

## **TÍTULO:**

### **PANDEO LATERAL DE VIGAS I CON DOS CARGAS CONCENTRADAS IGUALES**

**AUTOR: Horacio Rezk (1)**

## **RESUMEN:**

Se estudia el problema de pandeo lateral de las vigas elásticas de sección I, simplemente apoyadas bajo la acción de dos cargas concentradas iguales dispuestas simétricamente respecto del plano de la sección central de la viga.

Se resuelve el problema analíticamente mediante las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría de segundo orden de las barras elásticas de paredes delgadas, obteniéndose las cargas críticas en forma adimensional, en función de variables adimensionales que representan las propiedades de la viga y la posición de las cargas.

Se consideran cargas aplicadas en el centro del ala inferior, en el baricentro de la sección, en el centro del ala superior y en puntos por encima del ala superior. Las secciones donde se consideran aplicadas las cargas son las que resultan al dividir cada mitad de la viga en diez partes iguales. Los resultados se presentan mediante tablas.

Con fines comparativos, se calculan las cargas críticas aplicando las fórmulas aproximadas indicadas en el Eurocode 3 y en el manual al que se hace referencia en la norma LRFD del American Institute of Steel Construction; en cada caso se determinan los errores resultantes de las mismas.

(1) Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires y del Instituto de Enseñanza Superior del Ejército

## 1.-INTRODUCCIÓN.

El problema de pandeo lateral de vigas elásticas está resuelto en los casos particulares más sencillos y sus resultados figuran en la bibliografía en forma de tablas o fórmulas que mediante variables adimensionales permiten el cálculo de las cargas críticas.

Estos resultados están incorporados en las normas de estructuras metálicas o en manuales especializados.

En el presente trabajo se estudia el problema de una viga I cargada con dos fuerzas concentradas iguales simétricamente dispuestas respecto de la sección central de la viga.

## 2.- EL PROBLEMA CONSIDERADO.

Se supone una viga elástica prismática de sección I simplemente apoyada, según se muestra en la figura 2.1.

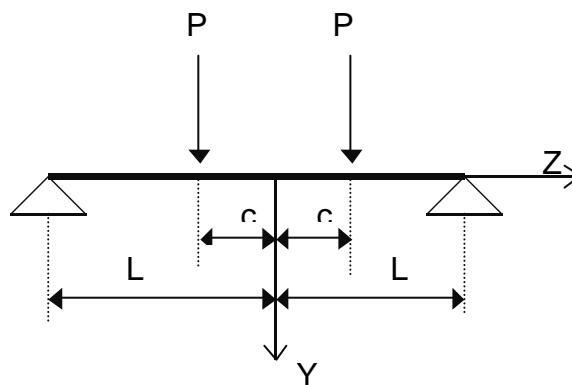


Fig. 2.1

Para estudiar el problema usamos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de modo que en la configuración inicial de la barra, el eje  $Z$  coincide con el eje baricéntrico de la barra y los ejes  $X$  e  $Y$  son en cada sección ejes principales de inercia. También usamos un sistema de coordenadas acompañantes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que en la configuración inicial de la barra coinciden con las cartesianas y que permanecen constantes para cada punto durante la deformación de la misma.

Suponemos que la barra está cargada con dos fuerzas  $P$  que tienen la dirección del eje  $Y$  del sistema de coordenadas cartesianas y están aplicadas en secciones transversales a una distancia  $c$  de la sección central de la viga. El punto de aplicación de cada fuerza en su correspondiente sección transversal es el punto  $A$ , cuyas coordenadas acompañantes son  $0, y_A$  (ver figura 2.2).

En los tramos  $0 < z < c$  y  $c < z < L$ , no hay fuerzas exteriores distribuidas.

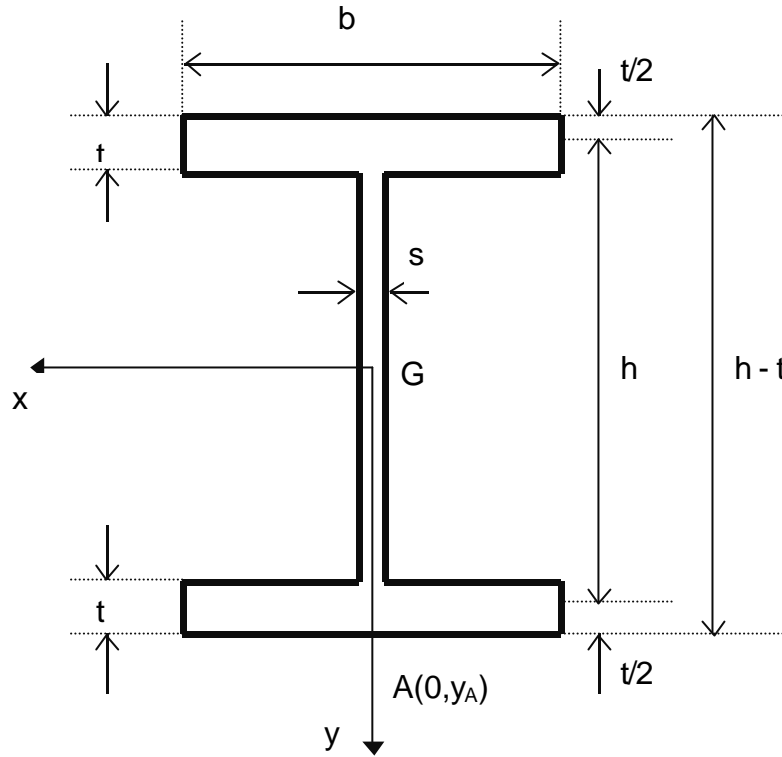


Fig. 2.2

### 3.- LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO Y LOS ESFUERZOS DE LA BARRA.

Como la estructura y las cargas son simétricas respecto del plano  $Z = 0$  y el modo de pandeo lateral es también simétrico respecto de dicho plano, estudiamos la mitad de la viga cuyas coordenadas  $z$  son positivas.

Dado que en la sección  $z = c$  está aplicada una fuerza concentrada, a los efectos de resolver el problema, consideramos separadamente el intervalo  $0 < z < c$ , que llamamos tramo 1 y el intervalo  $c < z < L$ , que llamamos tramo 2.

Teniendo en cuenta que las fuerzas exteriores distribuidas son nulas, las ecuaciones diferenciales de equilibrio interno para el tramo 1 son (ver art. 5 de referencia 10.2)

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_{x_1}}{dz} &= 0 & -Q_{y_1} + \left( \frac{dv_1}{dz} - x_c \frac{dQ_1}{dz} \right) N_{z_1} + \frac{dM_{x_1}}{dz} &= 0 \\
 \frac{dQ_{y_1}}{dz} &= 0 & -Q_{x_1} + \left( \frac{dv_1}{dz} - x_c \frac{dQ_1}{dz} \right) N_{z_1} + \frac{dM_{y_1}}{dz} &= 0 \\
 \frac{dN_{z_1}}{dz} &= 0 & -\frac{dv_1}{dz} Q_{x_1} + \frac{du_1}{dz} Q_{y_1} + \frac{dM_{z_1}}{dz} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

En estas ecuaciones  $Q_{x_1}$ ,  $Q_{y_1}$ ,  $N_{z_1}$ ,  $M_{x_1}$ ,  $M_{y_1}$  y  $M_{z_1}$  son los esfuerzos de la barra en la configuración deformada referidos a las coordenadas cartesianas fijas  $X, Y, Z$ ;  $u_1$  y  $v_1$  son las componentes de los desplazamientos de los centros de corte de las secciones en las direcciones de los ejes  $X$  e  $Y$ , respectivamente;  $\Theta_1$  es la rotación de las secciones en su propio plano;  $x_c$  e  $y_c$  son las coordenadas del centro de corte.

