



17 a 21 de Mayo de 2004
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo.
Mendoza. Argentina.

Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural

PANDEO LATERAL TORSIONAL DE VIGAS DE SECCIÓN DOBLE TE CARGADAS CON UNA FUERZA CONCENTRADA EN EL CENTRO Y ARRIOSTRADAS EN DOS SECCIONES SIMÉTRICAMENTE DISPUESTAS

HORACIO REZK, Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

Se estudia el problema de pandeo lateral torsional de las vigas elásticas de sección doble Te simplemente apoyadas, cargadas con una fuerza concentrada aplicada en su sección central. La fuerza se supone aplicada en el centro del ala inferior, en el baricentro de la sección, en el centro del ala superior y en puntos por encima del ala superior a una altura variable. Las vigas están arriostradas en dos secciones dispuestas simétricamente respecto del plano de la sección central de la viga. La distancia entre las secciones arriostradas y el centro toma valores variables.

Se resuelve el problema mediante las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría de segundo orden de las barras elásticas de paredes delgadas. Se encuentra una solución analítica basada en series de potencias.

Para que los resultados tengan un valor más general, se obtienen las cargas críticas en forma adimensional y en función de variables adimensionales que representan las propiedades de la viga, la posición de la carga y de los arriostramientos. Los resultados se presentan mediante tablas y gráficos.

Con fines comparativos, se encara la resolución del problema mediante las fórmulas aproximadas indicadas en la norma LRFD del American Institute of Steel Construction. Se analiza la limitación de las expresiones de esa norma, que no permite tener en cuenta la altura del punto de aplicación de la carga y, donde es posible su aplicación, se determinan los errores resultantes.

De los resultados obtenidos, se deduce también la posición óptima de los arriostramientos.

Introducción

El pandeo lateral torsional en régimen elástico es una posible forma de falla de las vigas de acero. Por consiguiente, las normas referentes a estas construcciones contienen prescripciones para facilitar la verificación de la seguridad de las vigas frente a este tipo de falla. El cálculo de los momentos críticos en régimen elástico se realiza mediante fórmulas aproximadas que se refieren a distintos casos particulares.

Por otra parte, es bien conocido que un adecuado arriostramiento de las vigas es una medida constructiva muy eficaz para alejar el peligro de este tipo de falla. Por tal motivo resulta de interés estudiar casos en los que las vigas están sujetas a algún tipo de arriostramiento y su colocación en la posición que resulte más eficaz.

El objetivo de este trabajo es ampliar el conocimiento de los casos de pandeo lateral torsional de vigas arriostradas. Los resultados obtenidos en forma analítica mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría general de segundo orden, además de su utilización práctica directa, permiten analizar los errores de las fórmulas contenidas en la norma LRFD de American Institute of Steel Construction ref. [1], así como las limitaciones de su aplicación. También permiten conocer la posición óptima de los arriostramientos.

El Problema Considerado

Se supone una viga elástica prismática de sección doble T simplemente apoyada, según se muestra en las figuras 1 y 2, y arriostrada en dos secciones simétricamente dispuestas a una distancia c de la sección central, de modo que no puedan girar en su propio plano ni desplazarse horizontalmente.

Para estudiar el problema usamos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales X, Y, Z de modo que en la configuración inicial de la barra, el eje Z coincide con el eje baricéntrico de la barra y los ejes X e Y son en cada sección ejes principales de inercia. También usamos un sistema de coordenadas acompañantes x, y, z , que en la configuración inicial de la barra coinciden con las cartesianas y que permanecen constantes para cada punto durante la deformación de la misma.

Suponemos que la barra está cargada con una fuerza

$$\bar{P} = P\bar{e}_Y \quad (1)$$

que tiene la dirección del eje Y del sistema de coordenadas cartesianas y está aplicada en la sección central de la viga. El punto de aplicación de la fuerza es el punto A , cuyas coordenadas acompañantes son $0, y_A, 0$ (ver figura 2).

En los tramos $0 < z < c$ y $c < z < L$, no hay fuerzas exteriores distribuidas.

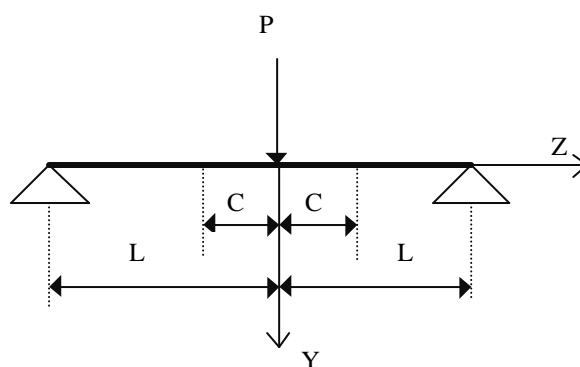


Figura 1 -Estado de carga de la viga simplemente apoyada.

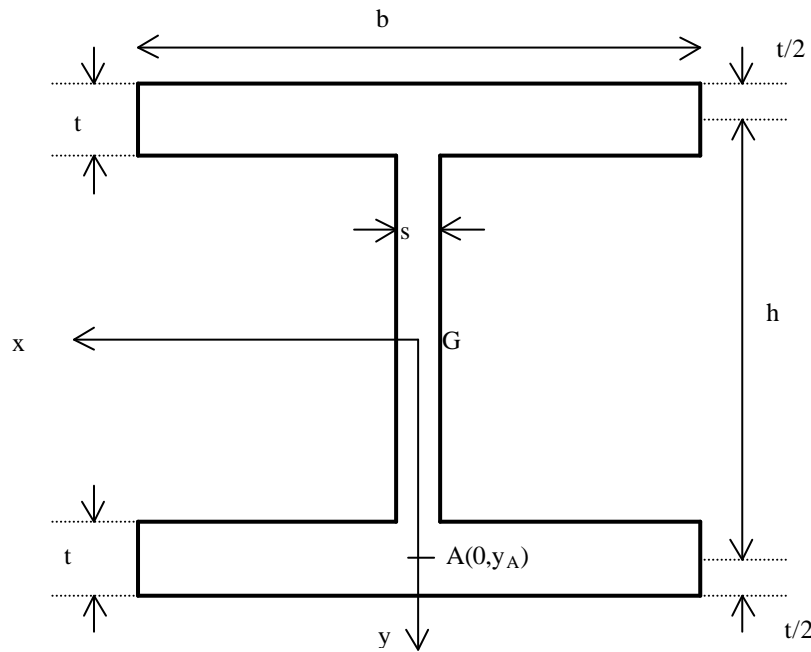


Figura 2 - Sección transversal de la viga.

Las Ecuaciones de Equilibrio Interno y los Esfuerzos de la Barra

La estructura y las cargas son simétricas respecto del plano $Z = 0$ en la configuración inicial. Como el modo de pandeo lateral torsional es simétrico respecto de dicho plano, consideramos sólo la mitad de la longitud de la viga cuyas coordenadas z son positivas.

Dado que en la sección $z = c$ existe un arriostramiento, a los efectos de resolver el problema, consideramos separadamente el intervalo $0 < z < c$, que llamamos tramo 1 y el intervalo $c < z < L$, que llamamos tramo 2.

Teniendo en cuenta que las fuerzas exteriores distribuidas son nulas, las ecuaciones diferenciales de equilibrio interno para el tramo 1, de acuerdo con ref. [2], son

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_{x_1}}{dz} &= 0 & -Q_{y_1} + \left(\frac{dv_1}{dz} - x_c \frac{d\Theta_1}{dz} \right) N_{z_1} + \frac{dM_{x_1}}{dz} &= 0 \\
 \frac{dQ_{y_1}}{dz} &= 0 & Q_{x_1} - \left(\frac{du_1}{dz} + y_c \frac{d\Theta_1}{dz} \right) N_{z_1} + \frac{dM_{y_1}}{dz} &= 0 \\
 \frac{dN_{z_1}}{dz} &= 0 & -\frac{dv_1}{dz} Q_{x_1} + \frac{du_1}{dz} Q_{y_1} + \frac{dM_{z_1}}{dz} &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

En estas ecuaciones Q_{x_1} , Q_{y_1} , N_{z_1} , M_{x_1} , M_{y_1} y M_{z_1} son los esfuerzos de la barra en la configuración deformada referidos a las coordenadas cartesianas fijas X , Y , Z ; u_1 y v_1 son las componentes de los desplazamientos de los centros de corte de las secciones en las direcciones de los ejes X e Y , respectivamente; Θ_1 es la rotación de las secciones en su propio plano; x_c e y_c son las coordenadas del centro de corte.

