

# **Pandeo Lateral Torsional de Vigas de Sección Rectangular con Dos Cargas Concentradas Iguales**

Horacio Rezk\*

## **1. Introducción**

La norma LRFD del American Institute of Steel Construction (ref. 10.4) y el Eurocode 3 (ref. 10.6) presentan fórmulas aproximadas que permiten el cálculo de cargas críticas de pandeo lateral torsional de vigas de acero en régimen elástico

Con el fin de conocer los errores que se cometen al emplear dichas fórmulas, se ha estudiado un caso particular, que es el de una viga de sección rectangular cargada con dos fuerzas concentradas iguales simétricamente dispuestas respecto de la sección central de la viga y aplicadas a una altura variable por encima y por debajo del eje de la viga. Las secciones donde se consideran aplicadas las cargas son las que resultan al dividir cada mitad de la viga en diez partes iguales.

Se resuelve el problema analíticamente mediante las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría de segundo orden de las barras elásticas de paredes delgadas, obteniéndose las cargas críticas en forma adimensional, en función de variables adimensionales que representan las propiedades de la viga y la posición de las cargas. Los resultados se presentan mediante tablas.

Con fines comparativos, se calculan las cargas críticas aplicando las fórmulas aproximadas indicadas en el Eurocode 3 y en la norma LRFD del American Institute of Steel Construction y en cada caso se determinan los errores resultantes de las mismas.

---

\* Profesor Titular de la Universidad de Buenos Aires y del Instituto de Enseñanza Superior del Ejército

## 2. El Problema Considerado

Se supone una viga elástica prismática de sección rectangular simplemente apoyada, según se muestra en las figuras 2.1 y 2.2.

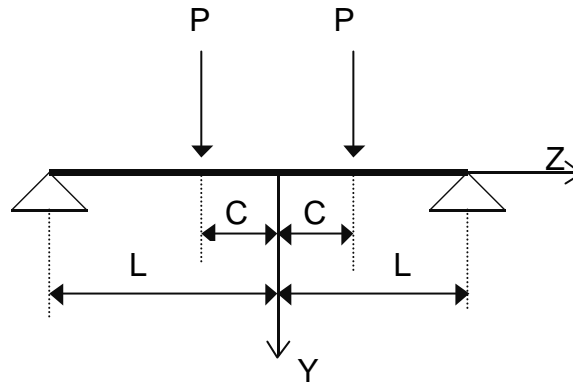


Fig. 2.1

Para estudiar el problema usamos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de modo que en la configuración inicial de la barra, el eje  $Z$  coincide con el eje baricéntrico de la barra y los ejes  $X$  e  $Y$  son en cada sección ejes principales de inercia. También usamos un sistema de coordenadas acompañantes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que en la configuración inicial de la barra coinciden con las cartesianas y que permanecen constantes para cada punto durante la deformación de la misma.

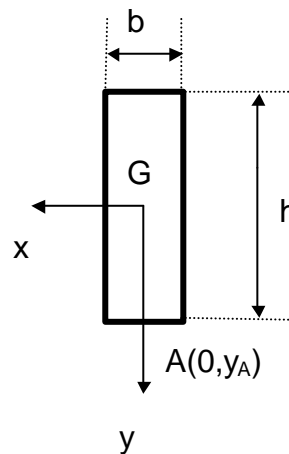


Fig. 2.2. Sección transversal de la barra.

Suponemos que la barra está cargada con dos fuerzas  $P$  que tienen la dirección del eje  $Y$  del sistema de coordenadas cartesianas y están aplicadas en secciones transversales a una distancia

$c$  de la sección central de la viga. El punto de aplicación de cada fuerza en su correspondiente sección transversal es el punto  $A$ , cuyas coordenadas acompañantes son  $0, y_A$  (ver figura 2.2).

En los tramos  $0 < z < c$  y  $c < z < L$ , no hay fuerzas exteriores distribuidas.

### 3. Las Ecuaciones de Equilibrio Interno y los Esfuerzos de la Barra

Como la estructura y las cargas son simétricas respecto del plano  $Z = 0$  y el modo de pandeo lateral es también simétrico respecto de dicho plano, estudiamos la mitad de la viga cuyas coordenadas  $z$  son positivas.

Dado que en la sección  $z = c$  está aplicada una fuerza concentrada, a los efectos de resolver el problema, consideramos separadamente el intervalo  $0 < z < c$ , que llamamos tramo 1 y el intervalo  $c < z < L$ , que llamamos tramo 2.