Si integramos las ecuaciones (3.1), y tenemos en cuenta que las coordenadas del centro de corte son nulas, se obtiene

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= Q_{x_1}^* & M_{x_1} &= Q_{y_1}^* z - N_{z_1}^* v_1 + M_{x_1}^* \\ Q_{y_1} &= Q_{y_1}^* & M_{y_1} &= -Q_{x_1}^* z - N_{z_1}^* u_1 + M_{y_1}^* \\ N_{z_1} &= N_{z_1}^* & M_{z_1} &= Q_{x_1}^* v_1 - Q_{y_1}^* u_1 + M_{z_1}^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

En forma análoga, se obtiene para el tramo 2

$$\begin{aligned} Q_{x_2} &= Q_{x_2}^* & M_{x_2} &= Q_{y_2}^* z - N_{z_2}^* v_2 + M_{x_2}^* \\ Q_{y_2} &= Q_{y_2}^* & M_{y_2} &= -Q_{x_2}^* z + N_{z_2}^* u_2 + M_{y_2}^* \\ N_{z_2} &= N_{z_2}^* & M_{z_2} &= Q_{x_2}^* v_2 - Q_{y_2}^* u_2 + M_{z_2}^* \end{aligned} \quad (3.3)$$

En las ecuaciones (3.2) y (3.3), las cantidades señaladas con un asterisco (\*), forman un conjunto de doce constantes de integración.

Para determinar estas doce constantes se necesitan doce condiciones.

Si se considera el equilibrio en la configuración deformada de un segmento de barra comprendido entre dos secciones infinitamente próximas de coordenadas,  $z = c - d$  y  $z = c + d$  con  $d \rightarrow 0$ , podemos plantear seis ecuaciones de equilibrio consistentes en tres ecuaciones de nulidad de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes  $X, Y, Z$  y tres ecuaciones de nulidad de la suma de los momentos respecto de tres ejes que pasan por el punto  $A$  donde está aplicada la fuerza  $P$  y paralelos a los ejes  $X, Y, Z$  respectivamente. Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned} -Q_{x_1}^* + Q_{x_2}^* &= 0 & -Q_{y_1}^* + Q_{y_2}^* + P &= 0 & -N_{z_1}^* + N_{z_2}^* &= 0 \\ Q_{y_1}^* (v'_c y_A - c) + N_{z_1}^* (y_A + v_c) - M_{x_1}^* + Q_{y_2}^* (-v'_c y_A + c) - N_{z_2}^* (y_A + v_c) + M_{x_2}^* &= 0 \\ Q_{x_1}^* (v'_c y_A + c) + N_{z_1}^* (y_A \Theta_c - u_c) - M_{y_1}^* + Q_{x_2}^* (v'_c y_A - c) + N_{z_2}^* (-y_A \Theta_c + u_c) + M_{y_2}^* &= 0 \\ -Q_{x_1}^* (y_A + v_c) + Q_{y_1}^* (-y_A \Theta_c + u_c) - M_{z_1}^* + Q_{x_2}^* (y_A + v_c) + Q_{y_2}^* (y_A \Theta_c - u_c) + M_{z_2}^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

En estas ecuaciones se usa la notación

$$\begin{aligned} v_C &= (v_1)_{z=c} = (v_2)_{z=c} & u_C &= (u_1)_{z=c} = (u_2)_{z=c} \\ v'_C &= \left( \frac{dv_1}{dz} \right)_{z=c} = \left( \frac{dv_2}{dz} \right)_{z=c} & \Theta_C &= (\Theta_1)_{z=c} = (\Theta_2)_{z=c} \end{aligned}$$

que tiene en cuenta las condiciones de continuidad en la sección  $z = c$ .

Además, por razones de simetría en  $z = 0$  se tiene

$$(Q_{X_1})_{z=0} = 0 \quad (Q_{Y_1})_{z=0} = 0 \quad (M_{Z_1})_{z=0} = 0 \quad (3.5)$$

y las condiciones de borde en  $z = L$  son

$$(M_{X_2})_{z=L} = 0 \quad (M_{Y_2})_{z=L} = 0 \quad (N_{Z_2})_{z=L} = 0 \quad (3.6)$$

Si introducimos la primera, tercera y sexta ecuación (3.2) en las ecuaciones (3.5), se obtiene

$$Q_{X_1}^* = 0 \quad Q_{Y_2}^* = 0 \quad Q_{X_1}^*(v_1)_{z=0} - Q_{Y_1}^*(u_1)_{z=0} + M_{Z_1}^* = 0 \quad (3.7)$$

y si introducimos la segunda, cuarta y quinta ecuación (3.3) en las ecuaciones (3.6), y tenemos en cuenta la nulidad de los desplazamientos  $u_2$  y  $v_2$  en el extremo articulado, resulta

$$Q_{Y_2}^* L + M_{X_2}^* = 0 \quad -Q_{X_2}^* L + M_{Y_2}^* = 0 \quad N_{Z_2}^* = 0 \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.4), (3.7) y (3.8) forman un sistema de 12 ecuaciones lineales algebraicas en las constantes  $Q_{X_1}^*$ ,  $Q_{Y_1}^*$ ,  $N_{Z_1}^*$ ,  $M_{X_1}^*$ ,  $M_{Y_1}^*$ ,  $M_{Z_1}^*$ ,  $Q_{X_2}^*$ ,  $Q_{Y_2}^*$ ,  $N_{Z_2}^*$ ,  $M_{X_2}^*$ ,  $M_{Y_2}^*$  y  $M_{Z_2}^*$ .

Después de resolver el sistema y reemplazar los valores de las constantes en las ecuaciones (3.2) y (3.3), se obtienen los esfuerzos para el tramo 1

$$\begin{aligned} Q_{X_1} &= 0 & M_{X_1} &= P(L - c + v'_C y_A) \\ Q_{Y_1} &= 0 & M_{Y_1} &= 0 \\ N_{Z_1} &= 0 & M_{Z_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

y para el tramo 2

$$\begin{aligned} Q_{X_2} &= 0 & M_{X_2} &= P(L - z) \\ Q_{Y_2} &= -P & M_{Y_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$N_{z_2} = 0$$

$$M_{z_2} = P(u_2 + y_A \Theta_C - u_C)$$

#### 4.- LAS RELACIONES ENTRE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones indicadas en referencia 8.2 como ecuaciones (6.11) son

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + (y_c Q_x - M_z) \frac{du}{dz} + y_c Q_y \frac{dv}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) y_c \frac{d\Theta}{dz} + M_y \Theta + M_x &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + (x_c Q_y + M_z) \frac{dv}{dz} + x_c Q_x \frac{du}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) x_c \frac{d\Theta}{dz} + M_x \Theta - M_y &= 0 \\ EI_w \frac{d^3}{dz^3} + (-y_c N_z + M_x) \frac{du}{dz} + (x_c N_z + M_y) \frac{dv}{dz} - (GI_T + i_c^2 N_z + r_x M_x - r_y M_y) \frac{d\Theta}{dz} + M_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

En estas ecuaciones,  $I_x$ ,  $I_y$  son los momentos principales de inercia baricéntricos de la sección;  $I_w$  es su momento de inercia sectorial;  $I_T$  es la constante de torsión libre;  $i_c$  es su radio de giro polar respecto del centro de corte; y  $r_x$ ,  $r_y$  son dos constantes geométricas de la sección definidas por las expresiones

$$r_x = \frac{\iint_A y(x^2 + y^2) dx dy}{I_x} - 2y_c \quad r_y = \frac{\iint_A x(x^2 + y^2) dx dy}{I_y} - 2x_c$$

Si en las ecuaciones (4.1) introducimos los esfuerzos expresados por las ecuaciones (3.9) y se tienen en cuenta las condiciones de simetría del perfil I ( $r_x = r_y = x_c = y_c = 0$ ), se tiene para el tramo 1,