Si integramos las ecuaciones (2) y tenemos en cuenta que las coordenadas del centro de corte son nulas, se obtiene

$$Q_{x_1} = Q_{x_1}^* \quad M_{x_1} = Q_{y_1}^* z - N_{z_1}^* v_1 + M_{x_1}^*$$

$$\begin{aligned} Q_{Y_1} &= Q_{Y_1}^* & M_{Y_1} &= -Q_{X_1}^* z - N_{Z_1}^* u_1 + M_{Y_1}^* \\ N_{Z_1} &= N_{Z_1}^* & M_{Z_1} &= Q_{X_1}^* v_1 - Q_{Y_1}^* u_1 + M_{Z_1}^* \end{aligned} \quad (3)$$

En forma análoga, se obtiene para el tramo 2

$$\begin{aligned} Q_{X_2} &= Q_{X_2}^* & M_{X_2} &= Q_{Y_2}^* z - N_{Z_2}^* v_2 + M_{X_2}^* \\ Q_{Y_2} &= Q_{Y_2}^* & M_{Y_2} &= -Q_{X_2}^* z + N_{Z_2}^* u_2 + M_{Y_2}^* \\ N_{Z_2} &= N_{Z_2}^* & M_{Z_2} &= Q_{X_2}^* v_2 - Q_{Y_2}^* u_2 + M_{Z_2}^* \end{aligned} \quad (4)$$

En las ecuaciones (3) y (4), las cantidades señaladas con un asterisco (*), forman un conjunto de doce constantes de integración.

Para determinar estas constantes se han planteado:

- Las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada de un segmento de barra comprendido entre dos secciones infinitamente próximas de coordenadas, $z = -d$ y $z = +d$ con $d \rightarrow 0$.
- Las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada de un segmento de barra comprendido entre dos secciones infinitamente próximas de coordenadas, $z = c - d$ y $z = c + d$ con $d \rightarrow 0$.
- Las condiciones de simetría y continuidad.
- Las condiciones correspondientes al extremo articulado.
- La ausencia de esfuerzos iniciales en la barra.

Se obtienen los esfuerzos para el tramo 1

$$\begin{aligned} Q_{X_1} &= 0 & M_{X_1} &= -\frac{P}{2} z + \frac{P}{2} L \\ Q_{Y_1} &= -\frac{P}{2} & M_{Y_1} &= 0 \\ N_{Z_1} &= 0 & M_{Z_1} &= \frac{P}{2} u_1 + \frac{P}{2} (y_A \Theta_{1_0} - u_{1_0}) \end{aligned} \quad (5)$$

y para el tramo 2

$$\begin{aligned} Q_{X_2} &= 0 & M_{X_2} &= -\frac{P}{2} z + \frac{P}{2} L \\ Q_{Y_2} &= -\frac{P}{2} & M_{Y_2} &= 0 \\ N_{Z_2} &= 0 & M_{Z_2} &= \frac{P}{2} u_2 \end{aligned} \quad (6)$$

También se obtienen las acciones que ejerce el arriostramiento sobre la viga

$$F_X^* = 0 \quad M_Z^* = \frac{P}{2} (y_A \Theta_{1_0} - u_{1_0}) \quad (7)$$

siendo F_X^* la fuerza en dirección X y M_Z^* el par que actúa en el plano de la sección arriostrada.

En las ecuaciones (5), (6) y (7) se usa la notación

$$\Theta_{1_0} = (\Theta_1)_{z=0} \quad u_{1_0} = (u_1)_{z=0} \quad (8)$$

Las Relaciones entre Esfuerzos y Deformaciones

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones, según se indican en ref. [2], son

$$\begin{aligned}
EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + (y_c Q_x - M_z) \frac{du}{dz} + y_c Q_y \frac{dv}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) y_c \frac{d\Theta}{dz} + M_y \Theta + M_x &= 0 \\
EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + (x_c Q_y + M_z) \frac{dv}{dz} + x_c Q_x \frac{du}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) x_c \frac{d\Theta}{dz} + M_x \Theta - M_y &= 0 \\
EI_w \frac{d^3 \Theta}{dz^3} + (-y_c N_z + M_x) \frac{du}{dz} + (x_c N_z + M_y) \frac{dv}{dz} - (GI_T + i_c^2 N_z + r_x M_x - r_y M_y) \frac{d\Theta}{dz} + M_z &= 0
\end{aligned} \quad (9)$$

En estas ecuaciones, I_x , I_y son los momentos principales de inercia baricéntricos de la sección; I_w es su momento de inercia sectorial; I_T es la constante de torsión libre; i_c es su radio de giro polar respecto del centro de corte; y r_x , r_y son dos constantes geométricas de la sección definidas por las expresiones

$$r_x = \frac{\iint_A y(x^2 + y^2) dx dy}{I_x} - 2y_c \quad r_y = \frac{\iint_A x(x^2 + y^2) dx dy}{I_y} - 2x_c$$

Si en las ecuaciones (9) introducimos los esfuerzos expresados por las ecuaciones (5) y se tienen en cuenta las condiciones de simetría del perfil doble Te ($r_x = r_y = x_c = y_c = 0$), se tiene para el tramo 1,

$$\begin{aligned}
EI_x \frac{d^2 v_1}{dz^2} - \frac{P}{2} z + \frac{P}{2} L &= 0 \\
EI_y \frac{d^2 u_1}{dz^2} + \frac{P}{2} (L - z) \Theta_1 &= 0 \\
EI_w \frac{d^3 \Theta_1}{dz^3} + \frac{P}{2} (L - z) \frac{du_1}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_1}{dz} + \frac{P}{2} u_1 + \frac{P}{2} (\Theta_{1_0} y_A - u_{1_0}) &= 0
\end{aligned} \quad (10)$$

Después de derivar la última ecuación (10) una vez respecto de z , resulta

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_1}{dz^4} + \frac{P}{2} (L - z) \frac{d^2 u_1}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} = 0 \quad (11)$$

Si procedemos en forma análoga para el tramo 2, obtenemos

$$\begin{aligned}
EI_x \frac{d^2 v_2}{dz^2} + \frac{P}{2} (L - z) &= 0 \\
EI_y \frac{d^2 u_2}{dz^2} + \frac{P}{2} (L - z) \Theta_2 &= 0 \\
EI_w \frac{d^3 \Theta_2}{dz^3} + \frac{P}{2} (L - z) \frac{du_2}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_2}{dz} + \frac{P}{2} u_2 &= 0
\end{aligned} \quad (12)$$

Después de derivar la última ecuación (12) una vez respecto de z , se tiene

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_2}{dz^4} + \frac{P}{2} (L - z) \frac{d^2 u_2}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_2}{dz^2} = 0 \quad (13)$$

La primera ecuación (10) y la primera ecuación (12) permiten obtener la deflexión de la viga en su plano de simetría Y, Z . Para analizar el problema de pandeo lateral debemos considerar el sistema de ecuaciones homogéneas formado por la segunda ecuación (10), (11), la segunda ecuación (12) y (13).