Teniendo en cuenta que las fuerzas exteriores distribuidas son nulas, las ecuaciones diferenciales de equilibrio interno para el tramo 1 son (ver art. 5 de referencia 10.2)

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{x_1}}{dz} &= 0 & -Q_{y_1} + \left( \frac{dv_1}{dz} - x_c \frac{d\Theta_1}{dz} \right) N_{z_1} + \frac{dM_{x_1}}{dz} &= 0 \\ \frac{dQ_{y_1}}{dz} &= 0 & Q_{x_1} - \left( \frac{du_1}{dz} + y_c \frac{d\Theta_1}{dz} \right) N_{z_1} + \frac{dM_{y_1}}{dz} &= 0 \\ \frac{dN_{z_1}}{dz} &= 0 & -\frac{dv_1}{dz} Q_{x_1} + \frac{du_1}{dz} Q_{y_1} + \frac{dM_{z_1}}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

En estas ecuaciones  $Q_{x_1}$ ,  $Q_{y_1}$ ,  $N_{z_1}$ ,  $M_{x_1}$ ,  $M_{y_1}$  y  $M_{z_1}$  son los esfuerzos de la barra en la configuración deformada referidos a las coordenadas cartesianas fijas  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ;  $u_1$  y  $v_1$  son las componentes de los desplazamientos de los centros de corte de las secciones en las direcciones de los ejes  $X$  e  $Y$ , respectivamente;  $\Theta_1$  es la rotación de las secciones en su propio plano;  $x_c$  e  $y_c$  son las coordenadas del centro de corte.

Si integramos las ecuaciones (3.1), y tenemos en cuenta que las coordenadas del centro de corte son nulas, se obtiene

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= Q_{x_1}^* & M_{x_1} &= Q_{y_1}^* z - N_{z_1}^* v_1 + M_{x_1}^* \\ Q_{y_1} &= Q_{y_1}^* & M_{y_1} &= -Q_{x_1}^* z - N_{z_1}^* u_1 + M_{y_1}^* \\ N_{z_1} &= N_{z_1}^* & M_{z_1} &= Q_{x_1}^* v_1 - Q_{y_1}^* u_1 + M_{z_1}^* \end{aligned} \quad (3.2)$$

En forma análoga, se obtiene para el tramo 2

$$\begin{aligned}
 Q_{X_2} &= Q_{X_2}^* & M_{X_2} &= Q_{Y_2}^* z - N_{Z_2}^* v_2 + M_{X_2}^* \\
 Q_{Y_2} &= Q_{Y_2}^* & M_{Y_2} &= -Q_{X_2}^* z + N_{Z_2}^* u_2 + M_{Y_2}^* \\
 (3.3) \quad N_{Z_2} &= N_{Z_2}^* & M_{Z_2} &= Q_{X_2}^* v_2 - Q_{Y_2}^* u_2 + M_{Z_2}^*
 \end{aligned}$$

En las ecuaciones (3.2) y (3.3), las cantidades señaladas con un asterisco (\*), forman un conjunto de doce constantes de integración.

Para determinar estas doce constantes se necesitan doce condiciones.

Si se considera el equilibrio en la configuración deformada de un segmento de barra comprendido entre dos secciones infinitamente próximas de coordenadas,  $z = c - \mathbf{d}$  y  $z = c + \mathbf{d}$  con  $\mathbf{d} \rightarrow 0$ , podemos plantear seis ecuaciones de equilibrio consistentes en tres ecuaciones de nulidad de la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes  $X, Y, Z$  y tres ecuaciones de nulidad de la suma de los momentos respecto de tres ejes que pasan por el punto  $A$  donde está aplicada la fuerza  $P$  y paralelos a los ejes  $X, Y, Z$ , respectivamente. Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned}
 -Q_{X_1}^* + Q_{X_2}^* &= 0 & -Q_{Y_1}^* + Q_{Y_2}^* + P &= 0 & -N_{Z_1}^* + N_{Z_2}^* &= 0 \\
 Q_{Y_1}^* (v'_C y_A - c) + N_{Z_1}^* (y_A + v_C) - M_{X_1}^* + Q_{Y_2}^* (-v'_C y_A + c) - N_{Z_2}^* (y_A + v_C) + M_{X_2}^* &= 0 \\
 Q_{X_1}^* (v'_C y_A + c) + N_{Z_1}^* (y_A \Theta_C - u_C) - M_{Y_1}^* + Q_{X_2}^* (v'_C y_A - c) + N_{Z_2}^* (-y_A \Theta_C + u_C) + M_{Y_2}^* &= 0 \quad (3.4) \\
 -Q_{X_1}^* (y_A + c) + Q_{Y_1}^* (-y_A \Theta_C + u_C) - M_{Z_1}^* + Q_{X_2}^* (y_A + v_C) + Q_{Y_2}^* (y_A \Theta_C - u_C) + M_{Z_2}^* &= 0
 \end{aligned}$$

En estas ecuaciones se usa la notación

$$\begin{aligned}
 v_C &= (v_1)_{z=c} = (v_2)_{z=c} & u_C &= (u_1)_{z=c} = (u_2)_{z=c} \\
 v'_C &= \left( \frac{dv_1}{dz} \right)_{z=c} = \left( \frac{dv_2}{dz} \right)_{z=c} & \Theta_C &= (\Theta_1)_{z=c} = (\Theta_2)_{z=c}
 \end{aligned}$$

que tiene en cuenta las condiciones de continuidad en la sección  $z = c$ .