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v_1}{dz^2} + P(L - c + v'_c y_A) &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u_1}{dz^2} + P(L - c) \Theta_1 &= 0 \\ EI_w \frac{d^3 \Theta_1}{dz^3} + P(L - c) \frac{du_1}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_1}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Después de derivar la última ecuación (4.2) una vez respecto de  $z$ , resulta

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_1}{dz^4} + P(L - c) \frac{d^2 u_1}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} = 0 \quad (4.3)$$

Si procedemos en forma análoga para el tramo 2, obtenemos

$$EI_x \frac{d^2 v_2}{dz^2} + P(L - z) = 0$$

$$EI_y \frac{d^2 u_2}{dz^2} + P(L - z)\Theta_2 = 0 \quad (4.4)$$

$$EI_w \frac{d^3 \Theta_2}{dz^3} + P(L - z) \frac{du_2}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_2}{dz} + Pu_2 + P(y_A \Theta_C - u_C) = 0$$

Después de derivar la última ecuación (4.4) una vez respecto de  $z$ , se tiene

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_2}{dz^4} + P(L - z) \frac{d^2 u_2}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_2}{dz^2} = 0 \quad (4.5)$$

La primera ecuación (4.2) y la primera ecuación (4.4), permiten obtener la deflexión de la viga en su plano de simetría  $Y, Z$ . Para analizar el problema de pandeo lateral debemos considerar el sistema de ecuaciones homogéneas formado por la segunda y la tercera ecuación en (4.2) y en (4.4).

De la segunda ecuación (4.2), obtenemos

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = -\frac{P(L - c)}{EI_y} \Theta_1$$

que reemplazada en la ecuación (4.3) nos da

$$\frac{d^4 \Theta_1}{dz^4} - \frac{GI_T}{EI_w} \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} - \frac{P^2(L - c)^2}{EI_w EI_y} \Theta_1 = 0 \quad (4.6)$$

Si definimos los adimensionales

$$\mathbf{z} = \frac{z}{L} \quad \mathbf{k} = \frac{c}{L} \quad \mathbf{a} = \frac{GI_T L^2}{EI_w} \quad \mathbf{b} = \sqrt{\frac{EI_y}{GI_T}} \quad \mathbf{g} = \frac{PL^2}{\sqrt{EI_y GI_T}} \quad (4.7)$$

la ecuación (4.6) puede escribirse en la forma

$$\frac{d^4 \Theta_1}{d\mathbf{z}^4} - \mathbf{a} \frac{d^2 \Theta_1}{d\mathbf{z}^2} - \mathbf{g}^2 \mathbf{a}(1 - \mathbf{k})^2 \Theta_1 = 0 \quad (4.8)$$

Si procedemos en forma análoga con la segunda ecuación (4.4) y la ecuación (4.5), se obtiene

$$\frac{d^4 \Theta_2}{dz^4} - \frac{GI_T}{EI_w} \frac{d^2 \Theta_2}{dz^2} - \frac{P^2(L - z)^2}{EI_w EI_y} \Theta_2 = 0 \quad (4.9)$$

y si introducimos los adimensionales definidos por las ecuaciones (4.7), resulta

$$\frac{d^4\Theta_2}{d\mathbf{z}^4} - \mathbf{a}\frac{d^2\Theta_2}{d\mathbf{z}^2} - \mathbf{g}^2\mathbf{a}(1-\mathbf{z})^2\Theta_2 = 0 \quad (4.10)$$

Las ecuaciones diferenciales (4.8) y (4.10) deben satisfacer las siguientes condiciones de borde y continuidad

$$\left(\frac{d\Theta_1}{d\mathbf{z}}\right)_{\mathbf{z}=0} = 0 \quad \left(\frac{d^3\Theta_1}{d\mathbf{z}^3}\right)_{\mathbf{z}=0} = 0 \quad (\Theta_2)_{\mathbf{z}=1} = 0 \quad \left(\frac{d^2\Theta_2}{d\mathbf{z}^2}\right)_{\mathbf{z}=1} = 0 \quad (4.11)$$

$$(\Theta_1)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} = (\Theta_2)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} \quad \left(\frac{d\Theta_1}{d\mathbf{z}}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} = \left(\frac{d\Theta_2}{d\mathbf{z}}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} \quad \left(\frac{d^2\Theta_1}{d\mathbf{z}^2}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} = \left(\frac{d^2\Theta_2}{d\mathbf{z}^2}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}}$$

Asimismo, deben cumplir una condición adicional que obtenemos restando miembro a miembro la última ecuación (4.2) y la última ecuación (4.4). Si luego ponemos  $z = c$  y tenemos en cuenta que

$$\left(\frac{du_1}{dz}\right)_{z=c} = \left(\frac{du_2}{dz}\right)_{z=c} \quad \left(\frac{d\Theta_1}{dz}\right)_{z=c} = \left(\frac{d\Theta_2}{dz}\right)_{z=c}$$

resulta

$$EI_w \left(\frac{d^3\Theta_1}{dz^3}\right)_{z=c} - EI_w \left(\frac{d^3\Theta_2}{dz^3}\right)_{z=c} + Py_A \Theta_c = 0$$

Si en esta ecuación introducimos los adimensionales definidos por las ecuaciones (4.7), se obtiene

$$\left(\frac{d^3\Theta_2}{d\mathbf{z}^3}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} - \left(\frac{d^3\Theta_1}{d\mathbf{z}^3}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} + \mathbf{gab} \frac{y_A}{L} \Theta_c = 0 \quad 4.12)$$

En el caso de perfiles I, como el indicado en la figura 2.2, se tiene

$$I_y = \frac{tb^3}{6} \quad I_T = \frac{2bt^3 + hs^3}{3} \quad I_w = \frac{b^3h^2t}{24} \quad (4.13)$$

Si introducimos estas expresiones en la tercera y cuarta ecuación (4.7), se obtiene

$$\mathbf{a} = \frac{16t^2L^2}{b^2h^2} \frac{G}{E} \left(1 + \frac{hs^3}{2bt^3}\right) \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{b}{t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{hs^3}{2bt^3}}} \quad (4.14)$$

y resulta entonces



$$ab \frac{y_A}{L} = \sqrt{ae} \quad (4.15)$$

donde  $e$  es un adimensional definido por la expresión

$$e = \frac{2y_A}{h} \quad (4.16)$$

Si introducimos la ecuación (4.15) en la ecuación (4.12), ésta queda en la forma

$$\left( \frac{d^3 \Theta_2}{dz^3} \right)_{z=k} - \left( \frac{d^3 \Theta_1}{dz^3} \right)_{z=k} + g\sqrt{ae} \Theta_c = 0 \quad (4.17)$$

La ecuación (4.17) y las siete ecuaciones (4.11), son las condiciones que deben satisfacer las ecuaciones diferenciales (4.8) y (4.10).

## 5.- LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL PROBLEMA DE PANDEO LATERAL CONSIDERADO.

La solución general de la ecuación diferencial (4.8) correspondiente al tramo 1 (intervalo  $0 < z < k$ ) es

$$\Theta_1 = A_1 \sin mz + A_2 \cos mz + A_3 \sinh nz + A_4 \cosh nz \quad (5.1)$$

donde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  son cuatro constantes arbitrarias y  $m$  y  $n$  son dos adimensionales definidos por las expresiones

$$m = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + g^2 a(1-k)^2} - \frac{a}{2}} \quad n = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + g^2 a(1-k)^2} + \frac{a}{2}} \quad (5.2)$$

Si planteamos las dos primeras condiciones de la primera fila de ecuaciones (4.11), se obtiene  $A_1 = A_3 = 0$  y la ecuación (5.1) queda

$$\Theta_1 = A_2 \cos mz + A_4 \cosh nz \quad (5.3)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (4.10) conviene definir una nueva variable adimensional

$$x = 1 - z \quad (5.4)$$

con lo que la ecuación diferencial (4.10) queda en la forma

$$\frac{d^4 \Theta_2}{dx^4} - a \frac{d^2 \Theta_2}{dx^2} - g^2 ax^2 \Theta_2 = 0 \quad (5.5)$$

Proponemos como solución de esta ecuación una serie de potencias de la forma

$$\Theta_2 = \mathbf{x}^m (a_0 + a_1 \mathbf{x} + a_2 \mathbf{x}^2 + a_3 \mathbf{x}^3 + \dots) \quad (5.6)$$

donde  $m$  es una constante.