De la segunda ecuación (10), obtenemos

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = -\frac{P(L - z)}{2EI_y} \Theta_1$$

que, reemplazada en la ecuación (11), nos da

$$\frac{d^4\Theta_1}{dz^4} - \frac{GI_T}{EI_w} \frac{d^2\Theta_1}{dz^2} - \frac{P^2(L-z)^2}{4EI_wEI_y} \Theta_1 = 0 \quad (14)$$

Si definimos los adimensionales

$$\mathbf{x} = \frac{z}{L} \quad \mathbf{k} = \frac{c}{L} \quad \mathbf{a} = \frac{GI_T L^2}{EI_w} \quad \mathbf{b} = \sqrt{\frac{EI_y}{GI_T}} \quad \mathbf{g} = \frac{PL^2}{2\sqrt{EI_y GI_T}} \quad (15)$$

la ecuación (14) puede escribirse en la forma

$$\frac{d^4\Theta_1}{d\mathbf{x}^4} - \mathbf{a} \frac{d^2\Theta_1}{d\mathbf{x}^2} - \mathbf{g}^2 \mathbf{a} \mathbf{x}^2 \Theta_1 = 0 \quad (16)$$

Si procedemos en forma análoga con la segunda ecuación (12) y la ecuación (13), se obtiene

$$\frac{d^4\Theta_2}{dz^4} - \frac{GI_T}{EI_w} \frac{d^2\Theta_2}{dz^2} - \frac{P^2(L-z)^2}{4EI_wEI_y} \Theta_2 = 0 \quad (17)$$

y si introducimos los adimensionales definidos por las ecuaciones (15), resulta

$$\frac{d^4\Theta_2}{d\mathbf{x}^4} - \mathbf{a} \frac{d^2\Theta_2}{d\mathbf{x}^2} - \mathbf{g}^2 \mathbf{a} \mathbf{x}^2 \Theta_2 = 0 \quad (18)$$

Las ecuaciones diferenciales (16) y (18) deben satisfacer las siguientes condiciones de borde y continuidad

$$\left(\frac{d\Theta_1}{d\mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=1} = 0 \quad (\Theta_1)_{\mathbf{x}=1-\mathbf{k}} = 0 \quad \left(\frac{d\Theta_1}{d\mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=1-\mathbf{k}} = \left(\frac{d\Theta_2}{d\mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=1-\mathbf{k}} \quad (19)$$

$$\left(\frac{d^2\Theta_1}{d\mathbf{x}^2} \right)_{\mathbf{x}=1-\mathbf{k}} = \left(\frac{d^2\Theta_2}{d\mathbf{x}^2} \right)_{\mathbf{x}=1-\mathbf{k}} \quad (\Theta_2)_{\mathbf{x}=1-\mathbf{k}} = 0 \quad (\Theta_2)_{\mathbf{x}=0} = 0 \quad \left(\frac{d^2\Theta_2}{d\mathbf{x}^2} \right)_{\mathbf{x}=0} = 0$$

Asimismo, deben cumplir una condición adicional que se obtiene de la tercera ecuación (10), poniendo en ella $z = 0$ y teniendo en cuenta

$$\left(\frac{du_1}{dz} \right)_{z=0} = 0 \quad \left(\frac{d\Theta_1}{dz} \right)_{z=0} = 0$$

resulta

$$EI_w \left(\frac{d^3\Theta_1}{dz^3} \right)_{z=0} + \frac{P}{2} y_A (\Theta_1)_{z=0} = 0 \quad (20)$$

Esta ecuación puede ponerse en términos de los adimensionales definidos por las ecuaciones (15). Si además tenemos en cuenta que en el caso de perfiles doble Te, como el indicado en la figura 2, es

$$I_y = \frac{tb^3}{6} \quad I_T = \frac{2bt^3 + hs^3}{3} \quad I_w = \frac{b^3 h^2 t}{24} \quad (21)$$

y si introducimos estas expresiones en la tercera y cuarta ecuación (15), se obtiene

$$\mathbf{a} = \frac{16t^2 L^2}{b^2 h^2} \frac{G}{E} \left(1 + \frac{hs^3}{2bt^3} \right) \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{b}{t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{hs^3}{2bt^3}}} \quad (22)$$

con lo que resulta entonces

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \frac{y_A}{L} = \sqrt{\mathbf{a} \mathbf{e}} \quad (23)$$

En la ecuación (23), \mathbf{e} es un adimensional definido por la expresión

$$\mathbf{e} = \frac{2y_A}{h} \quad (24)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (15), y (23), la ecuación (20) queda en la forma

$$-\left(\frac{d^3\Theta_1}{d\mathbf{x}^3}\right)_{\mathbf{x}=1} + g\sqrt{a}e(\Theta_1)_{\mathbf{x}=1} = 0 \quad (25)$$

La ecuación (25) y las siete ecuaciones (19) son las condiciones que deben satisfacer las ecuaciones diferenciales (16) y (18).

La Solución de las Ecuaciones Diferenciales del Problema

La solución general de las ecuaciones diferenciales (16) y (18) puede encontrarse proponiendo una serie de potencias de la forma

$$\Theta_i = \mathbf{x}^m (a_{0,m} + a_{1,m}\mathbf{x} + a_{2,m}\mathbf{x}^2 + a_{3,m}\mathbf{x}^3 + \dots) \quad (26)$$

donde $i = 1, 2$ y m es una constante.

Si introducimos la ecuación (26) en la ecuación diferencial (16) o (18), se obtiene una serie de potencias de \mathbf{x} donde la menor potencia es \mathbf{x}^{m-4} . Si anulamos el coeficiente de esa potencia en la serie, se obtiene

$$a_{0,m}m(m-1)(m-2)(m-3) = 0 \quad (27)$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$m = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad (28)$$

y adoptamos arbitrariamente $a_{0,m} = 1$.

Si anulamos todos los demás coeficientes de la serie de potencias resultante, se obtienen los coeficientes $a_{j,m}$ de cuatro series de potencias de la forma (26) que son solución de la ecuación diferencial y que se corresponden con los valores de m consignados en la ecuación (28).

Entonces, las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales (16) y (18), pueden expresarse como la suma de cuatro series multiplicadas por sendas constantes arbitrarias, o sea

$$\Theta_1 = \sum_{m=0}^3 A_m f_m \quad \Theta_2 = \sum_{m=0}^3 B_m f_m \quad (29)$$

donde $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2$ y B_3 son ocho constantes y las series son

$$f_m = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} \mathbf{x}^{m+j} \quad (30)$$

$$m = 0, 1, 2, 3$$

Los coeficientes de las series en la expresión (30) son

$$a_{0,m} = 1 \quad a_{2,m} = \frac{a}{(m+2)(m+1)} a_{0,m} \quad a_{4,m} = \frac{a}{(m+4)(m+3)} a_{2,m} \quad (31)$$

$$a_{j,m} = \frac{a}{(m+j)(m+j-1)} a_{j-2,m} + \frac{g^2 a}{(m+j)(m+j-1)(m+j-2)(m+j-3)} a_{j-6,m},$$

para $j = 6, 8, 10, \dots, \infty$.

En las expresiones (31), m toma los valores (28).

Las derivadas primera, segunda y tercera de las series (30) son

$$\begin{aligned}
f_m' &= \frac{df_m}{dx} = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (m+j) x^{m+j-1} \\
f_m'' &= \frac{d^2 f_m}{dx^2} = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(m+j-1) x^{m+j-2} \\
f_m''' &= \frac{d^3 f_m}{dx^3} = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(m+j-1)(m+j-2) x^{m+j-3}
\end{aligned} \tag{32}$$

Si introducimos la segunda ecuación (29) en las dos últimas ecuaciones (19), se obtiene

$$B_0 = 0 \quad B_2 = 0 \tag{33}$$

con lo que la segunda ecuación (29) se reduce a

$$\Theta_2 = B_1 f_1 + B_3 f_3 \tag{34}$$

Si se plantean las restantes condiciones (19) y la ecuación (25), mediante las expresiones (30) y (32), se obtiene un sistema de seis ecuaciones lineales algebraicas homogéneas en A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , B_1 y B_3 . La condición para que este sistema tenga soluciones distintas de la trivial es que se anule el determinante de la matriz de los coeficientes, de donde resulta la ecuación (35)

$$\begin{vmatrix}
(f_0')_{x=1} & (f_1')_{x=1} & (f_2')_{x=1} & (f_3')_{x=1} & 0 & 0 \\
-(f_0''') + g\sqrt{ae}(f_0)_{x=1} & -(f_1''') + g\sqrt{ae}(f_1)_{x=1} & -(f_2''') + g\sqrt{ae}(f_2)_{x=1} & -(f_3''') + g\sqrt{ae}(f_3)_{x=1} & 0 & 0 \\
(f_0)_{x=1-k} & (f_1)_{x=1-k} & (f_2)_{x=1-k} & (f_3)_{x=1-k} & 0 & 0 \\
(f_0')_{x=1-k} & (f_1')_{x=1-k} & (f_2')_{x=1-k} & (f_3')_{x=1-k} & -(f_1')_{x=1-k} & -(f_3')_{x=1-k} \\
(f_0'')_{x=1-k} & (f_1'')_{x=1-k} & (f_2'')_{x=1-k} & (f_3'')_{x=1-k} & -(f_1'')_{x=1-k} & -(f_3'')_{x=1-k} \\
0 & 0 & 0 & 0 & (f_1)_{x=1-k} & (f_3)_{x=1-k}
\end{vmatrix} = 0 \tag{35}$$

Los elementos del determinante de la ecuación (35) se calculan con las expresiones (30) y (32).

