



PANDEO LATERAL TORSIONAL DE VIGAS DE SECCIÓN DOBLE TE ARRIOSTRADAS EN SU SECCIÓN CENTRAL

Horacio Rezk⁽¹⁾

Abstract

La norma LRFD del American Institute of Steel Construction y el Eurocode 3 presentan fórmulas aproximadas que permiten el cálculo de las cargas críticas de pandeo lateral torsional de vigas de acero en régimen elástico, en distintos casos particulares.

En el presente trabajo se estudia el problema de pandeo lateral torsional de las vigas elásticas de sección doble Te con su sección central arriostrada, simplemente apoyadas bajo la acción de dos cargas concentradas iguales dispuestas simétricamente respecto del plano de la sección central de la viga. Las cargas se suponen aplicadas a una distancia variable respecto de la sección central y en un punto a una altura también variable.

Se resuelve el problema analíticamente mediante las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría de segundo orden de las barras elásticas de paredes delgadas, obteniéndose las cargas críticas en forma adimensional, en función de variables adimensionales que representan las propiedades de la viga y la posición de las cargas. Los resultados se presentan mediante tablas.

Con fines comparativos, se analiza la posibilidad de resolución del problema mediante las fórmulas aproximadas indicadas en el Eurocode 3. Como este caso no está contemplado en dicha norma, se proponen coeficientes que permiten ampliar la posibilidad de utilización de la fórmula contenida en la norma europea. Asimismo, se analizan las limitaciones de las expresiones de la norma americana LRFD del American Institute of Steel Construction. Donde es posible, se determinan los errores resultantes.

Key words: Pandeo lateral torsional.

⁽¹⁾ – Profesor de la Universidad de Buenos Aires
E-mail: hrezk@heras.fi.uba.ar

1. INTRODUCCIÓN

El pandeo lateral torsional en régimen elástico es una posible forma de falla de las vigas de acero. Por consiguiente, las normas referentes a estas construcciones contienen prescripciones para facilitar la verificación de la seguridad de las vigas frente a este tipo de falla. El cálculo de los momentos críticos en régimen elástico se realiza mediante fórmulas aproximadas que se refieren a distintos casos particulares.

Por otra parte, es bien conocido que un adecuado arriostramiento de las vigas es una medida constructiva muy eficaz para alejar el peligro de este tipo de falla. Por tal motivo resulta de interés estudiar casos en los que las vigas están sujetas a algún tipo de arriostramiento.

El objetivo de este trabajo es ampliar el conocimiento de los casos de pandeo lateral torsional de vigas arriostradas. Los resultados obtenidos en forma analítica mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría general de segundo orden, además de su utilización práctica directa, permiten realizar una propuesta que amplía las posibilidades de aplicación de los procedimientos prescritos en el Eurocode 3 (ref. 10.6) y analizar los errores de las fórmulas contenidas en la norma LRFD de American Institute of Steel Construction (ref. 10.4), así como las limitaciones de su aplicación.

2. EL PROBLEMA CONSIDERADO

Se supone una viga elástica prismática de sección doble T simplemente apoyada, según se muestra en las figuras 2.1 y 2.2, cuya sección central está arriostrada de modo que no pueda girar en su propio plano ni desplazarse horizontalmente.

Para estudiar el problema usamos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales X , Y , Z de modo que en la configuración inicial de la barra, el eje Z coincide con el eje baricéntrico de la barra y los ejes X e Y son en cada sección ejes principales de inercia. También usamos un sistema de coordenadas acompañantes x , y , z , que en la configuración inicial de la barra coinciden con las cartesianas y que permanecen constantes para cada punto durante la deformación de la misma.

Suponemos que la barra está cargada con dos fuerzas

$$\bar{P} = P \bar{e}_Y \quad (2.1)$$

que tienen la dirección del eje Y del sistema de coordenadas cartesianas y están aplicadas en secciones transversales a una distancia c de la sección central de la viga. El punto de aplicación de cada fuerza en su correspondiente sección transversal es el punto A , cuyas coordenadas acompañantes son 0 , y_A (ver figura 2.2).

En los tramos $0 < z < c$ y $c < z < L$, no hay fuerzas exteriores distribuidas.

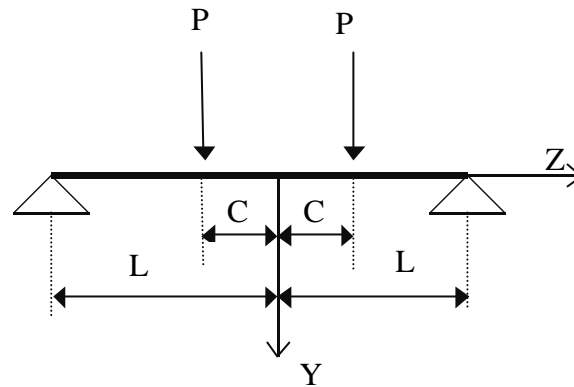


Fig. 2.1 Estado de carga de la viga simplemente apoyada.

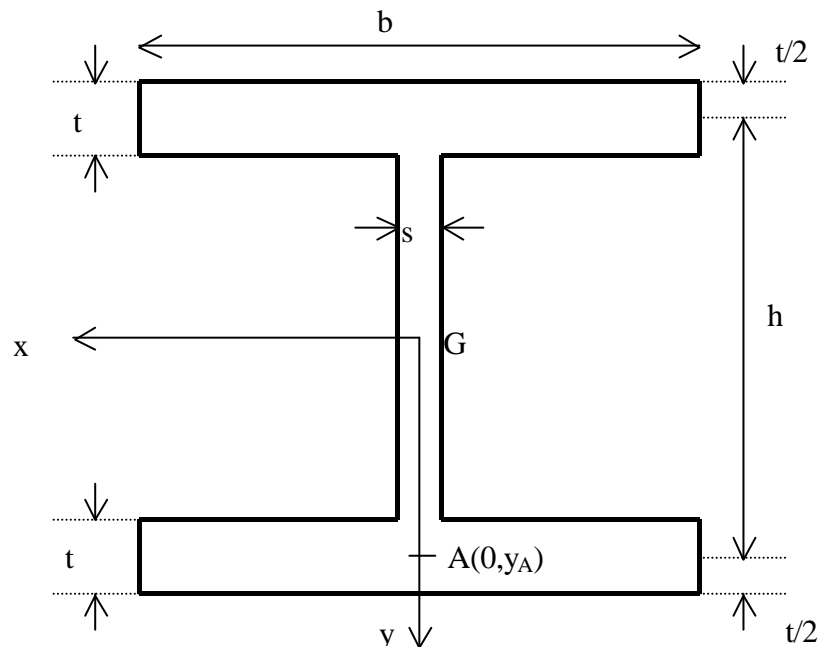


Fig. 2.2. Sección transversal de la viga.

3. LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO Y LOS ESFUERZOS DE LA BARRA

La estructura y las cargas son simétricas respecto del plano $Z = 0$ en la configuración inicial, pero el modo de pandeo lateral resulta antisimétrico respecto de dicho plano, debido al arriostramiento de la sección central de la viga. Teniendo en cuenta esto, consideramos sólo la mitad de su longitud, cuyas coordenadas z son positivas.

Dado que en la sección $z = c$ está aplicada una fuerza concentrada, a los efectos de resolver el problema, consideramos separadamente el intervalo $0 < z < c$, que llamamos tramo 1 y el intervalo $c < z < L$, que llamamos tramo 2.