Además, por razones de simetría en  $z = 0$ , se tiene

$$(Q_{X_1})_{z=0} = 0 \quad (Q_{Y_1})_{z=0} = 0 \quad (M_{Z_1})_{z=0} = 0 \quad (3.5)$$

y las condiciones de borde en  $z = L$  son

$$(M_{X_2})_{z=L} = 0 \quad (M_{Y_2})_{z=L} = 0 \quad (N_{Z_2})_{z=L} = 0 \quad (3.6)$$

Si introducimos la primera, tercera y sexta ecuación (3.2) en las ecuaciones (3.5), se obtiene

$$Q_{x_1}^* = 0 \quad Q_{y_1}^* = 0 \quad Q_{x_1}^*(v_1)_{z=0} - Q_{y_1}^*(u_1)_{z=0} + M_{z_1}^* = 0 \quad (3.7)$$

y si introducimos la segunda, cuarta y quinta ecuación (3.3) en las ecuaciones (3.6), y tenemos en cuenta la nulidad de los desplazamientos  $u_2$  y  $v_2$  en el extremo articulado, resulta

$$Q_{y_2}^* L + M_{x_2}^* = 0 \quad -Q_{x_2}^* L + M_{y_2}^* = 0 \quad N_{z_2}^* = 0 \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.4), (3.7) y (3.8) forman un sistema de 12 ecuaciones lineales algebraicas en las constantes  $Q_{x_1}^*$ ,  $Q_{y_1}^*$ ,  $N_{z_1}^*$ ,  $M_{x_1}^*$ ,  $M_{y_1}^*$ ,  $M_{z_1}^*$ ,  $Q_{x_2}^*$ ,  $Q_{y_2}^*$ ,  $N_{z_2}^*$ ,  $M_{x_2}^*$ ,  $M_{y_2}^*$  y  $M_{z_2}^*$ . Después de resolver el sistema y reemplazar los valores de las constantes en las ecuaciones (3.2) y (3.3), se obtienen los esfuerzos para el tramo 1

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= 0 & M_{x_1} &= P(L - c + v'_c y_A) \\ Q_{y_1} &= 0 & M_{y_1} &= 0 \\ N_{z_1} &= 0 & M_{z_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

y para el tramo 2

$$\begin{aligned} Q_{x_2} &= 0 & M_{x_2} &= P(L - z) \\ Q_{y_2} &= -P & M_{y_2} &= 0 \\ N_{z_2} &= 0 & M_{z_2} &= P(u_2 + y_A \Theta_c - u_c) \end{aligned} \quad (3.10)$$

## 4. Las Relaciones entre Esfuerzos y Deformaciones

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones indicadas en referencia 10.2 como ecuaciones (6.11) son

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + (y_c Q_x - M_z) \frac{du}{dz} + y_c Q_y \frac{dv}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) y_c \frac{d\Theta}{dz} + M_y \Theta + M_x &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + (x_c Q_y + M_z) \frac{dv}{dz} + x_c Q_x \frac{du}{dz} + (y_c Q_x - x_c Q_y - M_z) x_c \frac{d\Theta}{dz} + M_x \Theta - M_y &= 0 \\ EI_w \frac{d^3 \Theta}{dz^3} + (-y_c N_z + M_x) \frac{du}{dz} + (x_c N_z + M_y) \frac{dv}{dz} - (GI_T + i_c^2 N_z + r_x M_x - r_y M_y) \frac{d\Theta}{dz} + M_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

En estas ecuaciones,  $I_x$ ,  $I_y$  son los momentos principales de inercia baricéntricos de la sección;  $I_w$  es su momento de inercia sectorial;  $I_T$  es la constante de torsión libre;  $i_c$  es su radio de

giro polar respecto del centro de corte; y  $r_x$ ,  $r_y$  son dos constantes geométricas de la sección definidas por las expresiones

$$r_x = \frac{\iint_A y(x^2 + y^2) dx dy}{I_x} - 2y_c \quad r_y = \frac{\iint_A x(x^2 + y^2) dx dy}{I_y} - 2x_c$$

Si en las ecuaciones (4.1) introducimos los esfuerzos expresados por las ecuaciones (3.9) y se tiene en cuenta que para la sección rectangular de pared delgada es  $r_x = r_y = x_c = y_c = 0$  e  $I_w = 0$ , se tiene para el tramo 1,