La ecuación (35) es una función de la forma

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{g}) = 0 \tag{36}$$

donde el adimensional \mathbf{a} depende de las propiedades geométricas y mecánicas de la viga, \mathbf{k} define la posición de los arriostramientos en la longitud de la viga, \mathbf{e} caracteriza a la ubicación del punto de aplicación de las cargas en el plano de la sección y \mathbf{g} es un adimensional que representa a la magnitud de las cargas con relación a las propiedades de la viga.

Fijados, \mathbf{a} , \mathbf{k} y \mathbf{e} , se obtiene \mathbf{g}_K como la menor raíz real positiva de la función (36), lo que permite calcular la carga crítica en régimen elástico mediante la expresión

$$P_K = \mathbf{g}_K \frac{2\sqrt{EI_y G I_T}}{L^2} \tag{37}$$

Los Resultados Obtenidos

Se realizaron los cálculos de \mathbf{g}_K tomando para \mathbf{a} valores en el intervalo $0,1 \leq \mathbf{a} \leq 100$, que coinciden con los considerados por Timoshenko en el problema de pandeo lateral de una viga de sección doble T bajo la acción de una fuerza concentrada en el centro, según puede verse en la tabla 6-5 de ref. [3].

Los valores de \mathbf{k} se tomaron entre 0,1 y 0,9, variando en intervalos de 0,1.

Los valores considerados para e son 1,0 (cargas aplicadas en el centro del ala inferior), 0,0 (cargas aplicadas en el baricentro), -1,0 (cargas aplicadas en el centro del ala superior) y valores -1,2, -1,4 y -1,6, que corresponden a posiciones de las cargas por encima del ala superior.

Para realizar los cálculos se desarrolló un programa de computación en lenguaje Fortran en el que se usó doble precisión. Las series fueron evaluadas mediante la suma de sus cien primeros términos ($j=0, 2, \dots, 200$), después de comprobar que los resultados no experimentaban cambio con cantidades de términos menores que la adoptada.

Los resultados obtenidos se consignan en las tablas 1 a 6

Tabla 1. Valores de g_k para $e = 1,0$

| a | k=0,1 | k=0,2 | k=0,3 | k=0,4 | k=0,5 | k=0,6 | k=0,7 | k=0,8 | k=0,9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 115,0 | 139,5 | 128,8 | 90,80 | 67,23 | 53,13 | 44,11 | 37,97 | 33,59 |
| 1 | 37,09 | 44,98 | 41,37 | 29,16 | 21,64 | 17,14 | 14,26 | 12,31 | 10,92 |
| 2 | 26,79 | 32,46 | 29,74 | 20,97 | 15,59 | 12,38 | 10,33 | 8,936 | 7,947 |
| 4 | 19,70 | 23,86 | 21,70 | 15,30 | 11,42 | 9,106 | 7,629 | 6,629 | 5,922 |
| 6 | 16,68 | 20,19 | 18,23 | 12,86 | 9,634 | 7,711 | 6,483 | 5,653 | 5,067 |
| 8 | 14,93 | 18,07 | 16,21 | 11,44 | 8,601 | 6,906 | 5,824 | 5,093 | 4,578 |
| 12 | 12,95 | 15,67 | 13,89 | 9,817 | 7,421 | 5,992 | 5,077 | 4,460 | 4,025 |
| 16 | 11,83 | 14,30 | 12,55 | 8,885 | 6,749 | 5,474 | 4,657 | 4,103 | 3,715 |
| 20 | 11,10 | 13,42 | 11,66 | 8,269 | 6,309 | 5,137 | 4,383 | 3,871 | 3,513 |
| 24 | 10,57 | 12,79 | 11,02 | 7,828 | 5,996 | 4,897 | 4,189 | 3,707 | 3,369 |
| 40 | 9,426 | 11,41 | 9,568 | 6,840 | 5,301 | 4,370 | 3,763 | 3,347 | 3,054 |
| 60 | 8,773 | 10,63 | 8,698 | 6,264 | 4,902 | 4,071 | 3,523 | 3,142 | 2,873 |
| 80 | 8,415 | 10,21 | 8,200 | 5,942 | 4,682 | 3,907 | 3,391 | 3,030 | 2,773 |
| 100 | 8,186 | 9,944 | 7,871 | 5,733 | 4,540 | 3,802 | 3,307 | 2,958 | 2,708 |

Tabla 2. Valores de g_k para $e = 0,0$

| a | k=0,1 | k=0,2 | k=0,3 | k=0,4 | k=0,5 | k=0,6 | k=0,7 | k=0,8 | k=0,9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 114,9 | 137,1 | 117,9 | 79,74 | 57,31 | 44,08 | 35,65 | 29,93 | 25,84 |
| 1 | 37,05 | 44,20 | 37,91 | 25,67 | 18,51 | 14,28 | 11,60 | 9,778 | 8,481 |
| 2 | 26,75 | 31,91 | 27,28 | 18,50 | 13,38 | 10,36 | 8,449 | 7,153 | 6,232 |
| 4 | 19,68 | 23,46 | 19,93 | 13,55 | 9,859 | 7,687 | 6,309 | 5,379 | 4,721 |
| 6 | 16,66 | 19,86 | 16,77 | 11,43 | 8,362 | 6,556 | 5,410 | 4,638 | 4,094 |
| 8 | 14,92 | 17,78 | 14,94 | 10,20 | 7,501 | 5,910 | 4,900 | 4,220 | 3,741 |
| 12 | 12,94 | 15,42 | 12,83 | 8,804 | 6,525 | 5,183 | 4,329 | 3,754 | 3,350 |
| 16 | 11,82 | 14,09 | 11,62 | 8,006 | 5,976 | 4,777 | 4,012 | 3,497 | 3,135 |
| 20 | 11,08 | 13,22 | 10,82 | 7,483 | 5,619 | 4,516 | 3,810 | 3,332 | 2,999 |
| 24 | 10,56 | 12,60 | 10,24 | 7,110 | 5,367 | 4,332 | 3,668 | 3,218 | 2,903 |
| 40 | 9,417 | 11,25 | 8,942 | 6,283 | 4,817 | 3,937 | 3,366 | 2,974 | 2,698 |
| 60 | 8,765 | 10,50 | 8,173 | 5,809 | 4,509 | 3,721 | 3,202 | 2,842 | 2,587 |
| 80 | 8,408 | 10,09 | 7,738 | 5,549 | 4,343 | 3,606 | 3,115 | 2,772 | 2,527 |
| 100 | 8,180 | 9,825 | 7,454 | 5,381 | 4,238 | 3,533 | 3,061 | 2,728 | 2,490 |