Teniendo en cuenta que las fuerzas exteriores distribuidas son nulas, las ecuaciones diferenciales de equilibrio interno para el tramo 1 son (ver art. 5 de referencia 10.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_{X_1}}{dz} &= 0 & -Q_{Y_1} + \left(\frac{dv_1}{dz} - x_c \frac{d\Theta_1}{dz} \right) N_{Z_1} + \frac{dM_{X_1}}{dz} &= 0 \\
 \frac{dQ_{Y_1}}{dz} &= 0 & Q_{X_1} - \left(\frac{du_1}{dz} + y_c \frac{d\Theta_1}{dz} \right) N_{Z_1} + \frac{dM_{Y_1}}{dz} &= 0 \\
 \frac{dN_{Z_1}}{dz} &= 0 & -\frac{dv_1}{dz} Q_{X_1} + \frac{du_1}{dz} Q_{Y_1} + \frac{dM_{Z_1}}{dz} &= 0
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

En estas ecuaciones Q_{X_1} , Q_{Y_1} , N_{Z_1} , M_{X_1} , M_{Y_1} y M_{Z_1} son los esfuerzos de la barra en la configuración deformada referidos a las coordenadas cartesianas fijas X , Y , Z ; u_1 y v_1 son las componentes de los desplazamientos de los centros de corte de las secciones en las direcciones de los ejes X e Y , respectivamente; Θ_1 es la rotación de las secciones en su propio plano; x_c e y_c son las coordenadas del centro de corte.

Si integramos las ecuaciones (3.1) y tenemos en cuenta que las coordenadas del centro de corte son nulas, se obtiene

$$\begin{aligned}
 Q_{X_1} &= Q_{X_1}^* & M_{X_1} &= Q_{Y_1}^* z - N_{Z_1}^* v_1 + M_{X_1}^* \\
 Q_{Y_1} &= Q_{Y_1}^* & M_{Y_1} &= -Q_{X_1}^* z - N_{Z_1}^* u_1 + M_{Y_1}^* \\
 N_{Z_1} &= N_{Z_1}^* & M_{Z_1} &= Q_{X_1}^* v_1 - Q_{Y_1}^* u_1 + M_{Z_1}^*
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

En forma análoga, se obtiene para el tramo 2

$$\begin{aligned}
 Q_{X_2} &= Q_{X_2}^* & M_{X_2} &= Q_{Y_2}^* z - N_{Z_2}^* v_2 + M_{X_2}^* \\
 Q_{Y_2} &= Q_{Y_2}^* & M_{Y_2} &= -Q_{X_2}^* z + N_{Z_2}^* u_2 + M_{Y_2}^* \\
 N_{Z_2} &= N_{Z_2}^* & M_{Z_2} &= Q_{X_2}^* v_2 - Q_{Y_2}^* u_2 + M_{Z_2}^*
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

En las ecuaciones (3.2) y (3.3), las cantidades señaladas con un asterisco (*), forman un conjunto de doce constantes de integración.

Para determinar estas doce constantes se necesitan doce condiciones.

Si se considera el equilibrio en la configuración deformada de un segmento de barra comprendido entre dos secciones infinitamente próximas de coordenadas, $z = c - \mathbf{d}$ y $z = c + \mathbf{d}$ con $\mathbf{d} \rightarrow 0$, podemos plantear seis ecuaciones de equilibrio consistentes en tres ecuaciones de nulidad de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes X, Y, Z y tres ecuaciones de nulidad de la suma de los momentos respecto de tres ejes que pasan por el punto A donde está aplicada la fuerza P y paralelos a los ejes X, Y, Z , respectivamente. Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned}
 -Q_{X_1}^* + Q_{X_2}^* &= 0 & -Q_{Y_1}^* + Q_{Y_2}^* + P &= 0 & -N_{Z_1}^* + N_{Z_2}^* &= 0 \\
 Q_{Y_1}^* (v'_c y_A - c) + N_{Z_1}^* (y_A + v_c) - M_{X_1}^* + Q_{Y_2}^* (-v'_c y_A + c) - N_{Z_2}^* (y_A + v_c) + M_{X_2}^* &= 0 \\
 Q_{X_1}^* (v'_c y_A + c) + N_{Z_1}^* (y_A \Theta_c - u_c) - M_{Y_1}^* + Q_{X_2}^* (v'_c y_A - c) + N_{Z_2}^* (-y_A \Theta_c + u_c) + M_{Y_2}^* &= 0 \\
 -Q_{X_1}^* (y_A + v_c) + Q_{Y_1}^* (-y_A \Theta_c + u_c) - M_{Z_1}^* + Q_{X_2}^* (y_A + v_c) + Q_{Y_2}^* (y_A \Theta_c - u_c) + M_{Z_2}^* &= 0
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

En estas ecuaciones se usa la notación

$$\begin{aligned}
 v_c &= (v_1)_{z=c} = (v_2)_{z=c} & u_c &= (u_1)_{z=c} = (u_2)_{z=c} \\
 v'_c &= \left(\frac{dv_1}{dz} \right)_{z=c} = \left(\frac{dv_2}{dz} \right)_{z=c} & \Theta_c &= (\Theta_1)_{z=c} = (\Theta_2)_{z=c}
 \end{aligned}$$

que tiene en cuenta las condiciones de continuidad en la sección $z = c$.

Además, por razones de simetría y antisimetría en $z = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
 (Q_{Y_1})_{z=0} &= 0 & (M_{Y_1})_{z=0} &= 0 & (u_1)_{z=0} &= 0
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

y las condiciones de borde en $z = L$ son

$$\left(M_{x_2}\right)_{z=L} = 0 \quad \left(M_{y_2}\right)_{z=L} = 0 \quad \left(N_{z_2}\right)_{z=L} = 0 \quad (u_2)_{z=L} = (v_2)_{z=L} = 0 \quad (3.6)$$

Si además se tiene en cuenta que cuando los desplazamientos son nulos se tiene $M_{z_1} = M_{z_2} = 0$, pueden obtenerse las constantes $Q_{x_1}^*$, $Q_{y_1}^*$, $N_{z_1}^*$, $M_{x_1}^*$, $M_{y_1}^*$, $M_{z_1}^*$, $Q_{x_2}^*$, $Q_{y_2}^*$, $N_{z_2}^*$, $M_{x_2}^*$, $M_{y_2}^*$ y $M_{z_2}^*$, las que reemplazadas en las ecuaciones (3.2) y (3.3) nos dan los esfuerzos para el tramo 1

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= 0 & M_{x_1} &= P(L - c + v'_c y_A) \\ Q_{y_1} &= 0 & M_{y_1} &= 0 \\ N_{z_1} &= 0 & M_{z_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

y para el tramo 2

$$\begin{aligned} Q_{x_2} &= 0 & M_{x_2} &= P(L - z) \\ Q_{y_2} &= -P & M_{y_2} &= 0 \\ N_{z_2} &= 0 & M_{z_2} &= P(u_2 + y_A \Theta_c - u_c) \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. LAS RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones indicadas en referencia 10.2 como ecuaciones (6.11) son

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + (y_c Q_x - M_z) \frac{du}{dz} + y_c Q_y \frac{dv}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) y_c \frac{d\Theta}{dz} + M_y \Theta + M_x &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + (x_c Q_y + M_z) \frac{dv}{dz} + x_c Q_x \frac{du}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) x_c \frac{d\Theta}{dz} + M_x \Theta - M_y &= 0 \\ EI_w \frac{d^3 \Theta}{dz^3} + (-y_c N_z + M_x) \frac{du}{dz} + (x_c N_z + M_y) \frac{dv}{dz} - \\ &- (GI_T + i_c^2 N_z + r_x M_x - r_y M_y) \frac{d\Theta}{dz} + M_z = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