Si introducimos la ecuación (5.6) en la ecuación diferencial (5.5), se obtiene una serie de potencias de  $\mathbf{x}$  donde la menor potencia es  $\mathbf{x}^4$ . Si anulamos el coeficiente de esa potencia en la serie, se obtiene

$$a_0 m(m-1)(m-2)(m-3) = 0 \quad (5.7)$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$m = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad (5.8)$$

y adoptamos arbitrariamente  $a_0 = 1$ .

Si anulamos todos los demás coeficientes de la serie de potencias resultante, se obtienen los coeficientes  $a_{j,m}$  de cuatro series de potencias de la forma (5.6) que son solución de la ecuación diferencial y que se corresponden con los valores de  $m$  consignados en la ecuación (5.8).

La solución general de la ecuación diferencial (5.5) puede entonces expresarse como la suma de cuatro series multiplicadas por sendas constantes arbitrarias, o sea

$$\Theta_2 = C_0 f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 \quad (5.9)$$

donde  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son cuatro constantes y las series son

$$f_m = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} a_{j,m} (1-\mathbf{z})^{m+j} \quad (5.10)$$

con  $m = 0, 1, 2, 3$ .

Los coeficientes de las series en la expresión (5.10) son

$$\begin{aligned} a_{0,m} &= 1 & a_{2,m} &= \frac{\mathbf{a}}{(m+2)(m+1)} a_{0,m} & a_{4,m} &= \frac{\mathbf{a}}{(m+4)(m+3)} a_{2,m} \\ a_{j,m} &= \frac{\mathbf{a}}{(m+j)(m+j-1)} a_{j-2,m} + \frac{\mathbf{g}^2 \mathbf{a}}{(m+j)(m+j-1)(m+j-2)(m+j-3)} a_{j-6,m} \end{aligned} \quad (5.11)$$

para  $a_j, m$ .

En las expresiones (5.11), se toma los valores (5.8).

Las derivadas primera, segunda y tercera de las series (5.10) son

$$\begin{aligned} f'_m &= \frac{df_m}{dz} = - \sum_{j=0,2,4}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(1-z)^{m+j-1} \\ f''_m &= \frac{d^2 f_m}{dz^2} = \sum_{j=0,2,4}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(m+j-1)(1-z)^{m+j-2} \\ f'''_m &= \frac{d^3 f_m}{dz^3} = - \sum_{j=0,2,4}^{\infty} a_{j,m} (m+j)(m+j-1)(m+j-2)(1-z)^{m+j-3} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Si introducimos la solución (5.9) en las dos últimas ecuaciones de la primera fila de condiciones (4.11), se obtiene

$$C_0 = 0 \quad C_2 = 0$$

con lo que la ecuación (5.9) se reduce a

$$\Theta_2 = C_1 f_1 + C_3 f_3 \quad (5.13)$$

Si se plantean las tres condiciones de la segunda fila de ecuaciones (4.11) y la condición (4.17), mediante las expresiones (5.3) y (5.13), se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales algebraicas homogéneas en  $A_2, A_4, C_1$  y  $C_3$ . La condición para que este sistema tenga soluciones distintas de la trivial es que se anule el determinante de la matriz de los coeficientes, de donde resulta la ecuación

$$\begin{vmatrix} -\cos nk & -ch nk & f_1(k) & f_3(k) \\ m \sin nk & -nh nk & f_1'(k) & f_3'(k) \\ m^2 \cos nk & -n^2 ch nk & f_1''(k) & f_3''(k) \\ eg\sqrt{a} \cos nk - m^3 \sin nk & eg\sqrt{a} ch nk - n^3 sh nk & f_1'''(k) & f_3'''(k) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

Los elementos de la tercera y cuarta columna del determinante de la ecuación (5.14) se calculan con las expresiones (5.10) y (5.12), poniendo en ellas  $z=k$  y sucesivamente  $m=1$  y  $m=3$ .

La ecuación (5.14) es una función de la forma

$$F(a, k, e, g) = 0 \quad (5.15)$$

donde el adimensional  $a$  depende de las propiedades geométricas y mecánicas de la viga,  $k$  define la posición de las cargas en la longitud de la viga,  $e$  caracteriza a la ubica-

ción del punto de aplicación de las cargas en el plano de la sección y  $\mathbf{g}$  es un adimensional que representa a la magnitud de las cargas con relación a propiedades de la viga. Fijados  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{e}$  se obtiene  $\mathbf{g}_k$  como la menor raíz real positiva de la función (5.15), lo que permite calcular la carga crítica en régimen elástico mediante la expresión

$$P_k = \mathbf{g}_k \frac{\sqrt{EI_y GI_T}}{L^2} \quad (5.16)$$

## 6.- LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

Se realizaron los cálculos de  $\mathbf{g}_k$  tomando para  $\mathbf{a}$  valores en el intervalo  $0,1 \leq \mathbf{a} \leq 100$  que coinciden con los considerados por Timoshenko en el problema de pandeo lateral de una viga de sección I bajo la acción de una fuerza concentrada en el centro (tabla 6-5 de referencia 10.1).

Los valores de  $\mathbf{k}$  se tomaron entre 0,0 y 0,9 variando en intervalos de 0,1.

Los valores considerados para  $\mathbf{e}$  son 1,0 (cargas aplicadas en el centro del ala inferior), 0,0 (cargas aplicadas en el baricentro), -1,0 (cargas aplicadas en centro del ala superior) y valores -1,2, -1,4 y -1,6 que corresponden a posiciones de las cargas por encima del ala superior.

Para realizar los cálculos se desarrolló un programa de computación en lenguaje Fortran en el que se usó doble precisión. Las series fueron evaluadas mediante la suma de sus cien primeros términos ( $j = 0, 2, \dots, 200$ ), después de comprobar que los resultados no experimentaban cambio con cantidades de términos menores que la adoptada.

Los resultados obtenidos se consignan en las tablas 6.1 a 6.6.

Se puede comprobar para los casos en que  $\mathbf{k} = 0$  (una sola carga concentrada en el centro de la viga) y  $\mathbf{e} = 1,0, 0,0$  y  $-1,0$ , que hay coincidencia con los resultados consignados por Timoshenko en la referencia ya citada.