Tabla 3. Valores de g_k para $e = -1,0$

| a | k=0,1 | k=0,2 | k=0,3 | k=0,4 | k=0,5 | k=0,6 | k=0,7 | k=0,8 | k=0,9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 114,7 | 134,5 | 107,7 | 69,93 | 48,76 | 36,47 | 28,72 | 23,50 | 19,78 |
| 1 | 37,00 | 43,36 | 34,65 | 22,55 | 15,80 | 11,87 | 9,401 | 7,737 | 6,559 |
| 2 | 26,72 | 31,31 | 24,95 | 16,29 | 11,46 | 8,654 | 6,890 | 5,704 | 4,866 |
| 4 | 19,65 | 23,03 | 18,27 | 11,98 | 8,495 | 6,473 | 5,201 | 4,348 | 3,748 |
| 6 | 16,64 | 19,50 | 15,40 | 10,14 | 7,244 | 5,561 | 4,502 | 3,793 | 3,295 |
| 8 | 14,90 | 17,46 | 13,73 | 9,086 | 6,530 | 5,045 | 4,110 | 3,484 | 3,046 |
| 12 | 12,92 | 15,15 | 11,82 | 7,884 | 5,728 | 4,472 | 3,680 | 3,149 | 2,778 |
| 16 | 11,80 | 13,85 | 10,73 | 7,205 | 5,282 | 4,159 | 3,448 | 2,970 | 2,637 |
| 20 | 11,07 | 13,00 | 10,01 | 6,763 | 4,996 | 3,961 | 3,303 | 2,860 | 2,551 |
| 24 | 10,55 | 12,39 | 9,499 | 6,450 | 4,796 | 3,824 | 3,204 | 2,785 | 2,493 |
| 40 | 9,408 | 11,08 | 8,344 | 5,765 | 4,370 | 3,540 | 3,003 | 2,636 | 2,378 |
| 60 | 8,758 | 10,34 | 7,671 | 5,382 | 4,142 | 3,395 | 2,904 | 2,565 | 2,324 |
| 80 | 8,401 | 9,939 | 7,296 | 5,176 | 4,024 | 3,322 | 2,857 | 2,531 | 2,299 |
| 100 | 8,173 | 9,686 | 7,053 | 5,047 | 3,952 | 3,280 | 2,830 | 2,512 | 2,285 |

Tabla 4. Valores de g_k para $e = -1,2$

| a | k=0,1 | k=0,2 | k=0,3 | k=0,4 | k=0,5 | k=0,6 | k=0,7 | k=0,8 | k=0,9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 114,7 | 133,9 | 105,7 | 68,12 | 47,22 | 35,13 | 27,53 | 22,41 | 18,78 |
| 1 | 36,99 | 43,19 | 34,02 | 21,98 | 15,31 | 11,45 | 9,019 | 7,390 | 6,237 |
| 2 | 26,72 | 31,19 | 24,51 | 15,88 | 11,11 | 8,351 | 6,618 | 5,456 | 4,636 |
| 4 | 19,65 | 22,94 | 17,95 | 11,69 | 8,247 | 6,256 | 5,006 | 4,169 | 3,581 |
| 6 | 16,63 | 19,42 | 15,13 | 9,905 | 7,040 | 5,382 | 4,341 | 3,645 | 3,157 |
| 8 | 14,90 | 17,39 | 13,50 | 8,878 | 6,352 | 4,889 | 3,969 | 3,354 | 2,924 |
| 12 | 12,92 | 15,09 | 11,63 | 7,712 | 5,581 | 4,343 | 3,563 | 3,041 | 2,676 |
| 16 | 11,80 | 13,79 | 10,56 | 7,055 | 5,153 | 4,046 | 3,345 | 2,876 | 2,548 |
| 20 | 11,07 | 12,95 | 9,860 | 6,627 | 4,880 | 3,859 | 3,210 | 2,774 | 2,470 |
| 24 | 10,55 | 12,35 | 9,356 | 6,325 | 4,689 | 3,730 | 3,119 | 2,706 | 2,418 |
| 40 | 9,406 | 11,04 | 8,229 | 5,666 | 4,286 | 3,466 | 2,936 | 2,573 | 2,319 |
| 60 | 8,756 | 10,30 | 7,574 | 5,300 | 4,072 | 3,333 | 2,848 | 2,512 | 2,274 |
| 80 | 8,400 | 9,907 | 7,210 | 5,105 | 3,963 | 3,268 | 2,807 | 2,485 | 2,255 |
| 100 | 8,172 | 9,656 | 6,975 | 4,982 | 3,897 | 3,231 | 2,785 | 2,471 | 2,246 |

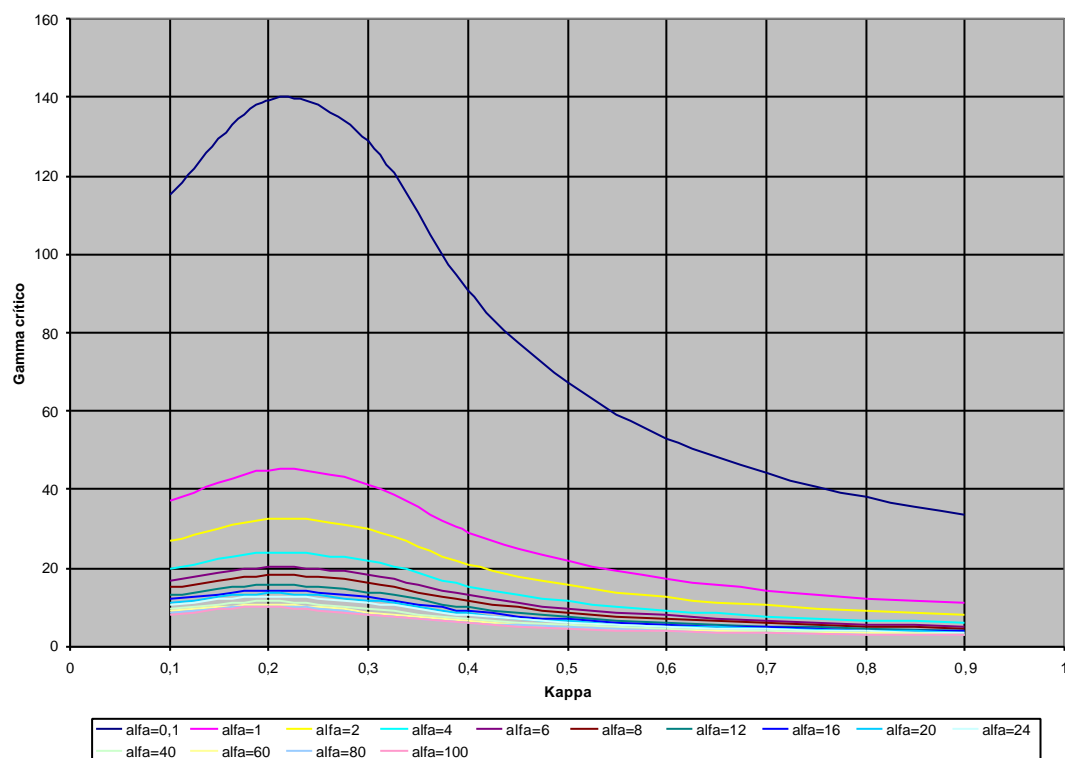
Tabla 5. Valores de g_k para $e = -1,4$

| a | k=0,1 | k=0,2 | k=0,3 | k=0,4 | k=0,5 | k=0,6 | k=0,7 | k=0,8 | k=0,9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 114,7 | 133,3 | 103,8 | 66,36 | 45,74 | 33,85 | 26,39 | 21,38 | 17,84 |
| 1 | 36,99 | 43,01 | 33,40 | 21,42 | 14,83 | 11,04 | 8,656 | 7,061 | 5,936 |
| 2 | 26,71 | 31,06 | 24,07 | 15,48 | 10,77 | 8,059 | 6,359 | 5,221 | 4,420 |
| 4 | 19,64 | 22,84 | 17,63 | 11,41 | 8,007 | 6,047 | 4,820 | 3,999 | 3,424 |
| 6 | 16,63 | 19,34 | 14,87 | 9,672 | 6,842 | 5,209 | 4,186 | 3,503 | 3,026 |
| 8 | 14,89 | 17,33 | 13,27 | 8,674 | 6,179 | 4,738 | 3,834 | 3,230 | 2,809 |
| 12 | 12,92 | 15,04 | 11,44 | 7,544 | 5,438 | 4,218 | 3,450 | 2,937 | 2,579 |
| 16 | 11,80 | 13,74 | 10,40 | 6,907 | 5,028 | 3,936 | 3,246 | 2,784 | 2,462 |
| 20 | 11,07 | 12,90 | 9,707 | 6,494 | 4,767 | 3,759 | 3,120 | 2,691 | 2,392 |
| 24 | 10,55 | 12,30 | 9,215 | 6,203 | 4,585 | 3,638 | 3,036 | 2,630 | 2,346 |
| 40 | 9,404 | 11,00 | 8,115 | 5,569 | 4,203 | 3,393 | 2,869 | 2,512 | 2,261 |
| 60 | 8,754 | 10,27 | 7,478 | 5,219 | 4,004 | 3,272 | 2,793 | 2,461 | 2,226 |
| 80 | 8,399 | 9,874 | 7,124 | 5,034 | 3,903 | 3,215 | 2,759 | 2,440 | 2,213 |
| 100 | 8,171 | 9,624 | 6,897 | 4,919 | 3,842 | 3,182 | 2,741 | 2,430 | 2,207 |