En estas ecuaciones, I_x , I_y son los momentos principales de inercia baricéntricos de la sección; I_w es su momento de inercia sectorial; I_T es la constante de torsión libre; i_c es su radio de giro polar respecto del centro de corte; y r_x , r_y son dos constantes geométricas de la sección definidas por las expresiones

$$r_x = \frac{\iint_A y(x^2 + y^2) dx dy}{I_x} - 2y_c \quad r_y = \frac{\iint_A x(x^2 + y^2) dx dy}{I_y} - 2x_c$$

Si en las ecuaciones (4.1) introducimos los esfuerzos expresados por las ecuaciones (3.9) y se tienen en cuenta las condiciones de simetría del perfil doble T ($r_x = r_y = x_c = y_c = 0$), se tiene para el tramo 1,

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v_1}{dz^2} + P(L - c + v'_c y_A) &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u_1}{dz^2} + P(L - c) \Theta_1 &= 0 \\ EI_w \frac{d^3 \Theta_1}{dz^3} + P(L - c) \frac{du_1}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_1}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Después de derivar la última ecuación (4.2) una vez respecto de z , resulta

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_1}{dz^4} + P(L-c) \frac{d^2 u_1}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} = 0 \quad (4.3)$$

Si procedemos en forma análoga para el tramo 2, obtenemos

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v_2}{dz^2} + P(L-z) &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u_2}{dz^2} + P(L-z) \Theta_2 &= 0 \\ EI_w \frac{d^3 \Theta_2}{dz^3} + P(L-z) \frac{du_2}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_2}{dz} + Pu_2 + P(y_A \Theta_c - u_c) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Después de derivar la última ecuación (4.4) una vez respecto de z , se tiene

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_2}{dz^4} + P(L-z) \frac{d^2 u_2}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_2}{dz^2} = 0 \quad (4.5)$$

La primera ecuación (4.2) y la primera ecuación (4.4) permiten obtener la deflexión de la viga en su plano de simetría Y, Z . Para analizar el problema de pandeo lateral debemos considerar el sistema de ecuaciones homogéneas formado por la segunda ecuación (4.2), (4.3), la segunda ecuación (4.4) y (4.5).

De la segunda ecuación (4.2), obtenemos

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = -\frac{P(L-c)}{EI_y} \Theta_1$$

que, reemplazada en la ecuación (4.3), nos da

$$\frac{d^4 \Theta_1}{dz^4} - \frac{GI_T}{EI_w} \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} - \frac{P^2(L-c)^2}{EI_w EI_y} \Theta_1 = 0 \quad (4.6)$$

Si definimos los adimensionales

$$\mathbf{V} = \frac{z}{L} \quad \mathbf{k} = \frac{c}{L} \quad \mathbf{a} = \frac{GI_T L^2}{EI_w} \quad \mathbf{b} = \sqrt{\frac{EI_y}{GI_T}} \quad \mathbf{g} = \frac{PL^2}{\sqrt{EI_y GI_T}} \quad (4.7)$$

la ecuación (4.6) puede escribirse en la forma

$$\frac{d^4 \Theta_1}{d\mathbf{z}^4} - \mathbf{a} \frac{d^2 \Theta_1}{d\mathbf{z}^2} - \mathbf{g}^2 \mathbf{a} (1-\mathbf{k})^2 \Theta_1 = 0 \quad (4.8)$$

Si procedemos en forma análoga con la segunda ecuación (4.4) y la ecuación (4.5), se obtiene

$$\frac{d^4 \Theta_2}{d\mathbf{z}^4} - \frac{GI_T}{EI_w} \frac{d^2 \Theta_2}{d\mathbf{z}^2} - \frac{P^2(L-z)^2}{EI_w EI_y} \Theta_2 = 0 \quad (4.9)$$

y si introducimos los adimensionales definidos por las ecuaciones (4.7), resulta

$$\frac{d^4 \Theta_2}{d\mathbf{z}^4} - \mathbf{a} \frac{d^2 \Theta_2}{d\mathbf{z}^2} - \mathbf{g}^2 \mathbf{a} (1-\mathbf{z})^2 \Theta_2 = 0 \quad (4.10)$$

Las ecuaciones diferenciales (4.8) y (4.10) deben satisfacer las siguientes condiciones de borde y continuidad

$$(\Theta_1)_{z=0} = 0 \quad \left(\frac{d^2 \Theta_1}{d\mathbf{z}^2} \right)_{z=0} = 0 \quad (\Theta_2)_{z=1} = 0 \quad \left(\frac{d^2 \Theta_2}{d\mathbf{z}^2} \right)_{z=1} = 0 \quad (4.11)$$

$$(\Theta_1)_{z=k} = (\Theta_2)_{z=k} \quad \left(\frac{d\Theta_1}{dz} \right)_{z=k} = \left(\frac{d\Theta_2}{dz} \right)_{z=k} \quad \left(\frac{d^2\Theta_1}{dz^2} \right)_{z=k} = \left(\frac{d^2\Theta_2}{dz^2} \right)_{z=k}$$

Asimismo, deben cumplir una condición adicional que obtenemos restando miembro a miembro la última ecuación (4.2) y la última ecuación (4.4). Si luego ponemos $z = c$ y tenemos en cuenta que

$$\left(\frac{du_1}{dz} \right)_{z=c} = \left(\frac{du_2}{dz} \right)_{z=c} \quad \left(\frac{d\Theta_1}{dz} \right)_{z=c} = \left(\frac{d\Theta_2}{dz} \right)_{z=c}$$

resulta

$$EI_w \left(\frac{d^3\Theta_1}{dz^3} \right)_{z=c} - EI_w \left(\frac{d^3\Theta_2}{dz^3} \right)_{z=c} + Py_A \Theta_c = 0$$

Si en esta ecuación introducimos los adimensionales definidos por las ecuaciones (4.7), se obtiene

$$\left(\frac{d^3\Theta_2}{dz^3} \right)_{z=k} - \left(\frac{d^3\Theta_1}{dz^3} \right)_{z=k} + \frac{ab}{L} \frac{y_A}{L} \Theta_c = 0 \quad (4.12)$$

En el caso de perfiles doble Te, como el indicado en la figura 2.2, se tiene

$$I_y = \frac{tb^3}{6} \quad I_T = \frac{2bt^3 + hs^3}{3} \quad I_w = \frac{b^3h^2t}{24} \quad (4.13)$$

Si introducimos estas expresiones en la tercera y cuarta ecuación (4.7), se obtiene

$$\mathbf{a} = \frac{16t^2L^2}{b^2h^2} \frac{G}{E} \left(1 + \frac{hs^3}{2bt^3} \right) \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{b}{t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{hs^3}{2bt^3}}} \quad (4.14)$$

y resulta entonces

$$\frac{ab}{L} \frac{y_A}{L} = \sqrt{\mathbf{a}\mathbf{e}} \quad (4.15)$$

donde \mathbf{e} es un adimensional definido por la expresión

$$\mathbf{e} = \frac{2y_A}{h} \quad (4.16)$$

Si introducimos la ecuación (4.15) en la ecuación (4.12), ésta queda en la forma

$$\left(\frac{d^3\Theta_2}{dz^3} \right)_{z=k} - \left(\frac{d^3\Theta_1}{dz^3} \right)_{z=k} + \sqrt{\mathbf{a}\mathbf{e}} \Theta_c = 0 \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) y las siete ecuaciones (4.11) son las condiciones que deben satisfacer las ecuaciones diferenciales (4.8) y (4.10).

5. LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DEL PROBLEMA

La solución general de la ecuación diferencial (4.8) correspondiente al tramo 1 (intervalo $0 < z < k$) es

$$\Theta_1 = A_1 \sin \mathbf{m}z + A_2 \cos \mathbf{m}z + A_3 \sinh \mathbf{n}z + A_4 \cosh \mathbf{n}z \quad (5.1)$$

donde A_1 , A_2 , A_3 y A_4 son dos constantes arbitrarias y \mathbf{m} y \mathbf{n} son dos adimensionales definidos por las expresiones

$$m = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + g^2 a(1-k)^2} - \frac{a}{2}} \quad n = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + g^2 a(1-k)^2} + \frac{a}{2}} \quad (5.2)$$

Si planteamos las dos primeras condiciones de la primera fila de ecuaciones (4.11), se obtiene $A_2 = A_4 = 0$ y la ecuación (5.1) queda

$$\Theta_1 = A_1 \sin mz + A_3 \sinh nz \quad (5.3)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (4.10) conviene definir una nueva variable adimensional

$$x = 1 - z \quad (5.4)$$

con lo que la ecuación diferencial (4.10) queda en la forma

$$\frac{d^4 \Theta_2}{dx^4} - a \frac{d^2 \Theta_2}{dx^2} - g^2 a x^2 \Theta_2 = 0 \quad (5.5)$$

Proponemos como solución de esta ecuación una serie de potencias de la forma

$$\Theta_2 = x^m (a_{0,m} + a_{1,m}x + a_{2,m}x^2 + a_{3,m}x^3 + \dots) \quad (5.6)$$

donde m es una constante.

Si introducimos la ecuación (5.6) en la ecuación diferencial (5.5), se obtiene una serie de potencias de x donde la menor potencia es x^{m-4} . Si anulamos el coeficiente de esa potencia en la serie, se obtiene

$$a_{0,m} m(m-1)(m-2)(m-3) = 0 \quad (5.7)$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$m = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad (5.8)$$

y adoptamos arbitrariamente $a_{0,m} = 1$.

Si anulamos todos los demás coeficientes de la serie de potencias resultante, se obtienen los coeficientes $a_{j,m}$ de cuatro series de potencias de la forma (5.6) que son solución de la ecuación diferencial y que se corresponden con los valores de m consignados en la ecuación (5.8).

La solución general de la ecuación diferencial (5.5) puede entonces expresarse como la suma de cuatro series multiplicadas por sendas constantes arbitrarias, o sea

$$\Theta_2 = C_0 f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 \quad (5.9)$$

donde C_0 , C_1 , C_2 y C_3 son cuatro constantes y las series son

$$f_m = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (1-z)^{m+j} \quad (5.10)$$

$$m = 0, 1, 2, 3$$

Los coeficientes de las series en la expresión (5.10) son

$$a_{0,m} = 1 \quad a_{2,m} = \frac{a}{(m+2)(m+1)} a_{0,m} \quad a_{4,m} = \frac{a}{(m+4)(m+3)} a_{2,m} \quad (5.11)$$

$$a_{j,m} = \frac{a}{(m+j)(m+j-1)} a_{j-2,m} + \frac{g^2 a}{(m+j)(m+j-1)(m+j-2)(m+j-3)} a_{j-6,m},$$

para $j = 6, 8, 10, \dots, \infty$.

En las expresiones (5.11), m toma los valores (5.8).

Las derivadas primera, segunda y tercera de las series (5.10) son

$$\begin{aligned}\frac{df_m}{dz} &= - \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(1-z)^{m+j-1} \\ \frac{d^2 f_m}{dz^2} &= \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(m+j-1)(1-z)^{m+j-2} \\ \frac{d^3 f_m}{dz^3} &= - \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(m+j-1)(m+j-2)(1-z)^{m+j-3}\end{aligned}\quad (5.12)$$

Si introducimos la solución (5.9) en las dos últimas ecuaciones de la primera fila de condiciones (4.11), se obtiene

$$C_0 = 0 \quad C_2 = 0$$

con lo que la ecuación (5.9) se reduce a

$$\Theta_2 = C_1 f_1 + C_3 f_3 \quad (5.13)$$

Si se plantean las tres condiciones de la segunda fila de ecuaciones (4.11), mediante las expresiones (5.3) y (5.13), se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales algebraicas homogéneas en A_1 , A_3 , C_1 y C_3 . La condición para que este sistema tenga soluciones distintas de la trivial es que se anule el determinante de la matriz de los coeficientes, de donde resulta la ecuación

$$\begin{vmatrix} \text{sen } nk & \sinh nk & -(f_1)_{z=k} & -(f_3)_{z=k} \\ m \cos nk & n \cosh nk & -\left(\frac{df_1}{dz}\right)_{z=k} & -\left(\frac{df_3}{dz}\right)_{z=k} \\ -m^2 \text{sen } nk & n^2 \sinh nk & -\left(\frac{d^2 f_1}{dz^2}\right)_{z=k} & -\left(\frac{d^2 f_3}{dz^2}\right)_{z=k} \\ eg\sqrt{a} \text{sen } nk + m^3 \cos nk & eg\sqrt{a} \sinh nk - n^3 \cosh nk & \left(\frac{d^3 f_1}{dz^3}\right)_{z=k} & \left(\frac{d^3 f_3}{dz^3}\right)_{z=k} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

Los elementos de la tercera y cuarta columna del determinante de la ecuación (5.14) se calculan con las expresiones (5.10) y (5.12), poniendo en ellas $z = k$ y sucesivamente $m = 1$ y $m = 3$.

La ecuación (5.14) es una función de la forma

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{g}) = 0 \quad (5.15)$$

donde el adimensional \mathbf{a} depende de las propiedades geométricas y mecánicas de la viga, \mathbf{k} define la posición de las cargas en la longitud de la viga, \mathbf{e} caracteriza a la ubicación del punto de aplicación de las cargas en el plano de la sección y \mathbf{g} es un adimensional que representa a la magnitud de las cargas con relación a las propiedades de la viga.

Fijados, \mathbf{a} , \mathbf{k} y \mathbf{e} , se obtiene \mathbf{g}_k como la menor raíz real positiva de la función (5.15), lo que permite calcular la carga crítica en régimen elástico mediante la expresión

$$P_k = \mathbf{g}_k \frac{\sqrt{EI_y G I_T}}{L^2} \quad (5.16)$$

6. LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Se realizaron los cálculos de g_k tomando para a valores en el intervalo $0,1 \leq a \leq 100$, que coinciden con los considerados por Timoshenko en el problema de pandeo lateral de una viga de sección doble Te bajo la acción de una fuerza concentrada en el centro (tabla 6-5 de referencia 10.1).

Los valores de k se tomaron entre 0,0 y 0,9, variando en intervalos de 0,1.

Los valores considerados para e son 1,0 (cargas aplicadas en el centro del ala inferior), 0,0 (cargas aplicadas en el baricentro), -1,0 (cargas aplicadas en el centro del ala superior) y valores -1,2, -1,4 y -1,6, que corresponden a posiciones de las cargas por encima del ala superior.