Tabla 6.1

Valores de  $g_k$  para  $e = 1,0$

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	18.23	18.51	19.26	20.41	22.06	24.48	28.23	34.66	47.76	87.44
1	6.264	6.364	6.625	7.038	7.640	8.528	9.911	12.28	17.11	31.71
2	4.780	4.856	5.060	5.386	5.865	6.577	7.689	9.595	13.47	25.20
4	3.812	3.874	4.040	4.312	4.716	5.321	6.268	7.893	11.20	21.18
6	3.418	3.474	3.626	3.876	4.252	4.817	5.703	7.222	10.31	19.64
8	3.198	3.250	3.394	3.633	3.993	4.537	5.390	6.854	9.828	18.81
12	2.951	3.000	3.136	3.362	3.707	4.228	5.048	6.454	9.309	17.93
16	2.814	2.860	2.991	3.211	3.548	4.058	4.860	6.236	9.030	17.47
20	2.724	2.769	2.897	3.113	3.445	3.948	4.740	6.097	8.854	17.18
24	2.660	2.704	2.830	3.044	3.372	3.870	4.655	6.001	8.732	16.98
40	2.516	2.559	2.681	2.889	3.211	3.700	4.471	5.791	8.470	16.56
60	2.432	2.473	2.593	2.799	3.118	3.602	4.365	5.673	8.325	16.33
80	2.383	2.425	2.544	2.749	3.066	3.548	4.307	5.607	8.246	16.21
100	2.352	2.392	2.511	2.715	3.031	3.512	4.269	5.565	8.196	16.14

Tabla 6.2

Valores de  $g_k$  para  $e = 0,0$

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	10.86	11.05	11.63	12.62	14.18	16.55	20.30	26.76	39.90	79.62
1	3.988	4.059	4.271	4.639	5.209	6.082	7.462	9.835	14.66	29.26
2	3.199	3.257	3.427	3.722	4.181	4.881	5.989	7.893	11.77	23.48
4	2.720	2.769	2.914	3.166	3.556	4.152	5.095	6.716	10.01	19.98
6	2.539	2.585	2.721	2.956	3.322	3.879	4.760	6.274	9.354	18.67
8	2.443	2.488	2.619	2.846	3.198	3.735	4.583	6.041	9.007	17.97
12	2.343	2.386	2.512	2.730	3.069	3.585	4.399	5.799	8.646	17.25
16	2.291	2.333	2.456	2.671	3.002	3.507	4.304	5.674	8.460	16.88
20	2.259	2.300	2.422	2.634	2.961	3.459	4.246	5.597	8.346	16.65
24	2.237	2.278	2.399	2.609	2.933	3.427	4.207	5.546	8.269	16.50
40	2.191	2.232	2.351	2.558	2.877	3.362	4.127	5.441	8.114	16.19
60	2.168	2.208	2.327	2.532	2.848	3.329	4.087	5.388	8.035	16.03
80	2.155	2.196	2.314	2.518	2.833	3.312	4.066	5.362	7.995	15.95
100	2.148	2.188	2.307	2.510	2.824	3.302	4.054	5.346	7.971	15.91

Tabla 6.3

Valores de  $g_k$  para  $e = -1,0$

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	6.424	6.570	7.011	7.795	9.051	11.04	14.33	20.25	32.81	72.04
1	2.523	2.580	2.750	3.051	3.530	4.283	5.516	7.722	12.38	26.83
2	2.128	2.176	2.318	2.568	2.961	3.578	4.583	6.371	10.13	21.75
4	1.929	1.972	2.099	2.320	2.666	3.204	4.074	5.613	8.830	18.74
6	1.876	1.918	2.040	2.251	2.581	3.091	3.913	5.361	8.377	17.65
8	1.857	1.899	2.019	2.226	2.547	3.044	3.841	5.242	8.153	17.09
12	1.851	1.892	2.011	2.214	2.528	3.012	3.785	5.138	7.940	16.52
16	1.857	1.898	2.016	2.218	2.529	3.006	3.768	5.097	7.844	16.24
20	1.865	1.906	2.024	2.225	2.535	3.008	3.764	5.079	7.793	16.08
24	1.874	1.915	2.032	2.233	2.542	3.014	3.765	5.071	7.763	15.98
40	1.902	1.944	2.061	2.262	2.570	3.038	3.782	5.071	7.719	15.78
60	1.927	1.969	2.087	2.287	2.595	3.063	3.804	5.086	7.712	15.70
80	1.945	1.986	2.105	2.305	2.613	3.081	3.821	5.100	7.716	15.66
100	1.958	2.000	2.118	2.319	2.627	3.095	3.835	5.112	7.722	15.65

Tabla 6.4

Valores de  $g_k$  para  $e = -1,2$

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	5.846	5.984	6.400	7.140	8.331	10.23	13.40	19.16	31.54	70.57
1	2.319	2.373	2.536	2.822	3.280	4.004	5.199	7.356	11.95	26.36
2	1.972	2.018	2.154	2.394	2.773	3.369	4.347	6.100	9.819	21.41
4	1.807	1.849	1.972	2.185	2.521	3.044	3.895	5.410	8.600	18.49
6	1.769	1.810	1.929	2.135	2.456	2.954	3.760	5.188	8.183	17.44
8	1.761	1.802	1.919	2.121	2.436	2.922	3.705	5.089	7.982	16.90
12	1.768	1.808	1.925	2.124	2.433	2.908	3.670	5.009	7.797	16.37
16	1.782	1.822	1.939	2.138	2.444	2.914	3.665	4.983	7.718	16.11
20	1.796	1.837	1.953	2.152	2.457	2.924	3.671	4.975	7.678	15.96
24	1.809	1.850	1.967	2.165	2.470	2.936	3.679	4.975	7.657	15.87
40	1.849	1.891	2.008	2.207	2.512	2.976	3.714	4.996	7.636	15.70
60	1.882	1.924	2.042	2.241	2.547	3.011	3.748	5.024	7.644	15.63
80	1.905	1.947	2.065	2.265	2.571	3.036	3.772	5.046	7.657	15.60
100	1.922	1.964	2.082	2.282	2.589	3.054	3.791	5.063	7.670	15.59

Tabla 6.5

Valores de  $g_k$  para  $e = -1,4$

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	5.345	5.475	5.866	6.565	7.693	9.505	12.55	18.14	30.31	69.13
1	2.139	2.190	2.345	2.618	3.055	3.750	4.906	7.010	11.54	25.89
2	1.832	1.876	2.006	2.236	2.600	3.175	4.125	5.842	9.516	21.07
4	1.695	1.735	1.855	2.061	2.386	2.894	3.725	5.214	8.374	18.24
6	1.670	1.710	1.827	2.027	2.339	2.824	3.614	5.021	7.992	17.23
8	1.671	1.711	1.826	2.023	2.330	2.805	3.574	4.939	7.812	16.72
12	1.689	1.729	1.844	2.039	2.342	2.807	3.557	4.881	7.653	16.22
16	1.710	1.750	1.865	2.061	2.362	2.824	3.565	4.869	7.590	15.98
20	1.729	1.770	1.886	2.081	2.382	2.842	3.579	4.872	7.563	15.84
24	1.746	1.787	1.904	2.099	2.400	2.860	3.594	4.880	7.551	15.75
40	1.798	1.839	1.956	2.154	2.455	2.915	3.647	4.920	7.552	15.61
60	1.839	1.880	1.998	2.196	2.499	2.960	3.692	4.961	7.575	15.56
80	1.866	1.908	2.026	2.225	2.529	2.991	3.723	4.992	7.597	15.54
100	1.887	1.929	2.047	2.246	2.551	3.014	3.747	5.015	7.616	15.54

Tabla 6.6

Valores de  $g_k$  para  $e = -1,6$

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	4.910	5.032	5.400	6.059	7.127	8.853	11.77	17.19	29.13	67.70
1	1.979	2.028	2.175	2.435	2.852	3.518	4.634	6.683	11.15	25.42
2	1.706	1.748	1.873	2.093	2.442	2.997	3.918	5.595	9.222	20.73
4	1.592	1.632	1.747	1.947	2.261	2.754	3.563	5.025	8.152	19.99
6	1.579	1.618	1.731	1.926	2.229	2.702	3.474	4.858	7.803	17.02
8	1.587	1.626	1.738	1.931	2.230	2.694	3.448	4.793	7.643	16.53
12	1.614	1.654	1.767	1.959	2.255	2.711	3.448	4.756	7.509	16.06
16	1.641	1.682	1.796	1.988	2.283	2.737	3.468	4.757	7.463	15.84
20	1.666	1.706	1.821	2.014	2.310	2.763	3.490	4.770	7.447	15.72
24	1.687	1.728	1.843	2.036	2.333	2.786	3.511	4.785	7.443	15.64
40	1.748	1.790	1.906	2.102	2.400	2.855	3.579	4.844	7.467	15.52
60	1.796	1.838	1.955	2.152	2.453	2.910	3.636	4.899	7.505	15.48
80	1.828	1.871	1.988	2.186	2.488	2.947	3.675	4.937	7.537	15.48
100	1.852	1.894	2.013	2.211	2.514	2.974	3.703	4.966	7.562	15.48

## 7.- CÁLCULO DE LAS CARGAS CRÍTICAS MEDIANTE LAS FÓRMULAS APROXIMADAS DEL EUROCODE 3.

En el Eurocode 3 (ref. 10.6), la resistencia de cálculo de un elemento flexado se obtiene por un procedimiento que tiene en cuenta el momento crítico en régimen elástico (ver art. 5.5.2 de la norma).

