,5 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA}$$

Usar una viga de  $36 \times 19,5$  in.

2. Calcular la armadura requerida:

a. Tramo exterior, momento exterior negativo

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{385,9 \times 12}{0,9 \times 4 \times 36 \times 17^2} = 0,1236$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,134$

$$A_s = \frac{\omega b d f'_c}{f_y} = \frac{0,134 \times 36 \times 17 \times 4}{60} = 5,47 \text{ in.}^2$$

Para  $f'_c < 4444$  psi, usar

$$A_{s,\min} = \frac{200 b_w d}{f_y} = \frac{200 \times 36 \times 17}{60.000} = 2,04 \text{ in.}^2 \quad \text{Ec. (10-3)}$$

Usar 7 barras No. 8 ( $A_s = 5,53 \text{ in.}^2$ )

Verificar los requisitos sobre distribución de la armadura de flexión de 10.6.

Máxima separación permitida,

$$s = \frac{540}{f_s} - 2,5 c_c \quad \text{Ec. (10-4)}$$

$$c_c = 1,5 + 0,5 = 2,0 \text{ in.}$$

Usar  $f_s = 0,6 f_y = 36$  ksi

$$s = \frac{540}{36} - (2,5 \times 2,0) = 10 \text{ in.}$$

$$\begin{aligned} \text{Separación provista} &= \frac{1}{6} \left\{ 36 - 2 \left( 1,5 + 0,5 + \frac{1,0}{2} \right) \right\} \\ &= 5,17 \text{ in.} < 10 \text{ in.} \quad \text{VERIFICA} \end{aligned}$$

b. Tramo exterior, momento positivo

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{441,1 \times 12}{0,9 \times 4 \times 36 \times 17^2} = 0,1413$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,156$

$$A_s = \frac{\omega b d f'_c}{f_y} = \frac{0,156 \times 36 \times 17 \times 4}{60} = 6,37 \text{ in.}^2$$

Usar 11 barras No. 7 ( $A_s = 6,60 \text{ in.}^2$ )

Observar que esta armadura satisface los requisitos de fisuración de 10.6.4 y cabe adecuadamente dentro del ancho de la viga. También se la puede usar de forma conservadora en la sección correspondiente a la mitad del tramo interior.

c. Tramo exterior, momento interior negativo

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{615,8 \times 12}{0,9 \times 4 \times 36 \times 17^2} = 0,1973$$

De la Tabla 7-1,  $\omega \approx 0,228$

$$A_s = \frac{\omega b d f'_c}{f_y} = \frac{0,228 \times 36 \times 17 \times 4}{60} = 9,30 \text{ in.}^2$$

Usar 10 barras No. 9 ( $A_s = 10,0 \text{ in.}^2$ )

Esta armadura también satisface los requisitos de fisuración y separación.

---

## Ejemplo 7.8 – Diseño de una columna cuadrada con carga biaxial

---

Determinar las dimensiones y la armadura requerida para una columna con estribos cerrados para las siguientes cargas y momentos mayorados. Suponer que la armadura está igualmente distribuida en todas las caras.

$$P_u = 1200 \text{ kips}; \quad M_{ux} = 300 \text{ ft-kips}; \quad M_{uy} = 125 \text{ ft-kips}$$

$$f_c = 5000 \text{ psi}; \quad f_y = 60.00 \text{ psi}$$

---

Cálculos y discusión	Referencia del Código
----------------------	-----------------------