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v_1}{dz^2} + P(L - c + v'_c y_A) &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u_1}{dz^2} + P(L - c)\Theta_1 &= 0 \\ P(L - c) \frac{du_1}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_1}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Después de derivar la última ecuación (4.2) una vez respecto de  $z$ , resulta

$$P(L - c) \frac{d^2 u_1}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} = 0 \quad (4.3)$$

Si procedemos en forma análoga para el tramo 2, obtenemos

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v_2}{dz^2} + P(L - z) &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u_2}{dz^2} + P(L - z)\Theta_2 &= 0 \\ P(L - z) \frac{du_2}{dz} - GI_T \frac{d\Theta_2}{dz} + Pu_2 + P(y_A \Theta_c - u_c) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Después de derivar la última ecuación (4.4) una vez respecto de  $z$ , se tiene

$$P(L - z) \frac{d^2 u_2}{dz^2} - GI_T \frac{d^2 \Theta_2}{dz^2} = 0 \quad (4.5)$$

La primera ecuación (4.2) y la primera ecuación (4.4), permiten obtener la deflexión de la viga en su plano de simetría  $Y, Z$ . Para analizar el problema de pandeo lateral debemos considerar el sistema de ecuaciones homogéneas formado por la segunda y la tercera ecuación en (4.2) y la (4.3) para el tramo 1 y la segunda ecuación (4.4) y la (4.5) para el tramo 2.

De la segunda ecuación (4.2), obtenemos

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = -\frac{P(L - c)}{EI_y} \Theta_1$$

que reemplazada en la ecuación (4.3) nos da

$$\frac{d^2\Theta_1}{dz^2} + \frac{P^2(L-c)^2}{GI_T EI_y} \Theta_1 = 0 \quad (4.6)$$

Si definimos los adimensionales

$$\mathbf{z} = \frac{z}{L} \quad \mathbf{k} = \frac{c}{L} \quad \mathbf{b} = \sqrt{\frac{EI_y}{GI_T}} \quad \mathbf{g} = \frac{PL^2}{\sqrt{EI_y GI_T}} \quad \mathbf{h} = \frac{y_A}{L} \quad (4.7)$$

la ecuación (4.6) puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2\Theta_1}{d\mathbf{z}^2} + \mathbf{g}^2(1-\mathbf{k})^2 \Theta_1 = 0 \quad (4.8)$$

Si procedemos en forma análoga con la segunda ecuación (4.4) y la ecuación (4.5), se obtiene

$$\frac{d^2\Theta_2}{dz^2} + \frac{P^2(L-z)^2}{GI_T EI_y} \Theta_2 = 0 \quad (4.9)$$

y si introducimos los adimensionales definidos por las ecuaciones (4.7), resulta

$$\frac{d^2\Theta_2}{d\mathbf{z}^2} + \mathbf{g}^2(1-\mathbf{z})^2 \Theta_2 = 0 \quad (4.10)$$

Las ecuaciones diferenciales (4.8) y (4.10) deben satisfacer las siguientes condiciones de borde y continuidad

$$\left( \frac{d\Theta_1}{d\mathbf{z}} \right)_{\mathbf{z}=0} = 0 \quad (\Theta_2)_{\mathbf{z}=1} = 0 \quad (\Theta_1)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} = (\Theta_2)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} \quad (4.11)$$

Asimismo, deben cumplir una condición adicional que obtenemos restando miembro a miembro la última ecuación (4.2) y la última ecuación (4.4). Si luego ponemos  $z = c$  y tenemos en cuenta que

$$\left( \frac{du_1}{dz} \right)_{z=c} = \left( \frac{du_2}{dz} \right)_{z=c}$$

resulta

$$-\left( \frac{d\Theta_2}{dz} \right)_{z=c} + \left( \frac{d\Theta_1}{dz} \right)_{z=c} + \frac{Py_A}{GI_T} \Theta_c = 0$$

Si en esta ecuación introducimos los adimensionales definidos por las ecuaciones (4.7), se obtiene

$$-\left( \frac{d\Theta_2}{d\mathbf{z}} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} + \left( \frac{d\Theta_1}{d\mathbf{z}} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{k}} + \mathbf{ghb} \Theta_c = 0 \quad (4.12)$$

En el caso de una sección rectangular, como la indicada en la figura 2.2, se tiene

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_T = \frac{hb^3}{3} \quad (4.13)$$

Si introducimos estas expresiones en la tercera y cuarta ecuación (4.7) y tenemos en cuenta que  $E / G = 2(1 + \mathbf{n})$ , se obtiene

$$\mathbf{b} = \sqrt{\frac{1 + \mathbf{n}}{2}} \quad \mathbf{g} = \frac{6PL^2}{Ehb^3} \sqrt{2(1 + \mathbf{n})} \quad (4.14)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el coeficiente de Poisson.

Las tres ecuaciones (4.11) y la ecuación (4.12), son las condiciones que deben satisfacer las ecuaciones diferenciales (4.8) y (4.10).