En su anexo F consigna procedimientos para calcular el momento crítico de vigas elásticas con diversas condiciones de carga. En el caso particular que nos ocupa, puede calcularse con la fórmula (F-4)

$$M_{cr} = C_1 \frac{P^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{P^2 EI_z} \right]^{0.5} - C_2 z_g \right\} \quad (7.1)$$

donde debe ponerse  $k = k_w = 1$ ; los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se toman de la tabla F.1.2 de dicho anexo, donde se encuentra  $C_1 = 1,046$  y  $C_2 = 0.430$ .

La fórmula (7.1), expresada en términos de los adimensionales definidos en el presente trabajo, queda en la forma

$$(\mathbf{g}_K)_e = C_1 \frac{P^2}{(kL)^2} \left\{ \left[ \frac{1}{\mathbf{a}} + \frac{4}{P^2} + \left( C_2 \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{a}}} \right)^2 \right]^{0.5} + C_2 \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{a}}} \right\} \quad (7.2)$$

donde hemos llamado  $(\mathbf{g}_K)_e$  al valor crítico del adimensional definido por la última ecuación (4.7).

Mediante la expresión (7.2) se calcularon todos los valores de  $(\mathbf{g}_K)_e$  que se corresponden con los valores de  $\mathbf{g}_K$  consignados en las tablas 6.1 a 6.6. Tomando a estos últimos como valores exactos se calculó en cada caso el error relativo porcentual

$$E_e = \frac{\mathbf{g}_K - (\mathbf{g}_K)_e}{(\mathbf{g}_K)_e} 100\%$$

Los valores de estos errores relativos porcentuales se consignan en las tablas 7.1 a 7.6.

Tabla 7.1. Errores relativos porcentuales  $E_e$  en los valores de  $g_K$  calculados con Eurocode 3, para  $e = 1,0$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	45.3	32.8	22.8	13.9	5.5	-2.4	-10.0	-17.1	-23.9	-30.3
1	43.5	31.2	21.4	12.9	5.0	-2.3	-9.2	-15.6	-21.6	-27.3
2	42.1	30.0	20.4	12.1	4.6	-2.2	-8.5	-14.4	-19.9	-25.1
4	40.3	28.3	19.0	11.1	4.2	-2.1	-7.7	-12.8	-17.5	-22.0
6	39.1	27.3	18.1	10.4	3.8	-2.0	-7.1	-11.8	-16.1	-20.1
8	18.3	26.5	17.4	10.0	3.6	-1.9	-6.8	-11.1	-15.0	-18.7
12	37.1	25.4	16.5	9.3	3.3	-1.8	-6.2	-10.1	-13.5	-16.7
16	36.3	24.7	15.9	8.9	3.1	-1.7	-5.8	-9.4	-12.5	-15.4
20	35.7	24.2	15.5	8.6	3.0	-1.7	-5.5	-8.9	-11.8	-14.4
24	35.2	23.7	15.1	8.3	2.9	-1.6	-5.3	-8.8	-11.2	-13.7
40	34.0	22.7	14.2	7.7	2.6	-1.5	-4.7	-7.5	-9.8	-11.8
60	33.2	21.9	13.6	7.3	2.5	-1.4	-4.4	-6.8	-8.8	-10.6
80	32.6	21.5	13.3	7.1	2.4	-1.3	-4.1	-6.4	-8.2	-9.8
100	32.3	21.1	13.0	6.9	2.3	-1.2	-4.0	-6.1	-7.8	-9.2

Tabla 7.2. Errores relativos porcentuales  $E_e$  en los valores de  $g_K$  calculados con Eurocode 3, para  $e = 0,0$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	30.4	19.5	11.8	6.1	2.2	-0.6	-2.5	-3.6	-4.1	-4.4
1	30.3	19.4	11.7	6.1	2.2	-0.6	-2.4	-3.6	-4.2	-4.4
2	30.3	19.4	11.6	6.1	2.2	-0.6	-2.4	-3.6	-4.1	-4.4
4	30.2	19.3	11.6	6.1	2.1	-0.6	-2.5	-3.6	-4.2	-4.4
6	30.1	19.2	11.5	6.0	2.1	-0.6	-2.5	-3.6	-4.2	-4.3
8	30.0	19.1	11.5	6.0	2.1	-0.6	-2.5	-3.6	-4.2	-4.4
12	29.9	19.0	11.4	5.9	2.1	-0.6	-2.5	-3.6	-4.2	-4.4
16	29.8	19.0	11.3	5.9	2.0	-0.7	-2.5	-3.6	-4.1	-4.4
20	29.7	18.9	11.3	5.9	2.0	-0.7	-2.5	-3.6	-4.1	-4.4
24	29.6	18.8	11.2	5.8	2.0	-0.7	-2.5	-3.6	-4.2	-4.4
40	29.4	18.7	11.1	5.8	2.0	-0.7	-2.5	-3.6	-4.1	-4.4
60	29.3	18.5	11.0	5.7	1.9	-0.7	-2.5	-3.6	-4.1	-4.4
80	29.1	18.5	11.0	5.7	1.9	-0.7	-2.5	-3.6	-4.1	-4.4
100	29.1	18.4	11.0	5.6	1.9	-0.7	-2.5	-3.6	-4.1	-4.3

Tabla 7.3. Errores relativos porcentuales  $E_e$  en los valores de  $g_K$  calculados con Eurocode 3, para  $e = -1,0$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	16.3	7.0	1.5	-1.2	-1.7	-0.1	3.7	9.9	18.8	30.4
1	17.6	8.3	2.6	-0.4	-1.2	-0.2	2.9	8.0	15.4	25.1
2	18.7	9.2	3.4	0.2	-0.9	-0.2	2.2	6.6	13.0	21.3
4	20.1	10.5	4.5	1.1	-0.4	-0.3	1.4	4.8	9.9	16.6
6	21.0	11.3	5.2	1.6	-0.1	-0.3	0.9	3.7	8.0	13.8
8	21.6	11.9	5.7	2.0	0.0	-0.4	0.6	2.9	6.7	11.9
12	22.4	12.6	6.4	2.5	0.3	-0.4	0.1	1.9	5.0	9.3
16	23.0	13.2	6.8	2.9	0.5	-0.4	-0.1	1.3	3.9	7.6
20	23.4	13.6	7.2	3.1	0.7	-0.5	-0.4	0.8	3.2	6.4
24	23.8	13.9	7.4	3.3	0.8	-0.4	-0.5	0.5	2.6	5.6
40	24.6	14.6	8.0	3.7	1.0	-0.5	-0.9	-0.3	1.1	3.4
60	25.2	15.1	8.5	4.0	1.1	-0.5	-1.2	-0.9	0.2	2.0
80	25.6	15.4	8.7	4.2	1.2	-0.5	-1.3	-1.2	-1.4	1.1
100	25.8	15.7	8.9	4.3	1.3	-0.5	-1.4	-1.4	-0.7	0.6