Para realizar los cálculos se desarrolló un programa de computación en lenguaje Fortran en el que se usó doble precisión. Las series fueron evaluadas mediante la suma de sus quinientos primeros términos ($j = 0, 2, \dots, 1000$), después de comprobar que los resultados no experimentaban cambio con cantidades de términos menores que la adoptada

Los resultados obtenidos se consignan en las tablas 6.1 a 6.6

Tabla 6.1. Valores de g_k para $e = -1,6$

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	58,22	56,35	52,18	48,57	47,39	49,70	57,21	74,55	117,1	264,8
1	19,20	18,61	17,29	16,16	15,83	16,65	19,19	24,98	39,12	88,01
2	14,18	13,75	12,81	12,03	11,83	12,48	14,39	18,72	29,24	65,45
4	10,82	10,51	9,844	9,305	9,213	9,764	11,29	14,66	22,78	50,57
6	9,431	9,179	8,632	8,205	8,169	8,692	10,06	13,06	20,20	44,55
8	8,653	8,432	7,957	7,600	7,601	8,115	9,410	12,20	18,81	41,24
12	7,794	7,610	7,221	6,948	7,000	7,514	8,734	11,31	17,35	37,68
16	7,324	7,161	6,824	6,604	6,691	7,212	8,400	10,87	16,60	35,81
20	7,024	6,876	6,575	6,392	6,505	7,035	8,208	10,61	16,17	34,66
24	6,815	6,678	6,403	6,250	6,383	6,922	8,087	10,45	15,88	33,89
40	6,369	6,259	6,049	5,966	6,154	6,724	7,887	10,19	15,38	32,38
60	6,126	6,034	5,867	5,832	6,059	6,655	7,830	10,11	15,20	31,68
80	5,998	5,916	5,776	5,771	6,023	6,638	7,824	10,11	15,14	31,37
100	5,918	5,843	5,723	5,738	6,008	6,637	7,833	10,12	15,14	31,21

Tabla 6.2. Valores de g_k para $e = -1,4$

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	58,22	56,58	52,96	49,90	49,18	51,93	59,97	78,08	121,8	271,0
1	19,20	18,68	17,54	16,58	16,40	17,37	20,08	26,12	40,63	89,98
2	14,18	13,81	12,99	12,33	12,24	12,99	15,04	19,55	30,32	66,86
4	10,82	10,55	9,973	9,525	9,512	10,14	11,76	15,26	23,57	51,59
6	9,431	9,211	8,739	8,388	8,417	9,006	10,46	13,56	20,87	45,40
8	8,653	8,461	8,051	7,760	7,819	8,392	9,758	12,65	19,40	41,99
12	7,794	7,634	7,300	7,083	7,183	7,747	9,029	11,69	17,85	38,31
16	7,324	7,182	6,893	6,723	6,853	7,418	8,661	11,21	17,05	36,37
20	7,024	6,896	6,638	6,500	6,652	7,223	8,446	10,92	16,57	35,17
24	6,815	6,696	6,462	6,350	6,520	7,096	8,308	10,74	16,26	34,36
40	6,369	6,273	6,096	6,046	6,264	6,864	8,064	10,42	15,68	32,76
60	6,126	6,046	5,907	5,899	6,151	6,773	7,978	10,31	15,45	32,00
80	5,998	5,927	5,811	5,830	6,104	6,741	7,954	10,28	15,37	31,65
100	5,918	5,853	5,755	5,792	6,081	6,730	7,951	10,27	15,34	31,46

Tabla 6.3. Valores de g_k para $e = -1,2$

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	58,22	56,82	53,75	51,27	51,05	54,28	62,90	81,80	126,6	277,1
1	19,20	18,76	17,79	17,02	17,00	18,12	21,02	27,31	42,19	91,96
2	14,18	13,86	13,17	12,65	12,67	13,54	15,72	20,41	31,44	68,28
4	10,82	10,59	10,10	9,751	9,822	10,53	12,25	15,89	24,39	52,61
6	9,341	9,243	8,847	8,575	8,675	9,334	10,87	14,09	21,55	46,25
8	8,653	8,489	8,146	7,925	8,046	8,680	10,12	13,11	20,00	42,74
12	7,794	7,658	7,379	7,220	7,372	7,988	9,333	12,08	18,36	38,94
16	7,324	7,203	6,963	6,844	7,019	7,631	8,930	11,55	17,50	36,92
20	7,024	6,915	6,701	6,610	6,803	7,416	8,690	11,24	16,98	35,67
24	6,815	6,714	6,521	6,451	6,659	7,275	8,534	11,03	16,64	34,82
40	6,369	6,288	6,144	6,128	6,375	7,006	8,245	10,65	15,99	33,13
60	6,126	6,058	5,947	5,967	6,244	6,891	8,129	10,50	15,70	32,31
80	5,998	5,938	5,847	5,890	6,185	6,845	8,086	10,44	15,59	31,92
100	5,918	5,863	5,787	5,846	6,155	6,824	8,069	10,42	15,53	31,70

Tabla 6.4. Valores de g_k para $e = -1,0$

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	58,22	57,06	54,55	52,68	53,00	56,77	66,01	85,71	131,6	283,3
1	19,20	18,84	18,04	17,47	17,63	18,92	22,02	28,57	43,79	93,94
2	14,18	13,91	13,36	12,97	13,12	14,11	16,43	21,31	32,60	69,69
4	10,82	10,63	10,23	9,982	10,14	10,95	12,77	16,54	25,22	53,63
6	9,431	9,276	8,955	8,766	8,941	9,675	11,30	14,63	22,25	47,09
8	8,653	8,517	8,241	8,092	8,279	8,980	10,50	13,59	20,62	43,48
12	7,794	7,681	7,458	7,360	7,567	8,238	9,648	12,48	18,87	39,55
16	7,324	7,224	7,034	6,967	7,190	7,851	9,207	11,90	17,95	37,46
20	7,024	6,934	6,765	6,721	6,958	7,615	8,941	11,56	17,39	36,16
24	6,815	6,732	6,580	6,554	6,802	7,458	8,765	11,33	17,02	35,28
40	6,369	6,302	6,191	6,210	6,489	7,152	8,428	10,89	16,29	33,49
60	6,126	6,070	5,987	6,036	6,338	7,012	8,281	10,69	15,95	32,60
80	5,998	5,949	5,882	5,951	6,268	6,951	8,219	10,61	15,80	32,18
100	5,918	5,873	5,819	5,901	6,230	6,919	8,189	10,57	15,72	31,93

Tabla 6.5. Valores de g_k para $e = 0,0$

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	58,22	58,25	58,70	60,34	64,12	71,29	84,15	107,9	158,4	314,1
1	19,20	19,22	19,37	19,91	21,16	23,53	27,78	35,64	52,31	103,7
2	14,18	14,19	14,30	14,70	15,63	17,38	20,53	26,33	38,65	76,63
4	10,82	10,82	10,91	11,22	11,93	13,28	15,69	20,13	29,54	58,58
6	9,431	9,437	9,513	9,788	10,41	11,59	13,70	17,58	25,80	51,16
8	8,653	8,659	8,729	8,984	9,561	10,65	12,58	16,15	23,71	47,01
12	7,794	7,800	7,864	8,097	8,623	9,610	11,36	14,59	21,42	42,47
16	7,324	7,329	7,391	7,612	8,112	9,044	10,70	13,74	20,17	40,00
20	7,024	7,029	7,089	7,304	7,787	8,687	10,28	13,20	19,39	38,44
24	6,815	6,820	6,879	7,090	7,562	8,439	9,989	12,83	18,85	37,37
40	6,369	6,374	6,431	6,635	7,086	7,918	9,381	12,06	17,71	35,12
60	6,126	6,131	6,188	6,389	6,831	7,641	9,060	11,65	17,12	33,95
80	5,998	6,002	6,060	6,260	6,697	7,497	8,894	11,44	16,81	33,34
100	5,918	5,922	5,980	6,180	6,615	7,409	8,793	11,31	16,63	32,97