## 5. La Solución de las Ecuaciones Diferenciales del Problema

La solución general de la ecuación diferencial (4.8) correspondiente al tramo 1 (intervalo  $0 < \mathbf{z} < \mathbf{k}$ ) es

$$\Theta_1 = A_1 \cos[\mathbf{g}(1 - \mathbf{k})\mathbf{z}] + A_2 \sin[\mathbf{g}(1 - \mathbf{k})\mathbf{z}] \quad (5.1)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son dos constantes arbitrarias.

Si planteamos la primera condición de las ecuaciones (4.11), se obtiene  $A_2 = 0$  y la ecuación (5.1) queda

$$\Theta_1 = A_1 \cos[\mathbf{g}(1 - \mathbf{k})\mathbf{z}] \quad (5.2)$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial (4.10) conviene definir una nueva variable adimensional

$$\mathbf{x} = 1 - \mathbf{z} \quad (5.3)$$

con lo que la ecuación diferencial (4.10) queda en la forma

$$\frac{d^2 \Theta_2}{d\mathbf{x}^2} + \mathbf{g}^2 \mathbf{x}^2 \Theta_2 = 0 \quad (5.4)$$

Proponemos como solución de esta ecuación una serie de potencias de la forma

$$\Theta_2 = \mathbf{x}^m (a_0 + a_1 \mathbf{x} + a_2 \mathbf{x}^2 + a_3 \mathbf{x}^3 + \dots) \quad (5.5)$$

donde  $m$  es una constante.



Si introducimos la ecuación (5.5) en la ecuación diferencial (5.4), se obtiene una serie de potencias de  $\mathbf{z}$  donde la menor potencia es  $\mathbf{z}^{m-2}$ . Si anulamos el coeficiente de esa potencia en la serie, se obtiene

$$a_0 m(m-1) = 0 \quad (5.6)$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$m = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

y adoptamos arbitrariamente  $a_0 = 1$ .

Si anulamos todos los demás coeficientes de la serie de potencias resultante, se obtienen los coeficientes  $a_{j,m}$  de dos series de potencias de la forma (5.5) que son solución de la ecuación diferencial (5.4) y que se corresponden con los valores de  $m$  consignados en la ecuación (5.7).

La solución general de la ecuación diferencial (5.4) puede entonces expresarse como la suma de dos series multiplicadas por sendas constantes arbitrarias, o sea

$$\Theta_2 = C_0 f_0 + C_1 f_1 \quad (5.8)$$

donde  $C_0$  y  $C_1$  son dos constantes y las series son

$$f_m = \sum_{j=0,4,8,\dots}^{\infty} a_{j,m} (1-\mathbf{z})^{m+j} \quad (5.9)$$

con  $m = 0, 1$ .

Los coeficientes de las series en la expresión (5.9) son

$$a_{0,m} = 1 \quad a_{j,m} = -\frac{\mathbf{g}^2}{(m+j)(m+j-1)} a_{j-4,m} \quad (5.10)$$

para  $j = 4, 8, 12, \dots, \infty$  y  $m = 0, 1$ .

Si planteamos la segunda de las condiciones (4.11), se obtiene  $C_0 = 0$ , y la solución (5.8) queda reducida a

$$\Theta_2 = C_1 f_1 \quad (5.11)$$

La derivada primera de la serie  $f_1$  es

$$f_1' = \frac{df_1}{d\mathbf{z}} = - \sum_{j=0,4,8,\dots}^{\infty} a_{j,1} (1+j) (1-\mathbf{z})^j \quad (5.12)$$

Si se plantean la última de las condiciones (4.11) y la condición (4.12), mediante las expresiones (5.2) y (5.11), se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales algebraicas homogéneas en

$A_1$  y  $C_1$ . La condición para que este sistema tenga soluciones distintas de la trivial es que se anule el determinante de la matriz de los coeficientes, de donde resulta la ecuación

$$-(f_1')_{z=k} \cos[\mathbf{g}(1-\mathbf{k})] + \mathbf{g}(f_1)_{z=k} \{ \mathbf{b} \mathbf{h} \cos[\mathbf{g}(1-\mathbf{k})\mathbf{k}] - (1-\mathbf{k}) \sin[\mathbf{g}(1-\mathbf{k})\mathbf{k}] \} = 0 \quad (5.13)$$

Las cantidades  $(f_1)_{z=k}$  y  $(f_1')_{z=k}$  que aparecen en esta ecuación se calculan con las expresiones (5.9) y (5.12), poniendo en ellas  $\mathbf{z} = \mathbf{k}$  y  $m = 1$ .