Tabla 7.4. Errores relativos porcentuales  $E_e$  en los valores de  $g_k$  calculados con Eurocode 3, para  $e = -1,2$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	14.2	5.2	0.0	-2.4	-2.3	-0.1	4.7	12.3	23.2	37.9
1	15.7	6.5	1.2	-1.5	-1.8	-0.2	3.7	10.1	19.2	31.5
2	16.8	7.6	2.1	-0.7	-1.5	-0.2	3.0	8.4	16.3	26.8
4	18.3	9.0	3.3	0.2	-0.9	-0.3	2.0	6.3	12.6	21.1
6	19.3	9.9	4.1	0.8	-0.6	-0.4	1.5	5.0	10.4	17.6
8	20.1	10.6	4.7	1.2	-0.3	-0.4	1.0	4.1	8.8	15.2
12	21.1	11.4	5.5	1.8	-0.0	-0.4	0.5	2.9	6.8	12.1
16	21.8	12.1	6.0	2.3	0.2	-0.4	0.2	2.2	5.5	10.1
20	22.3	12.6	6.4	2.6	0.4	-0.5	-0.0	1.6	4.5	8.6
24	22.7	12.9	6.7	2.8	0.5	-0.5	-0.2	1.2	3.8	7.6
40	23.6	13.8	7.4	3.3	0.8	-0.5	-0.7	0.2	2.1	5.0
60	24.4	14.4	7.9	3.7	1.0	-0.5	-0.9	-0.4	1.0	3.3
80	24.8	14.8	8.3	3.9	1.1	-0.5	-1.1	-0.8	0.4	2.2
100	25.2	15.1	8.5	4.0	1.2	-0.5	-1.2	-1.1	-0.1	1.5

Tabla 7.5. Errores relativos porcentuales  $E_e$  en los valores de  $g_k$  calculados con Eurocode 3, para  $e = -1,4$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	12.4	3.7	-1.3	-3.3	-2.9	-0.0	5.6	14.5	27.5	45.4
1	13.9	5.0	-0.1	-2.4	-2.4	-0.1	4.5	12.0	22.9	37.9
2	15.1	6.1	0.8	-1.7	-2.0	-0.3	3.7	10.1	19.6	32.4
4	16.7	7.5	2.2	-0.7	-1.4	-0.4	2.6	7.7	15.3	25.6
6	17.8	8.5	3.1	0.1	-1.0	-0.4	1.9	6.2	12.7	21.5
8	18.6	9.3	3.7	0.5	-0.8	-0.4	1.5	5.2	10.9	18.7
12	19.7	10.3	4.6	1.2	-0.4	-0.5	0.9	3.8	8.5	15.0
16	20.5	11.0	5.1	1.7	-0.1	-0.5	0.5	2.9	7.0	12.6
20	21.0	11.5	5.6	2.0	0.1	-0.5	0.2	2.3	5.9	10.9
24	21.5	11.9	6.0	2.2	0.2	-0.5	0.0	1.9	5.1	9.6
40	22.7	13.0	6.8	2.9	0.5	-0.5	-0.4	0.7	3.1	6.6
60	23.6	13.7	7.4	3.3	0.8	-0.5	-0.7	0.0	1.8	4.6
80	24.1	14.2	7.8	3.6	0.9	-0.5	-1.0	-0.4	1.1	3.4
100	24.5	14.6	8.1	3.8	1.0	-0.5	-1.1	-0.7	0.5	2.6

Tabla 7.6. Errores relativos porcentuales  $E_e$  en los valores de  $g_k$  calculados con Eurocode 3, para  $e = -1,6$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	10.9	2.3	-2.4	-4.2	-3.4	-0.0	5.6	16.5	31.6	52.9
1	12.3	3.6	-1.2	-3.3	-2.9	-0.1	4.5	13.8	26.6	44.3
2	13.5	4.7	-0.3	-2.5	-2.5	-0.3	3.7	11.7	22.8	38.0
4	15.2	6.3	1.1	-1.4	-1.9	-0.4	2.6	9.9	18.0	30.2
6	16.3	7.3	2.0	-0.7	-1.5	-0.4	1.9	7.4	15.0	25.4
8	17.2	8.1	2.7	-0.1	-1.2	-0.4	1.5	6.2	12.9	22.1
12	18.4	9.2	3.9	0.6	-0.7	-0.5	0.9	4.7	10.2	17.8
16	19.2	10.0	4.4	1.1	-0.5	-0.5	0.5	3.7	8.5	15.1
20	19.9	10.5	4.9	1.5	-0.2	-0.5	0.2	3.0	7.2	13.2
24	20.4	11.0	5.3	1.8	-0.1	-0.5	0.0	2.5	6.3	11.7
40	21.8	12.2	6.2	2.5	0.3	-0.5	-0.4	1.20	4.0	8.1
60	22.8	13.1	6.9	3.0	0.6	-0.5	-0.7	0.5	2.6	5.8
80	23.4	13.7	7.4	3.3	0.8	-0.5	-1.0	-0.0	1.8	4.5
100	23.9	14.0	7.7	3.5	0.9	-0.5	-1.1	-0.4	1.2	3.5

## 8.- CÁLCULO DE LAS CARGAS CRÍTICAS MEDIANTE LAS FÓRMULAS APROXIMADAS DEL MANUAL AL QUE SE HACE REFERENCIA EN LA NORMA LRFD DEL AISC.

En la norma del American Institute of Steel Construction, "Metric Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings", December 1, 1994, el cálculo del momento resistente al pandeo lateral está contemplado sólo en el caso en que las cargas estén aplicadas a lo largo del eje baricéntrico. Sin embargo, en el capítulo F, artículo F1, punto 2b de los "Comentarios" de la norma, se expresa que si la carga está aplicada en el ala superior el valor crítico es menor y si está aplicada en el ala inferior es mayor y se hace referencia al manual editado por Galambos en el año 1988 (ref. 10.5).

En el mencionado manual puede encontrarse el tema en el capítulo 5, artículo 5.2, que se refiere al pandeo lateral de vigas elásticas. Para el caso que nos ocupa el momento crítico es calculado con la fórmula

$$M_{cr} = C_b M_{0_{cr}} \quad (8.1)$$

donde  $M_{0_{cr}}$  es el momento crítico en el caso de un momento flexor constante y su valor viene expresado por

$$M_{0_{cr}} = \frac{P}{L} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + W^2} \quad (8.2)$$

En esta fórmula es

$$W = \frac{P}{L} \sqrt{\frac{EC_w}{GJ}} \quad (8.3)$$

El factor numérico  $C_b$  que aparece en la fórmula (8.1) se basa en los trabajos de referencias 10.7 y 10.8. Su valor es

$$C_b = A / B \quad (\text{Cargas aplicadas en el ala superior})$$

$$C_b = A \quad (\text{Cargas aplicadas en el centro de corte})$$

$$C_b = AB \quad (\text{Cargas aplicadas en el ala inferior})$$

donde los factores numéricos  $A$  y  $B$  se consignan en la fig. 5.3, pág. 159.

En el mismo manual, se expresa que la comparación con soluciones numéricas cuidadosas, indica que las cargas críticas computadas mediante estas fórmulas difieren en menos de un 5% de la verdadera solución.

Las fórmulas (8.1), (8.2) y (8.3), expresadas en términos de los adimensionales definidos en el presente trabajo, permiten poner

$$(g_k)_a = \frac{P}{2(1-k)} C_b \sqrt{1 + \frac{P^2}{4a}} \quad (8.4)$$

donde hemos llamado  $(g_k)_a$  al valor crítico del adimensional definido por la última ecuación (4.7).

Mediante la expresión (8.4) y lo indicado en la manual se calcularon todos los valores que de  $(g_k)_a$  se corresponden con los valores de  $g_k$  consignados en las tablas 6.1 a 6.3.

Tomando a éstos últimos como valores exactos, se calculó en cada caso el error relativo porcentual

$$E_a = \frac{g_k - (g_k)_a}{(g_k)_a} 100\%$$

Los valores de estos errores relativos porcentuales se consignan en las tablas 8.1 a 8.3.

