

PANDEO LATERAL TORSIONAL DE VIGAS DE SECCIÓN DOBLE TE CARGADAS CON UN TREN DE DOS CARGAS CONCENTRADAS IGUALES EN LA POSICIÓN QUE PRODUCE EL MÁXIMO MOMENTO FLEXOR

Ingeniero Civil Horacio Rezk

**Facultad Regional Avellaneda de la Universidad Tecnológica Nacional
Buenos Aires**

Resumen

Se estudia el problema de pandeo lateral de las vigas elásticas de sección doble Te simplemente apoyadas, cargadas con un tren de dos cargas concentradas iguales ubicado en la posición que produce el máximo momento flexor. Las cargas se suponen aplicadas a distintas alturas, en el centro del ala superior y en puntos por encima del ala superior a alturas como las que pueden presentarse en una viga carrilera. La distancia entre las dos cargas del tren se toma también como una variable.

Se resuelve el problema analíticamente mediante las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría de segundo orden de las barras elásticas de paredes delgadas, obteniéndose las cargas críticas en forma adimensional, en función de variables adimensionales. La solución se alcanza mediante series de potencias y los resultados se presentan mediante tablas y gráficos.

Con fines comparativos, se encara la resolución del problema mediante las fórmulas aproximadas indicadas en la norma *Specification For Structural Steel Buildings* del American Institute of Steel Construction. Las fórmulas de la norma se transforman para expresarlas en términos de los mismos adimensionales usados en la resolución analítica. Se tienen en cuenta sus limitaciones y se determinan los errores resultantes de su aplicación.

Abstract

The subject of this work is the study of the lateral-torsional buckling of double symmetric I-shaped simply supported elastic beams under the action of a train of two equal concentrated loads applied in the position that produces the maximum bending moment. The loads are supposed applied at different heights, at the centre of the upper flange and at points over the upper flange at heights like which can appear in a beam that support the rails of a travelling crane. The distance between the two loads of the train is also taken like a variable.

The problem is solved analytically by means of the basic differential equations of the second order theory of the thin walled elastic beams. The critical loads are obtained in a dimensionless form as a function of dimensionless variables. The solution is reached by means of a series of powers and the results are presented by means of tables and graphics.

*For comparative purposes, the critical loads are calculated using the approximate formula indicated in the *Specification For Structural Steel Buildings* of the American Institute of Steel Construction. The formulas of the norm are transformed so that they can be expressed in terms of the same dimensionless variables used in the analytical resolution. Their limitations are considered and the resultant errors of their application are determined.*

1 Introducción

El pandeo lateral torsional en régimen elástico es una posible forma de falla de las vigas de acero. Por consiguiente, las normas referentes a estas construcciones contienen prescripciones para facilitar la verificación de la seguridad de las vigas frente a este tipo de falla. El cálculo de los momentos críticos en régimen elástico se realiza mediante fórmulas aproximadas.

El objetivo de este trabajo es ampliar el conocimiento de los casos de pandeo lateral torsional de vigas. Los resultados obtenidos en forma analítica mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales básicas de la teoría general de segundo orden, además de su utilización práctica directa, permiten analizar los errores de las fórmulas contenidas en la norma LRFD del American Institute of Steel Construction⁽¹⁾, así como las limitaciones de su aplicación.

2 El problema considerado

Se supone una viga elástica prismática de sección doble T simplemente apoyada, según se muestra en las figuras 1 y 2.

Para estudiar el problema usamos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales X , Y , Z de modo que en la configuración inicial de la barra, el eje Z coincide con el eje baricéntrico de la barra y los ejes X e Y son en cada sección ejes principales de inercia. También usamos un sistema de coordenadas acompañantes x , y , z , que en la configuración inicial de la barra coinciden con las cartesianas y que permanecen constantes para cada punto durante la deformación de la misma.

Suponemos que la barra está cargada con un tren de dos fuerzas concentradas iguales

$$\bar{P} = P \bar{e}_Y \quad (1)$$

que tienen la dirección del eje Y del sistema de coordenadas cartesianas. La distancia entre las fuerzas es $2c$ y la posición del tren de cargas es la que produce el máximo momento flexor en la viga, según se muestra en la fig. 1.