La ecuación (5.13) es una función de la forma

$$F(\mathbf{g}, \mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{b}) = 0 \quad (5.14)$$

donde  $\mathbf{g}$  es un adimensional que representa a la magnitud de las cargas con relación a propiedades geométricas y mecánicas de la viga. (segunda ecuación (4.14)),  $\mathbf{k}$  define la posición de las cargas en la longitud de la viga (segunda ecuación (4.7)),  $\eta$  caracteriza a la ubicación del punto de aplicación de las cargas en el plano de la sección (última ecuación (4.7)) y  $\mathbf{b}$  depende solamente del coeficiente de Poisson  $\mathbf{n}$  (primera ecuación (4.14)).

Fijados  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{h}$  se obtiene  $\mathbf{g}_k$  como la menor raíz real positiva de la función (5.14), lo que permite calcular la carga crítica en régimen elástico mediante la expresión

$$P_k = \mathbf{g}_k \frac{h b^3}{6 L^2} \frac{E}{\sqrt{2(1+\mathbf{n})}} \quad (5.15)$$

## 6. Los Resultados Obtenidos

Se realizaron los cálculos de  $\mathbf{g}_k$  adoptando para el coeficiente de Poisson  $\mathbf{n}$  los valores 0,0, 0,1, 0,2, 0,3 y 0,4. Los valores de  $\mathbf{k}$  se tomaron entre 0,0 a 0,9 con incrementos de 0,1 y los de  $\mathbf{h}$  en el intervalo  $-1,5 \leq \mathbf{h} \leq 1,5$ , que corresponden a posiciones de las cargas por encima del baricentro cuando  $\mathbf{h}$  es negativo y por debajo de él cuando es positivo.

Para realizar los cálculos se desarrolló un programa de computación en lenguaje Fortran en el que se usó doble precisión. Las series fueron evaluadas mediante la suma de sus cincuenta primeros términos ( $j = 0, 4, 8, \dots, 200$ ), después de comprobar que los resultados no experimentaban cambios sensibles con cantidades de términos menores que la adoptada.

Por razones de espacio, en las tablas 6.1 y 6.2, sólo se consignan los resultados correspondientes a  $\mathbf{n} = 0,3$  y  $\mathbf{n} = 0,2$ , respectivamente

Los valores críticos de las cargas que producen el pandeo lateral en el caso estudiado pueden calcularse fácilmente mediante las tablas 6.1 y 6.2 y la fórmula (5.15). De ser necesario realizar el cálculo de  $g_k$  para valores intermedios de  $\eta$  o  $\kappa$ , puede interpolarse linealmente.

Se puede comprobar que los resultados obtenidos para los casos en que  $k = 0$  (una sola carga concentrada en el centro de la viga) coinciden con los que pueden calcularse con las fórmulas que figuran en la página 269 de referencia 10.1.

Tabla 6.1. Valores de  $g_k$  para  $n = 0,3$

$h=$	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
-0,15	1,883	1,928	2,047	2,245	2,549	3,008	3,735	4,989	7,557	15,37
-0,10	1,959	2,002	2,120	2,321	2,627	3,092	3,826	5,090	7,670	15,50
-0,05	2,037	2,078	2,197	2,398	2,707	3,176	3,916	5,187	7,776	15,61
0,00	2,117	2,157	2,275	2,477	2,788	3,261	4,004	5,280	7,874	15,71
0,05	2,198	2,238	2,356	2,558	2,870	3,344	4,091	5,369	7,966	15,81
0,10	2,281	2,322	2,438	2,640	2,952	3,427	4,174	5,454	8,051	15,89
0,15	2,364	2,407	2,523	2,724	3,035	3,509	4,256	5,535	8,130	15,97

Tabla 6.2. Valores de  $g_k$  para  $n = 0,2$

$h=$	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
-0,15	1,892	1,937	2,055	2,254	2,558	3,018	3,746	5,001	7,571	15,38
-0,10	1,965	2,008	2,126	2,327	2,633	3,099	3,833	5,098	7,679	15,50
-0,05	2,040	2,081	2,200	2,401	2,710	3,180	3,920	5,191	7,780	15,61
0,00	2,117	2,157	2,275	2,477	2,788	3,261	4,004	5,280	7,874	15,71
0,05	2,195	2,235	2,352	2,555	2,867	3,341	4,087	5,366	7,962	15,80
0,10	2,274	2,315	2,432	2,634	2,946	3,421	4,168	5,448	8,045	15,89
0,15	2,354	2,397	2,513	2,714	3,026	3,500	4,246	5,526	8,121	15,96

## 7. Cálculo de las Cargas Críticas mediante las Fórmulas Aproximadas del Eurocode 3

En el Eurocode 3 (ref. 10.6), la resistencia de cálculo de un elemento flexado se obtiene por un procedimiento que tiene en cuenta el momento crítico en régimen elástico (ver art. 5.5.2 de la norma).