Tabla 6.6. Valores de g_k para $e = 1,0$

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	58,22	59,45	63,05	68,99	77,47	89,16	105,9	132,8	185,6	343,2
1	19,20	19,60	20,75	22,65	25,37	29,15	34,62	43,44	60,85	112,9
2	14,18	14,46	15,28	16,64	18,60	21,34	25,33	31,82	44,66	83,08
4	10,82	11,02	11,61	12,59	14,02	16,05	19,04	23,96	33,75	63,10
6	9,431	9,597	10,09	10,91	12,11	13,84	16,41	20,68	29,21	54,84
8	8,653	8,799	9,231	9,956	11,03	12,58	14,92	18,82	26,64	50,18
12	7,794	7,917	8,279	8,894	9,815	11,17	13,24	16,73	23,78	45,03
16	7,324	7,432	7,754	8,305	9,140	10,38	12,31	15,58	22,21	42,21
20	7,024	7,123	7,418	7,926	8,705	9,876	11,71	14,84	21,19	40,41
24	6,815	6,907	7,182	7,660	8,398	9,518	11,28	14,31	20,49	39,16
40	6,369	6,444	6,673	7,081	7,729	8,741	10,36	13,19	18,97	36,50
60	6,126	6,191	6,390	6,757	7,354	8,305	9,852	12,56	18,13	35,06
80	5,998	6,055	6,238	6,580	7,150	8,068	9,574	12,23	17,69	34,31
100	5,918	5,971	6,141	6,468	7,019	7,917	9,398	12,01	17,41	33,83

7. CÁLCULO DE LAS CARGAS CRÍTICAS MEDIANTE LAS FÓRMULAS APROXIMADAS DEL EUROCODE 3

En el Eurocode 3 (ref. 10.6), la resistencia de cálculo de un elemento flexado se obtiene por un procedimiento que tiene en cuenta el momento crítico en régimen elástico (ver art. 5.5.2 de la norma).

En su anexo F, consigna procedimientos para calcular el momento crítico de vigas elásticas con diversas condiciones de carga. En el caso particular de secciones doble Te, se usa la fórmula (F-4)

$$M_{cr} = C_1 \frac{p^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \left[\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{p^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2 \right]^{0.5} - C_2 z_g \right\} \quad (7.1)$$

En esta fórmula las constantes C_1 y C_2 , deben buscarse en la tabla F.1.2 de dicho anexo. Sin embargo, en este caso, la longitud libre entre secciones que no tienen restricción al desplazamiento lateral es igual a la mitad de la longitud de la viga y su diagrama de momentos flexores tiene la forma mostrada en la figura 7.1. Este diagrama no coincide con ninguno de los casos contemplados en la tabla F.1.2, o sea que el Eurocode 3 no tiene los elementos suficientes para resolver el problema aquí considerado.

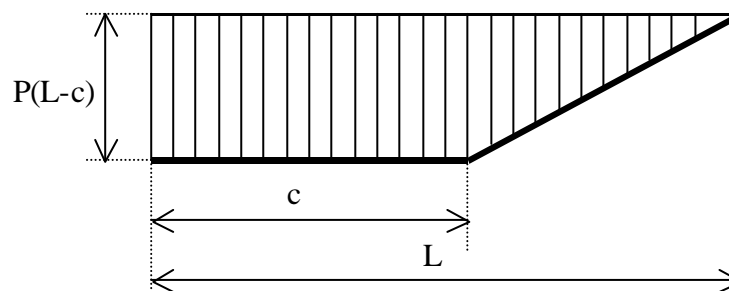


Fig. 7.1. Diagrama de momentos flexores.

En base a los resultados teóricos obtenidos en el presente trabajo, se encontraron valores para los coeficientes C_1 y C_2 , a fin de que pueda aplicarse la fórmula del Eurocode 3 a este caso. Después de realizar numerosos tanteos mediante un programa de computación, se llegó a obtener $C_1 = 1,130$ y $C_2 = 0,227$. El criterio usado para fijar estos valores fue el de obtener el mínimo error posible para $k = 0,5$, o sea en el caso en que las cargas están aplicadas en los cuartos de la luz de la viga.

La fórmula (7.1), expresada en términos de los adimensionales definidos en el presente trabajo y poniendo $k = k_w = 1$, queda en la forma

$$(\mathbf{g}_k)_e = \frac{C_1 \mathbf{p}^2}{1 - k} \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\mathbf{p}^2} + C_2 \frac{\mathbf{e}^2}{a} \right]^{0,5} + C_2 \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{a}} \right\} \quad (7.2)$$

donde hemos llamado $(\mathbf{g}_k)_e$ al valor crítico del adimensional definido por la quinta ecuación (4.7), calculado de acuerdo con la norma europea.

Mediante la expresión (7.2) y los valores adoptados para las constantes C_1 y C_2 , se calcularon todos los valores de $(\mathbf{g}_k)_e$ que se corresponden con los valores de \mathbf{g}_k consignados en las tablas 6.1 a 6.8 y, tomando a estos últimos como valores exactos, se calcularon en cada caso los errores relativos porcentuales

$$E_e = \frac{\mathbf{g}_k - (\mathbf{g}_k)_e}{(\mathbf{g}_k)_e} 100\%$$

que se consignan en las tablas 7.1 a 7.6

Tabla 7.1. Valores de E_e para $\mathbf{e} = -1,6$.

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	134,0	103,8	67,8	36,7	14,3	-0,1	-8,0	-10,1	-5,9	6,4
1	130,4	101,0	66,0	35,7	14,0	-0,1	-7,9	-10,1	-6,1	5,6
2	127,0	98,1	64,1	34,8	13,6	-0,1	-7,8	-10,1	-6,4	4,8
4	121,3	93,5	61,1	33,2	13,1	-0,1	-7,6	-10,0	-6,8	3,4
6	116,7	89,8	58,7	32,0	12,6	-0,1	-7,5	-10,0	-7,2	2,4
8	112,9	86,8	56,7	30,9	12,2	-0,1	-7,4	-9,9	-7,4	1,5
12	107,1	82,0	53,5	29,2	11,6	-0,2	-7,2	-9,9	-7,8	0,1
16	102,7	78,4	51,1	27,9	11,1	-0,2	-7,0	-9,8	-8,1	-0,9
20	99,2	75,5	49,2	26,9	10,7	-0,2	-6,9	-9,7	-8,3	-1,7
24	96,4	73,2	47,6	26,1	10,3	-0,3	-6,8	-9,7	-8,5	-2,4
40	88,7	66,9	43,4	23,7	9,4	-0,4	-6,5	-9,4	-8,9	-4,1
60	83,2	62,4	40,4	22,1	8,7	-0,5	-6,3	-9,3	-9,1	-5,2
80	79,7	59,6	38,5	21,1	8,3	-0,5	-6,2	-9,1	-9,3	-6,0
100	77,3	57,5	37,2	20,3	8,0	-0,6	-6,1	-9,0	-9,3	-6,5

Tabla 7.2. Valores de E_e para $e = -1,4$.

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	124,2	96,1	63,2	34,5	13,6	-0,0	-7,6	-9,8	-6,2	4,4
1	121,1	93,6	61,6	33,6	13,3	0,0	-7,5	-9,8	-6,4	3,6
2	118,2	91,3	59,9	32,8	13,0	-0,0	-7,4	-9,7	-6,7	2,9
4	113,3	87,2	57,3	31,5	12,5	-0,0	-7,3	-9,7	-7,1	1,7
6	109,3	84,0	55,2	30,3	12,1	-0,0	-7,1	-9,7	-7,3	0,8
8	106,1	81,4	53,4	29,4	11,7	-0,1	-7,0	-9,6	-7,6	0,0
12	101,0	77,2	50,6	27,9	11,2	-0,1	-6,9	-9,6	-7,9	-1,2
16	97,2	74,0	48,5	26,7	10,7	-0,1	-6,7	-9,5	-8,2	-2,1
20	94,2	71,6	46,8	25,8	10,3	-0,2	-6,6	-9,4	-8,4	-2,8
24	91,7	69,5	45,4	25,0	10,0	-0,2	-6,5	-9,4	-8,5	-3,4
40	85,0	64,0	41,7	22,9	9,2	-0,3	-6,3	-9,2	-8,9	-4,8
60	80,1	60,0	39,0	21,4	8,5	-0,4	-6,2	-9,0	-9,1	-5,9
80	77,1	57,5	37,2	20,5	8,1	-0,5	-6,1	-9,0	-9,2	-6,6
100	74,9	55,7	36,1	19,8	7,8	-0,5	-6,0	-8,9	-9,3	-7,0

Tabla 7.3. Valores de E_e para $e = -1,2$.