Tabla 8.1. Errores relativos porcentuales  $E_a$  en los valores de  $g_k$  calculados según el manual americano (ref. 10.5), para  $e = 1,0$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	-178	-174	-171	-168	-165	-162	-158	-154	-151	-147
1	-29.3	-32.8	-35.5	-38.1	-40.6	-43.4	-46.2	-49.2	-52.2	-55.4
2	-27.4	-31.0	-33.7	-36.2	-38.7	-41.2	-43.9	-46.6	-49.4	-52.3
4	-23.6	-27.3	-30.2	-32.6	-35.0	-37.3	-39.6	-42.0	-44.4	-47.1
6	-21.1	-25.0	-27.9	-30.3	-32.5	-34.6	-36.7	-38.9	-41.1	-43.5
8	-19.3	-23.3	-26.2	-28.6	-30.7	-32.7	-34.6	-36.6	-38.6	-40.8
12	-16.9	-20.9	-23.8	-26.2	-28.1	-29.9	-31.6	-33.3	-35.1	-37.0
16	-15.1	-19.2	-22.2	-24.5	-26.3	-28.0	-29.5	-31.0	-32.5	-34.3
20	-13.7	-18.0	-20.9	-23.1	-24.9	-26.5	-27.8	-29.2	-30.6	-32.2
24	-12.6	-16.9	-19.9	-22.1	-23.8	-25.2	-26.5	-27.7	-29.0	-30.5
40	-9.7	-14.1	-17.1	-19.2	-20.7	-21.9	-22.9	-23.8	-24.8	-25.9
60	-7.5	-12.0	-15.0	-17.0	-18.4	-19.4	-20.2	-20.9	-21.6	-22.6
80	-6.1	-10.6	-13.6	-15.6	-16.9	-17.8	-18.4	-19.0	-19.6	-20.4
100	-5.0	-9.6	-12.6	-14.5	-15.8	-16.5	-17.6	-17.6	-18.1	-18.7

Tabla 8.2. Errores relativos porcentuales  $E_a$  en los valores de  $g_k$  calculados según el manual americano (ref. 10.5), para  $e = 0,0$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	9.2	3.9	0.8	-1.1	-1.9	-2.1	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
1	9.1	3.9	0.7	-1.1	-2.0	-2.1	-1.9	-1.3	-0.8	-0.2
2	9.3	3.8	0.7	-1.1	-2.0	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
4	8.9	3.8	0.6	-1.2	-2.0	-2.2	-1.9	-1.3	-0.8	-0.2
6	8.9	3.7	0.6	-1.2	-2.0	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
8	8.8	3.6	0.5	-1.2	-2.0	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
12	8.7	3.5	0.4	-1.3	-2.1	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
16	8.6	3.5	0.4	-1.3	-2.1	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
20	8.5	3.4	0.3	-1.3	-2.1	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
24	8.5	3.4	0.3	-1.4	-2.1	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
40	8.3	3.2	0.2	-1.4	-2.2	-2.2	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
60	8.2	3.1	0.1	-1.5	-2.2	-2.3	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
80	8.1	3.1	0.1	-1.5	-2.2	-2.3	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2
100	8.1	3.0	0.1	-1.6	-2.2	-2.3	-1.9	-1.4	-0.7	-0.2

Tabla 8.3. Errores relativos porcentuales  $E_a$  en los valores de  $g_k$  calculados según el manual americano (ref. 10.5), para  $e = -1,0$ .

a	k=0,0	k=0,1	k=0,2	k=0,3	k=0,4	k=0,5	k=0,6	k=0,7	k=0,8	k=0,9
0.1	-25.2	-24.5	-24.3	-24.3	-24.7	25.3	-26.3	-27.5	-29.2	-31.2
1	67.2	59.9	57.1	57.6	60.9	66.9	75.7	87.6	103.0	121.7
2	62.7	55.6	52.8	53.0	55.8	60.9	68.4	78.6	91.7	107.3
4	54.4	47.6	44.8	44.7	46.8	50.8	56.7	64.7	74.9	87.0
6	49.4	42.9	40.1	39.8	41.5	44.8	49.8	56.6	65.2	75.3
8	45.9	39.6	36.8	36.4	37.7	40.7	45.1	51.1	58.6	67.5
12	41.3	35.2	32.4	31.8	32.8	35.3	39.0	43.9	50.0	57.3
16	38.3	32.2	29.4	28.7	29.6	31.7	34.9	39.2	44.6	50.8
20	36.0	30.0	27.2	26.5	27.2	30.0	31.9	35.8	40.6	46.2
24	34.2	28.3	25.5	24.7	25.3	27.0	29.6	33.2	37.6	42.7
40	29.5	23.8	21.0	20.1	20.4	21.7	23.8	26.6	30.1	34.0
60	26.3	20.7	17.9	16.8	17.0	18.0	19.8	22.2	25.1	28.3
80	24.2	18.6	15.9	14.7	14.8	15.7	17.3	19.4	22.0	24.7
100	22.7	17.3	14.4	13.3	13.3	14.1	15.5	17.5	19.8	22.3

## 9.- CONCLUSIONES.

Los valores críticos de las cargas que producen el pandeo lateral en régimen elástico en el caso estudiado, pueden calcularse fácilmente mediante las tablas 6.1 a 6.6.

Las tablas permiten apreciar un amplio panorama de esos valores críticos. Los resultados muestran una importante influencia de la altura del punto de aplicación de las cargas.

Puede comprobarse que con las expresiones aproximadas del Eurocode 3 se obtienen resultados bastante precisos en la mayoría de los casos, sobre todo en el intervalo  $0,2 \leq k \leq 0,7$ . En el caso en que  $k = 0,5$ , la precisión es excelente.

La norma americana LRFD sólo permite la comprobación de la resistencia al pandeo lateral cuando las cargas están aplicadas en el eje de la viga. De no ser así la norma hace referencia al manual editado por Galambos en 1988 (ref. 10.5).

El procedimiento aproximado que trae dicho manual permite considerar cargas aplicadas en el ala superior o en el ala inferior, además del caso de las cargas aplicadas en el eje de la barra. La comparación de estos resultados con los obtenidos analíticamente en el presente trabajo, muestra que la precisión de los mismos es muy buena cuando las cargas están aplicadas en el eje de la viga, pero que tienen errores muy grandes cuando están aplicadas en el ala inferior o superior.

Esta conclusión se contrapone a la que se expresa en el manual, donde se afirma que la comparación con soluciones numéricas cuidadosas, indica que las cargas críticas computadas mediante las fórmulas aproximadas difieren en menos de un 5% de la verdadera solución.

## 10.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

10.1.- Timoshenko S. P.- Gere J. M., "Theory of Elastic Stability". Ed. McGraw-Hill, 1961.

10.2.- Rezk H., "Teoría de segundo orden de las barras elásticas prismáticas de sección abierta y paredes delgadas. Ed. Fac. de Ing. de la Univ. de Buenos Aires, 1981.

10.3.- Galambos T., "Structural Members and Frames". Ed. Prentice Hall, 1968.

10.4.- American Institute of Steel Construction, "Metric Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings", December 1, 1994.

10.5.- Galambos T., "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures". John Wiley & Sons, 4th Ed., 1988.

10.6.- Comité Européen de Normalisation, "Eurocode 3, Calcul des structures en acier et Document d'Application National. Partie 1: Règles générales et règles pour les bâtiments". Association Française de Normalisation, 1992.

10.7.- Nethercot D. A., "Elastic Lateral Buckling of Beams", en Beams and Beam Columns-Stability in Strength (ed. R Narayanan), Applied Science Publishers, Barking, Essex, England, 1983.

10.8.- Nethercot D. A. y Rockey K. C., "A Unified Approach to Elastic Lateral Buckling of Beams", Eng. J. Am. Steel Constr., Vol 9, No. 3, pp 96-107, 1972.