En su anexo F consigna procedimientos para calcular el momento crítico de vigas elásticas con diversas condiciones de carga. En el caso particular que nos ocupa, se usa la fórmula (F-4)

$$M_{cr} = C_1 \frac{\mathbf{p}^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \left[ \left( \frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\mathbf{p}^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2 \right]^{0.5} - C_2 z_g \right\} \quad (7.1)$$

donde debe ponerse  $k = k_w = 1$ ; los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se toman de la tabla F.1.2 de dicho anexo, donde se encuentra  $C_1 = 1,046$  y  $C_2 = 0,430$ .

La fórmula (7.1), expresada en términos de los adimensionales definidos en el presente trabajo, queda en la forma

$$(\mathbf{g}_K)_e = C_1 \frac{\mathbf{p}^2}{4(1-\mathbf{k})} \sqrt{\frac{1+\mathbf{n}}{2}} \left\{ \left[ \frac{8}{\mathbf{p}^2(1+\mathbf{n})} + (C_2 \mathbf{h})^2 \right]^{0.5} + C_2 \mathbf{h} \right\} \quad (7.2)$$

donde hemos llamado  $(\mathbf{g}_K)_e$  al valor crítico del adimensional definido por la penúltima ecuación (4.7), calculado de acuerdo con la norma europea.

Mediante la expresión (7.2) se calcularon todos los valores de  $(\mathbf{g}_K)_e$  que se corresponden con los valores de  $\mathbf{g}_K$  consignados en la tabla 6.1 y, tomando a estos últimos como valores exactos, se calcularon en cada caso los errores relativos porcentuales

$$E_e = \frac{\mathbf{g}_K - (\mathbf{g}_K)_e}{(\mathbf{g}_K)_e} 100\%$$

Los valores de  $(\mathbf{g}_K)_e$  y  $E_e$  se consignan en las tablas 7.1 y 7.2, respectivamente.

Tabla 7.1. Valores de  $(\mathbf{g}_K)_e$  calculados de acuerdo con el Eurocode 3, para  $\mathbf{n} = 0,3$

$\mathbf{h} =$	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
-0,15	1,514	1,683	1,893	2,163	2,524	3,029	3,786	5,048	7,572	15,14
-0,10	1,556	1,729	1,945	2,223	2,593	3,112	3,890	5,187	7,780	15,56
-0,05	1,599	1,777	1,999	2,284	2,665	3,198	3,997	5,330	7,995	15,99
0,00	1,643	1,826	2,054	2,347	2,738	3,286	4,108	5,477	8,215	16,43
0,05	1,688	1,876	2,110	2,412	2,814	3,377	4,221	5,628	8,442	16,88
0,10	1,735	1,928	2,169	2,479	2,892	3,470	4,337	5,783	8,675	17,35
0,15	1,783	1,981	2,228	2,547	2,971	3,565	4,457	5,942	8,914	17,83

Tabla 7.2 Errores relativos porcentuales  $E_e$  en los valores de  $(g_k)_e$  calculados con el Eurocode 3, para  $n = 0,3$

$h=$	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
-0,15	24,3	14,6	8,1	3,8	1,0	-0,7	-1,33	-1,2	-0,2	1,5
-0,10	25,9	15,8	9,0	4,4	1,3	-0,6	-1,6	-1,9	-1,4	-0,4
-0,05	27,4	17,0	9,9	5,0	1,6	-0,7	-2,0	-2,7	-2,7	-2,4
0,00	28,8	18,2	10,8	5,5	1,8	-0,8	-2,5	-3,6	-4,2	-4,4
0,05	30,2	19,3	11,6	6,1	2,0	-1,0	-3,1	-4,6	-5,6	-6,4
0,10	31,5	20,5	12,4	6,5	2,1	-1,2	-3,8	-5,7	-7,2	-8,4
0,15	32,6	21,5	13,2	7,0	2,1	-1,6	-4,5	-6,9	-8,8	-10,4

## 8. Cálculo de las Cargas Críticas mediante la Norma LRFD del AISC

En la norma del American Institute of Steel Construction, "Metric Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings", December 1, 1994, el cálculo del momento crítico de pandeo lateral torsional está contemplado sólo en el caso en que las cargas están aplicadas a lo largo del eje baricéntrico.

En el régimen elástico el momento crítico en barras de secciones rectangulares sólidas está dado por la fórmula (F1-14)

$$M_{cr} = \frac{2C_b E \sqrt{JA}}{L_b / r_y} \quad (8.1)$$

donde  $C_b$  es un coeficiente que depende del diagrama de momentos flexores,  $J$  es la constante de torsión libre de la sección,  $A$  es el área de la sección,  $L_b$  es la longitud libre de arriostramientos y  $r_y$  es el radio de giro respecto del eje  $y$ .