Tabla 6. Valores de g_K para $e = -1,6$

| a | k=0,1 | k=0,2 | k=0,3 | k=0,4 | k=0,5 | k=0,6 | k=0,7 | k=0,8 | k=0,9 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 114,6 | 132,8 | 101,9 | 64,65 | 44,31 | 32,62 | 25,31 | 20,42 | 16,97 |
| 1 | 36,98 | 42,83 | 32,80 | 20,88 | 14,38 | 10,65 | 8,312 | 6,751 | 5,653 |
| 2 | 26,70 | 30,93 | 23,64 | 15,10 | 10,45 | 7,780 | 6,112 | 4,998 | 4,216 |
| 4 | 19,64 | 22,75 | 17,32 | 11,13 | 7,775 | 5,847 | 4,642 | 3,838 | 3,276 |
| 6 | 16,63 | 19,26 | 14,61 | 9,445 | 6,651 | 5,043 | 4,039 | 3,369 | 2,901 |
| 8 | 14,89 | 17,26 | 13,05 | 8,476 | 6,012 | 4,592 | 3,704 | 3,112 | 2,699 |
| 12 | 12,91 | 14,98 | 11,25 | 7,380 | 5,299 | 4,096 | 3,341 | 2,838 | 2,487 |
| 16 | 11,80 | 13,69 | 10,23 | 6,764 | 4,906 | 3,829 | 3,150 | 2,696 | 2,379 |
| 20 | 11,06 | 12,85 | 9,556 | 6,364 | 4,656 | 3,662 | 3,033 | 2,611 | 2,316 |
| 24 | 10,55 | 12,26 | 9,075 | 6,083 | 4,483 | 3,549 | 2,955 | 2,555 | 2,276 |
| 40 | 9,402 | 10,96 | 8,002 | 5,474 | 4,122 | 3,321 | 2,805 | 2,452 | 2,204 |
| 60 | 8,753 | 10,23 | 7,383 | 5,140 | 3,936 | 3,212 | 2,738 | 2,411 | 2,178 |
| 80 | 8,397 | 9,840 | 7,040 | 4,964 | 3,843 | 3,162 | 2,711 | 2,396 | 2,171 |
| 100 | 8,170 | 9,592 | 6,821 | 4,855 | 3,789 | 3,135 | 2,698 | 2,390 | 2,169 |

Su correspondiente representación gráfica se muestra en las figuras 3 a 8.

Valores de gamma crítico para $\epsilon=1$ Figura 3. Valores de g_K para $e = 1,0$