---

1. Determinar las resistencias nominales requeridas, asumiendo comportamiento controlado por compresión. 9.3.2.2(b)

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{1200}{0,65} = 1846 \text{ kips}$$

$$M_{nx} = \frac{M_{ux}}{\phi} = \frac{300}{0,65} = 461,5 \text{ ft-kips}$$

$$M_{ny} = \frac{M_{uy}}{\phi} = \frac{125}{0,65} = 192,3 \text{ ft-kips}$$

2. Asumir  $\beta = 0,65$
3. Determinar una resistencia al momento uniaxial equivalente  $M_{nox}$  o  $M_{noy}$ .

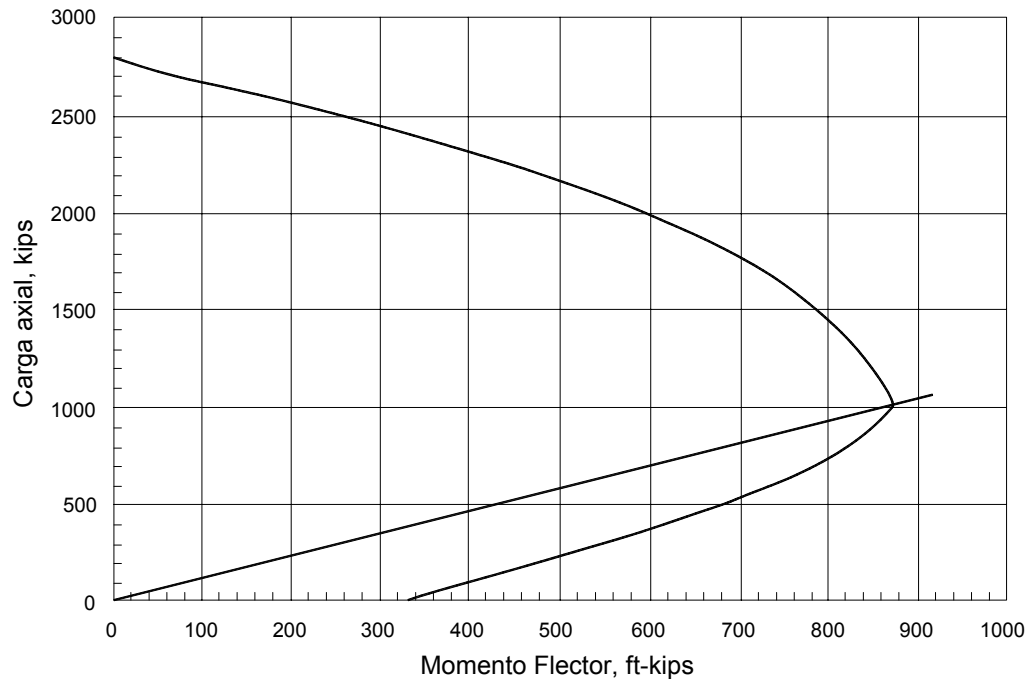
$$\frac{M_{ny}}{M_{nx}} = \frac{192,3}{465,1} = 0,42 \text{ es menor que } \frac{b}{h} = 1,0 \text{ (columna cuadrada)}$$

Por lo tanto, usando la Ecuación (19)

$$M_{nox} \approx M_{nx} + M_{ny} \frac{h}{b} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right)$$
$$= 461,5 + \left[ 192,3 \times (1,0) \left( \frac{1-0,65}{0,65} \right) \right] = 565,1 \text{ ft-kips}$$

4. Suponiendo una columna cuadrada de  $24 \times 24$  in., determinar la armadura requerida para proveer una resistencia a la carga axial  $P_n = 1846$  kips y una resistencia al momento uniaxial equivalente  $M_{nox} = 565,1$  ft-kips.

La siguiente figura es un diagrama de interacción para esta columna con 4 barras No. 11. La sección con esta armadura es adecuada para  $(P_n, M_{nox})$ .



5. Ahora verificamos la sección elegida para la resistencia biaxial usando cada uno de los tres métodos presentados en la discusión.

a. Método de las Cargas Recíprocas de Bresler

Verificar  $P_n \geq 0,1 f'_c A_g$

(8)

1714 kips  $>$  0,1 (5) (576) = 288 kips                      VERIFICA

Para usar este método es necesario determinar  $P_o$ ,  $P_{ox}$  y  $P_{oy}$ .

$$P_o = 0,85f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st}f_y$$

$$= 0,85(5)(576 - 6,24) + 6,24(60) = 2796 \text{ kips}$$

$P_{ox}$  es la resistencia a la carga uniaxial cuando sobre la columna sólo actúa  $M_{nx}$ .