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	114,7	88,6	58,6	32,3	13,0	0,1	-7,2	-9,5	-6,6	2,2
1	112,1	86,5	57,2	31,6	12,7	0,1	-7,1	-9,5	-6,8	1,6
2	109,7	84,4	55,8	30,9	12,4	0,1	-7,0	-9,5	-7,0	1,0
4	105,6	81,1	53,5	29,7	12,0	0,0	-6,9	-9,4	-7,3	-0,1
6	102,2	78,3	51,7	28,7	11,6	0,0	-6,8	-9,4	-7,6	-0,9
8	99,4	76,1	50,2	27,8	11,3	0,0	-6,7	-9,4	-7,8	-1,5
12	95,1	72,5	47,8	26,5	10,7	-0,0	-6,6	-9,3	-8,1	-2,5
16	91,8	69,8	45,9	25,5	10,3	-0,1	-6,4	-9,2	-8,3	-3,3
20	89,2	67,7	44,4	24,7	10,0	-0,1	-6,4	-9,2	-8,5	-3,9
24	87,1	65,9	43,2	24,0	9,7	-0,1	-6,3	-9,2	-8,6	-4,4
40	81,3	61,1	39,9	22,1	8,9	-0,3	-6,1	-9,0	-9,0	-5,7
60	77,1	57,6	37,6	20,8	8,3	-0,4	-6,0	-8,9	-9,2	-6,6
80	74,4	55,4	36,0	19,9	7,9	-0,5	-5,9	-8,9	-9,3	-7,2
100	72,6	53,9	35,0	19,3	7,7	-0,5	-5,9	-8,9	-9,4	-7,6

Tabla 7.4. Valores de E_e para $e = -1,0$.

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	105,5	81,3	54,0	30,2	12,2	0,2	-6,8	-9,2	-7,1	-0,0
1	103,3	79,6	52,8	29,5	12,0	0,2	-6,7	-9,2	-7,3	-0,5
2	101,4	77,8	51,8	28,9	11,8	0,2	-6,7	-9,2	-7,4	-1,0
4	98,0	75,1	49,8	27,9	11,3	0,2	-6,5	-9,2	-7,7	-1,9
6	95,2	72,8	48,3	27,0	11,0	0,1	-6,5	-9,2	-7,9	-2,5
8	92,9	70,9	47,0	26,3	10,7	0,1	-6,4	-9,1	-8,1	-3,1
12	89,3	67,9	44,9	25,1	10,3	0,0	-6,3	-9,1	-8,3	-3,9
16	86,6	65,6	43,4	24,2	9,9	0,0	-6,2	-9,1	-8,5	-4,6
20	84,4	63,8	42,1	23,5	9,6	-0,0	-6,1	-9,0	-8,7	-5,1
24	82,6	62,3	41,1	22,9	9,4	-0,1	-6,1	-8,9	-8,8	-5,5
40	77,7	58,3	38,2	21,3	8,6	-0,2	-5,9	-8,8	-9,1	-6,5
60	74,1	55,3	36,1	20,1	8,1	-0,3	-5,8	-8,8	-8,3	-7,3
80	71,9	53,4	34,8	19,4	7,8	-0,4	-5,8	-8,8	-9,5	-7,8
100	70,2	52,0	33,9	18,8	7,5	-0,5	-5,8	-8,8	-9,6	-8,2

Tabla 7.5. Valores de E_e para $e = 0,0$.

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	64,3	47,9	32,5	19,2	8,5	0,6	-5,0	-8,7	-10,6	-11,4
1	64,0	47,8	32,4	19,1	8,5	0,5	-5,1	-8,6	-10,6	-11,4
2	64,0	47,7	32,3	19,0	8,4	0,5	-5,0	-8,7	-10,6	-11,4
4	63,7	47,3	32,0	18,8	8,3	0,4	-5,1	-8,6	-10,6	-11,4
6	63,4	47,1	31,8	18,7	8,2	0,4	-5,1	-8,7	-10,6	-11,4
8	63,1	46,9	31,6	18,5	8,1	0,4	-5,2	-8,7	-10,6	-11,4
12	62,6	46,5	31,3	18,3	8,0	0,3	-5,2	-8,7	-10,6	-11,4
16	62,3	46,1	31,0	18,0	7,8	0,2	-5,2	-8,7	-10,6	-11,4
20	61,9	45,8	30,7	17,9	7,7	0,1	-5,2	-8,7	-10,6	-11,4
24	61,6	45,5	30,5	17,7	7,6	0,1	-5,3	-8,7	-10,6	-11,4
40	60,7	44,7	29,8	17,2	7,3	-0,1	-5,3	-8,7	-10,6	-11,4
60	59,9	44,0	29,2	16,7	7,0	-0,3	-5,4	-8,8	-10,6	-11,4
80	59,4	43,6	28,8	16,5	6,8	-0,4	-5,4	-8,8	-10,6	-11,4
100	59,0	43,2	28,6	16,3	6,7	-0,4	-5,5	-8,8	-10,6	-11,4

Tabla 7.6. Valores de E_e para $e = 1,0$.

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	31,3	20,7	13,7	8,9	4,8	0,5	-4,5	-10,2	-16,3	-22,6
1	32,4	21,6	14,3	9,3	4,9	0,5	-4,5	-10,2	-16,1	-22,2
2	33,5	22,5	15,1	9,7	5,1	0,5	-4,6	-10,1	-15,9	-21,8
4	35,3	24,0	16,2	10,2	5,2	0,4	-4,8	-10,1	-15,6	-21,1
6	36,7	25,2	17,0	10,7	5,3	0,3	-4,9	-10,1	-15,3	-20,5
8	37,9	26,2	17,7	11,1	5,5	0,2	-4,9	-10,0	-15,1	-20,0
12	39,7	27,7	18,7	11,6	5,6	0,1	-5,1	-10,0	-14,7	-19,3
16	41,1	28,9	19,5	12,0	5,6	-0,0	-5,1	-10,0	-14,4	-18,7
20	42,2	29,7	20,1	12,3	5,7	-0,1	-5,2	-9,9	-14,2	-18,2
24	43,0	30,4	20,6	12,5	5,7	-0,1	-5,3	-9,9	-14,0	-17,8
40	45,3	32,3	21,8	13,1	5,8	-0,3	-5,5	-9,7	-13,5	-16,7
60	46,9	33,6	22,5	13,4	5,8	-0,5	-5,5	-9,7	-13,1	-16,0
80	47,9	34,3	23,0	13,6	5,8	-0,6	-5,6	-9,5	-12,8	-15,4
100	48,6	34,9	23,3	13,7	5,7	-0,6	-5,6	-9,5	-12,6	-14,1

8. CÁLCULO DE LAS CARGAS CRÍTICAS MEDIANTE LA NORMA LRFD DEL AISC

En la norma del American Institute of Steel Construction (ref. 10.4), el cálculo del momento crítico de pandeo lateral torsional de vigas está considerado en el caso en que las cargas están aplicadas a lo largo del eje baricéntrico.