El coeficiente  $C_b$  está dado en la norma por la fórmula (F1-3)

$$C_b = \frac{12,5M_{max}}{2,5M_{max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad (8.2)$$

donde  $M_{max}$  es el máximo momento flexor en el segmento no arriostrado,  $M_A$  es el valor absoluto del momento en el cuarto de la luz,  $M_B$  es el valor absoluto del momento en el centro de la luz y  $M_C$  es el valor absoluto del momento en los tres cuartos de la luz.

Las fórmulas (8.1), (8.2) expresadas en términos de los adimensionales definidos en el presente trabajo, permiten poner

$$(g_k)_a = \frac{12,5\sqrt{2(1+n)}}{9,5 - 6,5k} \quad \text{para } k < 0,5 \quad (8.3)$$

y

$$(g_k)_a = \frac{\sqrt{2(1+n)}}{1-k} \quad \text{para } k \geq 0,5. \quad (8.4)$$

donde hemos llamado  $(g_k)_a$  al valor crítico del adimensional definido por la penúltima ecuación (4.7), calculado mediante la norma americana.

Mediante las expresiones (8.3) y (8.4) y poniendo  $n = 0,3$ , se calcularon los valores de  $(g_k)_a$  que se corresponden con los valores de  $g_k$  consignados en la tabla 6.1 para  $h = 0$  (cargas aplicadas en el eje baricéntrico) y se calcularon en cada caso los errores relativos porcentuales

$$E_a = \frac{g_k - (g_k)_a}{(g_k)_a} 100\%$$

Los valores obtenidos se consignan en la tabla 8.1.

Tabla 8.1. Valores de  $(g_k)_a$  calculados mediante la norma LRFD del AISC para cargas aplicadas en el eje baricéntrico y los correspondientes errores relativos porcentuales  $E_a$ .

	$\kappa=0,0$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$	$\kappa=0,7$	$\kappa=0,8$	$\kappa=0,9$
$(g_k)_a$	2,122	2,277	2,458	2,670	2,921	3,225	4,031	5,375	8,062	16,12
$E_a$	-0,2	-5,3	-7,4	-7,2	-4,6	1,1	-0,7	-1,8	-2,3	-2,6

## 9. Conclusiones

Los valores críticos de las cargas que producen el pandeo lateral torsional en régimen elástico en el caso estudiado, pueden calcularse fácilmente mediante las tablas 6.1 o 6.2, según sea el valor del coeficiente de Poisson. Los resultados muestran que es bastante importante la influencia que tiene en los valores críticos la altura del punto de aplicación de las cargas, pero que es pequeña la influencia del valor del coeficiente de Poisson.

La norma europea Eurocode 3 permite la evaluación de las cargas críticas teniendo en cuenta la altura de su punto de aplicación, lo que es una buena característica.

Los resultados que se obtienen con esta norma son en general satisfactorios.

Los errores porcentuales que corresponden a  $k = 0,0$  (ver tabla 7.2) se refieren al caso de una única carga concentrada en la sección central de la viga, que es considerado separadamente en la misma norma, por lo que los errores relativamente grandes que observan, no tienen importancia.

Para  $k = 0,1$  y  $k = 0,2$ , los errores porcentuales varían entre 8,1% y 21,5%, pero son todos positivos, es decir que los valores críticos son seguros. Para  $0,3 \leq k \leq 0,9$  los errores porcentuales son menores que 10,5%. En el caso en que  $k = 0,5$ , la precisión es excelente.

Con la norma americana LRFD, se pueden calcular los valores críticos cuando las cargas están aplicadas en el eje de la viga. En ese caso, los resultados que se obtienen tienen un error relativo menor que 7,5% (ver tabla 8.1).

## 10. Referencias Bibliográficas

- 10.1. Timoshenko S. P. y Gere J. M., "Theory of Elastic Stability". Ed. McGraw-Hill, 1961.
- 10.2. Rezk H., "Teoría de segundo orden de las barras elásticas prismáticas de sección abierta y paredes delgadas". Ed. Fac. de Ing. de la Univ. de Buenos Aires, 1981.
- 10.3. Galambos T., "Structural Members and Frames". Ed. Prentice Hall, 1968.
- 10.4. American Institute of Steel Construction, "Metric Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings", December 1, 1994.
- 10.5. Galambos T., "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures". John Wiley & Sons, 4th Ed., 1988.
- 10.6. Comité Européen de Normalisation, "Eurocode 3, Calcul des structures en acier et Document d'Application National. Partie 1: Règles générales et règles pour les bâtiments". Association Française de Normalisation, 1992.
- 10.7. Nethercot D. A. "Elastic Lateral Buckling of Beams", in Beams and Beam Columns-Stability in Strength (ed. R. Narayanan), Applied Science Publishers, Barking, Essex, England, 1983.
- 10.8. Nethercot D. A. y Rockey K. C., "A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams", Eng. J. Am. Inst. Steel Constr., Vol.9, No. 3, pp.96-107, 1972.