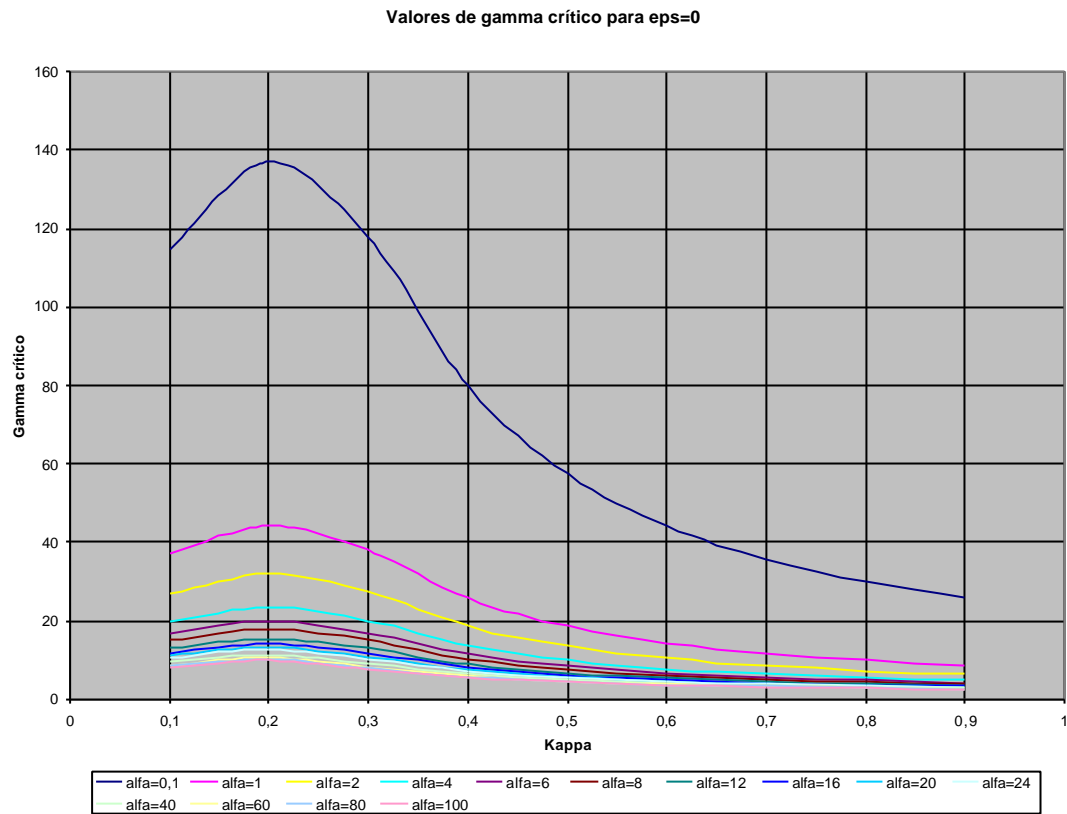


Figura 4. Valores de g_K para $e = 0,0$

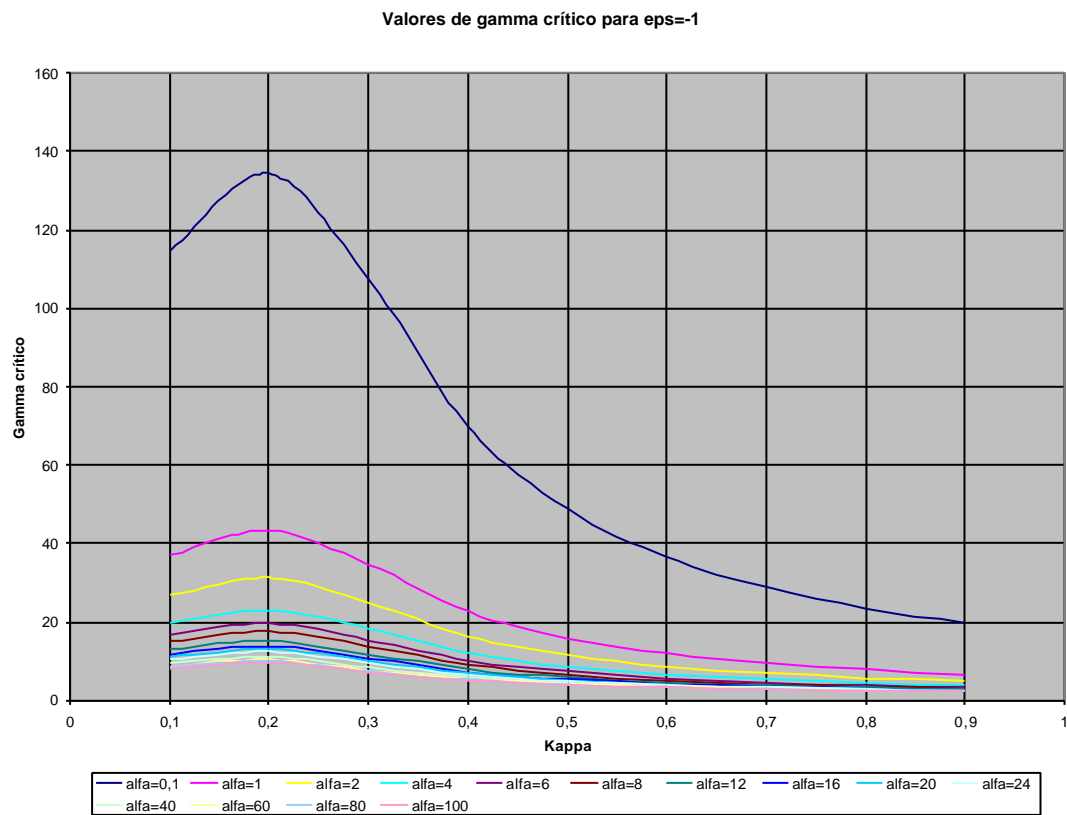


Figura 5. Valores de g_K para $e = -1,0$

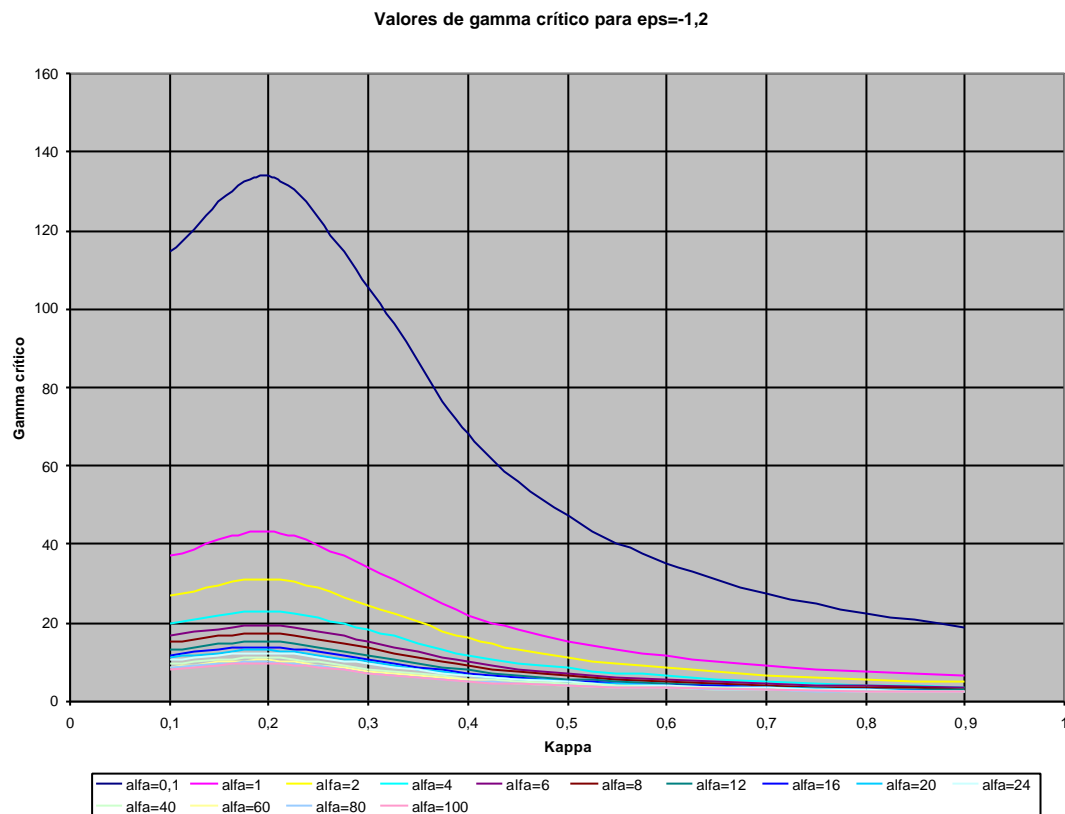


Figura 6. Valores de g_K para $e = -1,2$

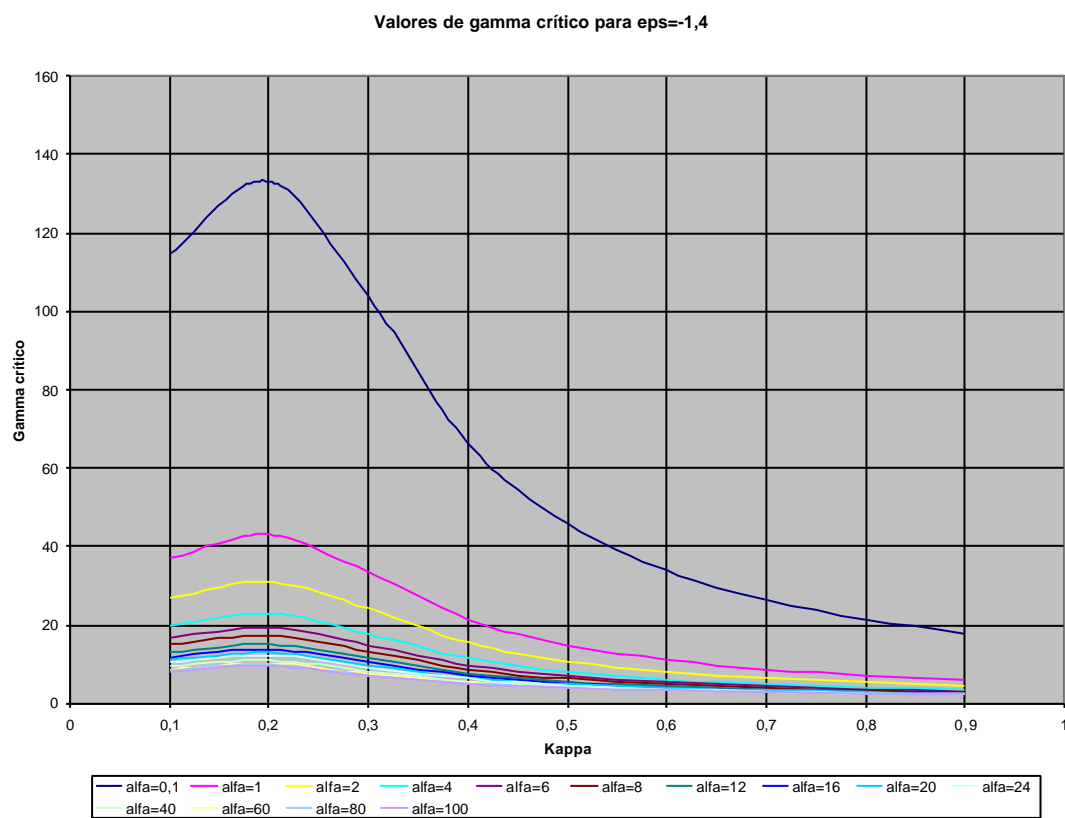


Figura 7. Valores de g_K para $e = -1,4$

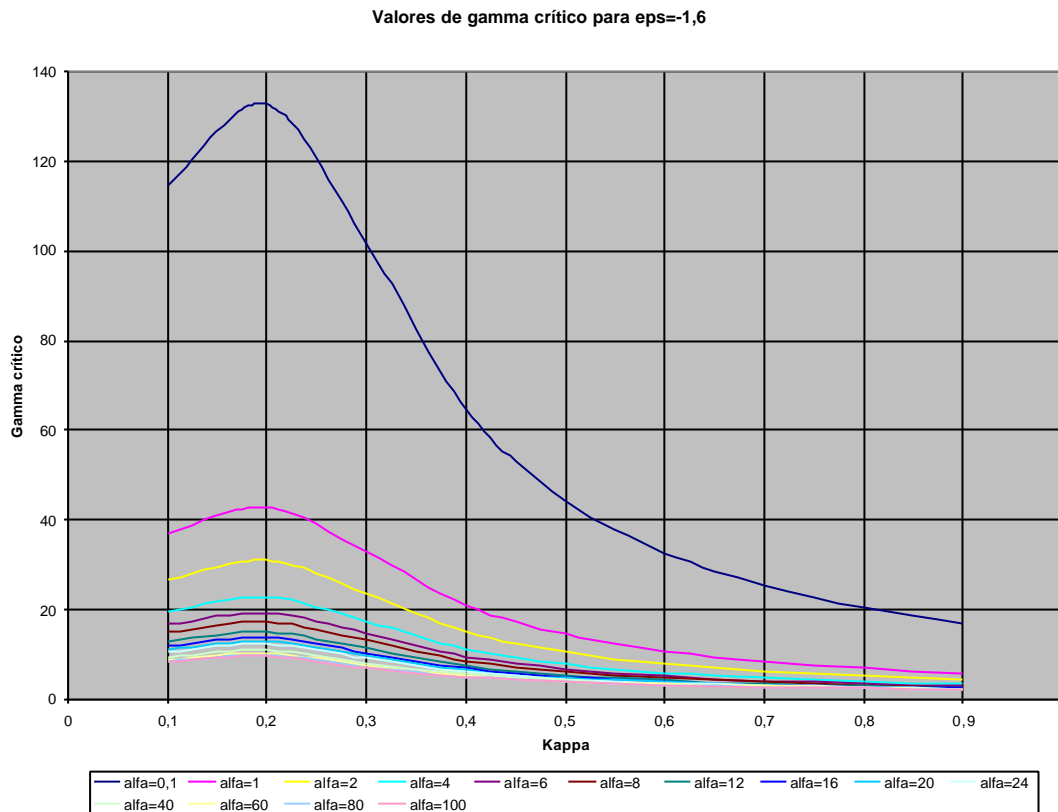


Figura 8. Valores de g_K para $e = -1,6$

Cálculo de las Cargas Críticas mediante el Eurocode 3

La norma europea Eurocode 3 (ref. [4]) contiene una fórmula general para el cálculo de momentos flexores críticos en régimen elástico que permite tener en cuenta la altura de aplicación de las cargas, pero la norma no trae los valores de los coeficientes necesarios para realizar los cálculos correspondientes a este caso, por lo que no puede aplicarse.

Cálculo de las Cargas Críticas mediante la Norma LRFD del AISC

En la norma del American Institute of Steel Construction, "Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings", December 27, 1999 (ref. [1]), el cálculo del momento crítico de pandeo lateral torsional de vigas está considerado en el caso en que las cargas estén aplicadas a lo largo del eje baricéntrico.

En el régimen elástico, el momento crítico en barras de sección doble T está dado por la fórmula (F1-13)

$$M_{cr} = C_b \frac{P}{L_b} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{PE}{L_b} \right)^2 I_y C_w} \quad (38)$$

donde J es la constante de torsión libre de la sección, L_b es la longitud libre sin arriostramientos y C_w es el momento de inercia sectorial y C_b es un coeficiente adimensional que se calcula con la expresión

$$C_b = \frac{12,5 M_{max}}{2,5 M_{max} + 3 M_A + 4 M_B + 3 M_C} \quad (39)$$

donde M_{\max} es el valor absoluto del momento flexor máximo en el tramo no arriostrado considerado, M_B es el valor absoluto del momento flexor en el centro y M_A y M_C los valores absolutos de los momentos flexores en los cuartos de la longitud del tramo.

Si aplicamos las expresiones (38) y (39) al tramo central de longitud $2c$ comprendido entre los dos arriostramientos y usamos los adimensionales definidos por las ecuaciones (15), se obtiene

$$(g_k)_a = \frac{p}{2k - 0,48 k^2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{4ak^2}} \quad (40)$$

Si aplicamos las expresiones (38) y (39) al tramo de longitud $L - c$ entre una sección arriostrada y el apoyo, resulta

$$(g_k)_a = \frac{5}{3} \frac{p}{(1-k)^2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{(1-k)^2 a}} \quad (41)$$

El menor de los dos valores $(g_k)_a$ calculados con las expresiones (40) y (41) es el valor crítico del adimensional definido por la quinta ecuación (15), calculado mediante la norma americana.

Por cuanto en la norma americana, las cargas se suponen aplicadas en el eje baricéntrico de la viga, comparamos $(g_k)_a$ con los valores obtenidos en el presente trabajo para $e = 0,0$ consignados en la tabla 5. Si tomamos a estos últimos como valores exactos, se pueden calcular en cada caso los errores relativos porcentuales