Del diagrama de interacción,  $P_{ox} = 2225$  kips cuando  $M_{nx} = 461,5$  ft-kips.

De manera similar,  $P_{oy} = 2575$  kips cuando  $M_{ny} = 192,3$  ft-kips. Observar que tanto  $P_{ox}$  como  $P_{oy}$  son mayores que la fuerza axial balanceada, de modo que la sección es controlada por compresión.

Usando estos valores se puede evaluar la Ecuación (7):

$$P_n = 1846 \text{ kips} \leq \frac{1}{\frac{1}{P_{ox}} + \frac{1}{P_{oy}} - \frac{1}{P_o}}$$

$$< \frac{1}{\frac{1}{2225} + \frac{1}{2575} - \frac{1}{2796}} = 2083 \text{ kips} \quad \text{VERIFICA}$$

b. Método del Contorno de las Cargas de Bresler

Como no hay datos disponibles, se elige un valor conservador  $\alpha = 1,0$ . Aunque  $P_u > 0,1 f'_c A_g$ , se incluirán los cálculos necesarios a título ilustrativo. Dado que la sección es simétrica,  $M_{nox}$  es igual a  $M_{noy}$ .

Del diagrama de interacción,  $M_{nox} = 680$  ft-kips para  $P_n = 1846$  kips.

Usando el valor anterior se puede evaluar la Ecuación (11):

$$\frac{M_{nx}}{M_{nox}} + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} = \frac{461,5}{680} + \frac{192,3}{680} = 0,68 + 0,28 = 0,96 < 1,0 \quad \text{VERIFICA}$$

c. Método del Contorno de las Cargas de la PCA

Antes de aplicar este método es necesario hallar  $P_o$ ,  $M_{nox}$ ,  $M_{noy}$  y el valor real de  $\beta$ .

$$\begin{aligned} P_o &= 0,85f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st}f_y \\ &= 0,85(5)(576 - 6,24) + 6,24(60) = 2796 \text{ kips} \end{aligned}$$

Dado que la sección es simétrica,  $M_{nox}$  es igual a  $M_{noy}$ .

Del diagrama de interacción,  $M_{nox} = 680$  ft-kips para  $P_n = 1846$  kips.

Una vez que se conoce  $P_o$  y usando  $\rho_g$  (real), el valor real de  $\beta$  se determina de la siguiente manera:

$$\frac{P_n}{P_o} = \frac{1846}{2796} = 0,66 \quad \omega = \frac{\rho_g f_y}{f'_c} = \frac{(6,24/24^2)}{5} = 0,13$$

De la Figura 7-15(a),  $\beta = 0,66$

Usando los valores hallados se puede evaluar la Ecuación (13):

$$\left( \frac{M_{nx}}{M_{nox}} \right)^{\left( \frac{\log 0,5}{\log \beta} \right)} + \left( \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \right)^{\left( \frac{\log 0,5}{\log \beta} \right)} \leq 1,0$$

$$\log 0,5 = -0,3$$

$$\log \beta = \log 0,66 = -0,181$$

$$\frac{\log 0,5}{\log \beta} = 1,66$$

$$\left( \frac{461,5}{680} \right)^{1,66} + \left( \frac{192,3}{680} \right)^{1,66} = 0,53 + 0,12 = 0,65 < 1,0 \quad \text{VERIFICA}$$

Esta sección también se puede verificar usando la aproximación bilineal.

Como  $\frac{M_{ny}}{M_{nx}} < \frac{M_{noy}}{M_{nox}}$  se debería usar la Ecuación (17).

$$\begin{aligned}\frac{M_{nx}}{M_{nox}} + \frac{M_{ny}}{M_{noy}} \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) &= \frac{461,5}{680} + \frac{192,3}{680} \left( \frac{1-0,66}{0,66} \right) \\ &= 0,68 + 0,15 = 0,83 < 1,0 \quad \text{VERIFICA}\end{aligned}$$