En el régimen elástico, el momento crítico en barras de sección doble Te está dado por la fórmula (F1-13)

$$M_{cr} = C_b \frac{P}{L_b} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{PE}{L_b} \right)^2 I_y C_w} \quad (8.1)$$

donde J es la constante de torsión libre de la sección, L_b es la longitud libre sin arriostramientos y C_w es el momento de inercia sectorial y C_b es un coeficiente adimensional que se calcula con la expresión

$$C_b = \frac{12,5M_{max}}{2,5M_{max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad (8.2)$$

La expresión (8.1) puede escribirse en términos de los adimensionales definidos por las ecuaciones (4.7), resultando

$$(\mathbf{g}_K)_a = C_b \frac{\mathbf{P}}{1 - \mathbf{k}} \sqrt{1 + \frac{\mathbf{P}^2}{\mathbf{a}}} \quad (8.3)$$

donde el coeficiente C_b , calculado con la ecuación (8.2) y teniendo en cuenta el diagrama de momentos flexores representado en la figura 7.1, toma los valores

$$\begin{aligned} C_b &= \frac{5(1 - \mathbf{k})}{3 - \mathbf{k}} && \text{para } 0 < \mathbf{k} \leq \frac{1}{4} \\ C_b &= \frac{50(1 - \mathbf{k})}{33 - 22\mathbf{k}} && \text{para } \frac{1}{4} \leq \mathbf{k} \leq \frac{1}{2} \\ C_b &= \frac{50(1 - \mathbf{k})}{41 - 38\mathbf{k}} && \text{para } \frac{1}{2} \leq \mathbf{k} \leq \frac{3}{4} \\ C_b &= 1 && \text{para } \frac{3}{4} \leq \mathbf{k} < 1 \end{aligned}$$

En la ecuación (8.3), hemos llamado $(\mathbf{g}_K)_a$ al valor crítico del adimensional definido por la quinta ecuación (4.7), calculado mediante la norma americana.

Por cuanto en la norma americana, las cargas se suponen aplicadas en el eje baricéntrico de la viga, sólo podemos comparar $(\mathbf{g}_K)_a$ con los valores obtenidos en el presente trabajo para $\mathbf{e} = 0,0$ consignados en la tabla 6.5; Si tomamos a estos últimos como valores exactos, se pueden calcular en cada caso los errores relativos porcentuales

$$E_a = \frac{\mathbf{g}_K - (\mathbf{g}_K)_a}{(\mathbf{g}_K)_a} 100\%$$

que se consignan en la tabla 8.1.

Tabla 8.1. Valores de E_a para $\mathbf{e} = 0,0$.

α	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
0,1	11,4	7,7	7,0	1,6	-1,1	-0,0	-2,4	3,2	1,0	0,1
1	11,2	7,6	7,0	1,5	-1,1	-0,0	-2,4	3,2	1,0	0,1
2	11,2	7,5	6,9	1,4	-1,2	-0,1	-2,4	3,2	1,0	0,1
4	11,0	7,3	6,7	1,3	-1,3	-0,1	-2,4	3,2	1,0	0,1
6	10,8	7,1	6,5	1,2	-1,4	-0,2	-2,4	3,2	1,0	0,1
8	10,6	7,0	6,3	1,0	-1,4	-0,2	-2,5	3,2	1,0	0,1
12	10,3	6,7	6,1	0,8	-1,6	-0,3	-2,5	3,2	1,0	0,1
16	10,0	6,4	5,8	0,6	-1,7	-0,4	-2,5	3,2	1,0	0,1
20	9,8	6,2	5,6	0,4	-1,8	-0,4	-2,5	3,1	1,0	0,1
24	9,6	6,0	5,4	0,3	-1,9	-0,5	-2,6	3,1	1,0	0,1
40	8,9	5,4	4,9	-0,1	-2,2	-0,7	-2,7	3,1	1,0	0,1
60	8,4	4,9	4,4	-0,5	-2,5	-0,8	-2,7	3,1	1,0	0,1
80	8,1	4,5	4,1	-0,7	-2,7	-0,9	-2,8	3,1	1,0	0,1
100	7,8	4,3	3,9	-0,9	-2,8	-1,0	-2,8	3,0	1,0	0,1

9. CONCLUSIONES

Los valores críticos de las cargas que producen el pandeo lateral torsional en régimen elástico en el caso estudiado, pueden calcularse mediante las tablas 6.1 a 6.6. Los resultados muestran que es muy importante la influencia que tiene la altura del punto de aplicación de las cargas.

Asimismo, si se comparan los valores obtenidos en este caso con los obtenidos en referencia 10.9 para el problema análogo a éste, pero sin el arriostramiento, se observa el gran incremento que la presencia del arriostramiento produce en los valores de las cargas críticas.

La norma europea Eurocode 3 contiene una fórmula general para el cálculo de momentos flexores críticos en régimen elástico que permite tener en cuenta la altura de aplicación de las cargas, pero la norma no trae los valores de los coeficientes necesarios para realizar los cálculos correspondientes a este caso.

Con los valores de los coeficientes C_1 y C_2 propuestos en el presente trabajo, se obtiene una excelente solución de este problema de pandeo cuando las cargas están aplicadas en los cuartos de la luz, o sea para $k=0,5$. Los errores en este caso son inferiores a 0,6%. Si se aplica la fórmula con $0,5 \leq k \leq 0,7$, los errores relativos en cualquier caso tienen un valor absoluto menor que 10,2% (ver tablas 7.1 a 7.6).

La fórmula aproximada de la norma americana LRFD es aplicable cuando las cargas están aplicadas en el eje de la viga. En ese caso, da errores relativos de valor absoluto inferior a 3,2% cuando $0,3 \leq k \leq 0,9$. Para $0 \leq k < 0,3$ los errores son algo mayores, pero del lado de la seguridad (ver Tabla 8.1). No puede usarse cuando las cargas están aplicadas por encima del eje baricéntrico, porque los errores pueden ser importantes y del lado de la inseguridad.

10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 10.1. Timoshenko S. P. y Gere J. M., "Theory of Elastic Stability". Ed. McGraw-Hill, 1961.
- 10.2. Rezk H., "Teoría de segundo orden de las barras elásticas prismáticas de sección abierta y paredes delgadas". Ed. Fac. de Ing. de la Univ. de Buenos Aires, 1981.
- 10.3. Galambos T., "Structural Members and Frames". Ed. Prentice Hall, 1968.
- 10.4. American Institute of Steel Construction, "Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings", December 29, 1999.
- 10.5. Galambos T., "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures". John Wiley & Sons, 4th Ed., 1988.
- 10.6. Comité Européen de Normalisation, "Eurocode 3, Calcul des structures en acier et Document d'Application National. Partie 1: Règles générales et règles pour les bâtiments". Association Française de Normalisation, 1992.
- 10.7. Nethercot D. A. "Elastic Lateral Buckling of Beams", in Beams and Beam Columns-Stability in Strength (ed. R. Narayanan), Applied Science Publishers, Barking, Essex, England, 1983.
- 10.8. Nethercot D. A. y Rockey K. C., "A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams", Eng. J. Am. Inst. Steel Constr., Vol.9, No. 3, pp.96-107, 1972.
- 10.9. Rezk H. "Pandeo lateral de vigas I con dos cargas concentradas iguales", publicado en "Contribuciones Técnicas y Conferencias de las XVI Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural", pág. 210 a 231, editado por las Asociación de Ingenieros Estructurales, 1998.

11. RECONOCIMIENTO



Primer Seminario Internacional de Estructuras de Acero
First International Seminar of Steel Structures
I A C A 2002
Buenos Aires - Argentina

Los coeficientes C_1 y C_2 propuestos en este trabajo para ser empleados con la fórmula del Eurocode 3, fueron obtenidos con la colaboración del Ingeniero Eugenio García Aller, de la Universidad Politécnica de Madrid.