$$E_a = \frac{g_k - (g_k)_a}{(g_k)_a} 100\%$$

que se consignan en la tabla 7.

Tabla 7. Valores de E_a para $e = 0,0$.

| a | k=0,1 | k=0,2 | k=0,3 | k=0,4 | k=0,5 | k=0,6 | k=0,7 | k=0,8 | k=0,9 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 60,4 | 34,5 | 26,0 | 47,3 | 60,8 | 72,8 | 84,4 | 95,8 | 106,9 |
| 1 | 57,8 | 33,3 | 26,0 | 45,8 | 57,3 | 66,6 | 75,1 | 82,6 | 89,4 |
| 2 | 55,4 | 32,2 | 26,1 | 44,3 | 53,8 | 61,0 | 67,0 | 72,0 | 76,2 |
| 4 | 51,4 | 30,1 | 26,0 | 41,6 | 48,3 | 52,6 | 55,6 | 58,0 | 59,8 |
| 6 | 48,0 | 28,5 | 25,9 | 39,3 | 44,0 | 46,5 | 47,9 | 48,9 | 49,8 |
| 8 | 45,3 | 27,0 | 25,8 | 37,2 | 40,6 | 41,8 | 42,3 | 42,7 | 43,0 |
| 12 | 41,0 | 24,7 | 25,5 | 34,1 | 35,4 | 35,2 | 34,7 | 34,4 | 34,4 |
| 16 | 37,8 | 22,9 | 25,0 | 31,5 | 31,6 | 30,7 | 29,7 | 29,2 | 29,1 |
| 20 | 35,1 | 21,4 | 24,5 | 29,4 | 28,8 | 27,4 | 26,3 | 25,5 | 25,5 |
| 24 | 33,0 | 20,2 | 24,0 | 27,7 | 26,6 | 24,9 | 23,6 | 22,9 | 22,8 |
| 40 | 27,5 | 16,8 | 22,1 | 22,9 | 20,8 | 18,9 | 17,6 | 16,9 | 16,8 |
| 60 | 23,6 | 14,5 | 20,0 | 19,3 | 17,0 | 15,3 | 14,0 | 13,4 | 13,4 |
| 80 | 21,2 | 12,9 | 18,4 | 17,0 | 14,8 | 13,2 | 12,0 | 11,4 | 11,4 |
| 100 | 19,5 | 11,8 | 17,0 | 15,3 | 13,3 | 11,8 | 10,7 | 10,2 | 10,2 |

Conclusiones

Los valores críticos de las cargas que producen el pandeo lateral torsional en régimen elástico en el caso estudiado, pueden calcularse mediante las tablas 1 a 6.

En todos los casos se observa que la posición óptima de los arriostramientos es la que corresponde a un valor de $k \approx 0,2$.

La fórmula aproximada de la norma americana LRFD se refiere al caso en la carga está aplicada a la altura de eje de la viga. Sus errores son grandes, según puede apreciarse en la tabla 8.1, pero están del lado de la seguridad. Debido a que los resultados son decididamente conservadores, aún en el caso en que la carga esté aplicada en el baricentro del ala superior, o sea con $e = -1,0$, la fórmula da valores de carga críticas inferiores a las obtenidas en este trabajo. Cuando las cargas están aplicadas en puntos más elevados ($e < -1,0$), en algunos casos la fórmula da errores del lado de la inseguridad, pero relativamente pequeños.

Referencias Bibliográficas

- [1] American Institute of Steel Construction, "Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings", December 27, 1999.
- [2] Rezk H., "Teoría de segundo orden de las barras elásticas prismáticas de sección abierta y paredes delgadas". Ed. Fac. de Ing. de la Univ. de Buenos Aires, 1981.
- [3] Timoshenko S. P. y Gere J. M., "Theory of Elastic Stability". Ed. McGraw-Hill, 1961.
- [4] Comité Européen de Normalisation, "Eurocode 3, Calcul des structures en acier et Document d'Application National. Partie 1: Règles générales et règles pour les bâtiments". Association Française de Normalisation, 1992.