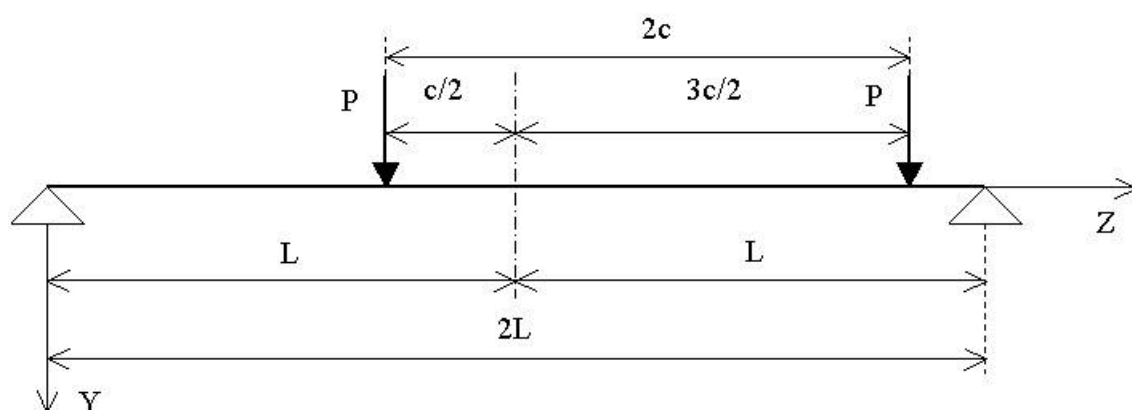


Fig. 1. Estado de carga de la viga simplemente apoyada.

La condición para que ambas fuerzas del tren de cargas incidan dentro de la longitud de la viga en la posición indicada en la Fig. 1 es $c < \frac{2}{3}L$.

No se consideran fuerzas exteriores distribuidas sobre la viga.

Las fuerzas concentradas están aplicadas en un punto del eje de simetría vertical de la sección doble Te. Dicho punto de aplicación es A , cuyas coordenadas acompañantes son $0, y_A$ (ver Fig. 2).

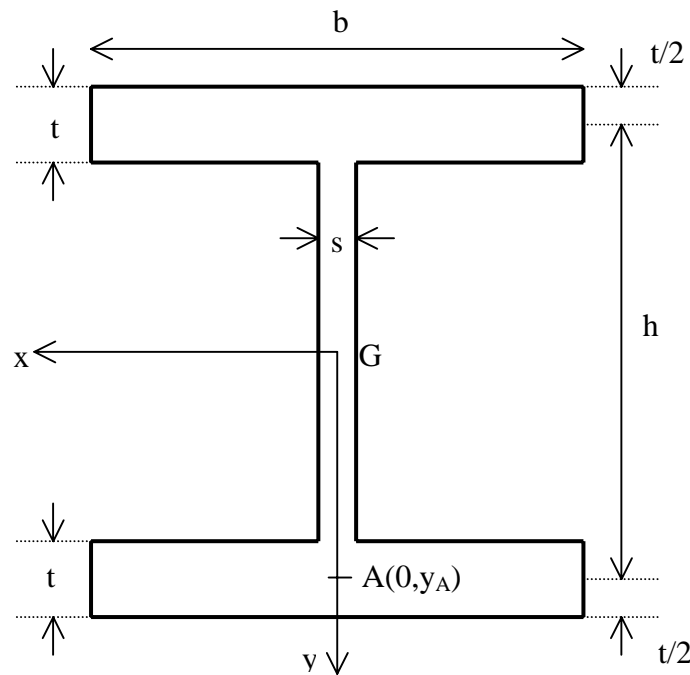


Fig. 2. Sección transversal de la viga.

3 Las ecuaciones de equilibrio interno y los esfuerzos de la barra

Dada la presencia de las dos cargas concentradas, para resolver el problema, consideramos tres intervalos en la longitud de la viga, que llamamos tramo 1, 2 y 3. Los correspondientes intervalos se consignan en la tabla 3.

Tabla 3. Intervalos en que se divide la longitud de la viga.

Tramo $i =$	1	2	3
Intervalo	$0 < z < L - \frac{c}{2}$	$L - \frac{c}{2} < z < L + \frac{3}{2}c$	$L + \frac{3}{2}c < z < 2L$

Teniendo en cuenta que las fuerzas exteriores distribuidas son nulas, las ecuaciones diferenciales de equilibrio para el tramo i , son⁽²⁾

$$\frac{dV_{x_i}}{dz} = 0 \quad -V_{y_i} + \left(\frac{dv_i}{dz} - x_c \frac{d\Theta_i}{dz} \right) N_{z_i} + \frac{dM_{x_i}}{dz} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{Y_i}}{dz} &= 0 & V_{X_i} - \left(\frac{du_i}{dz} + y_c \frac{d\Theta_i}{dz} \right) N_{Z_i} + \frac{dM_{Y_i}}{dz} &= 0 \\
\frac{dN_{Z_i}}{dz} &= 0 & -\frac{dv_i}{dz} V_{X_i} + \frac{du_i}{dz} V_{Y_i} + \frac{dM_{Z_i}}{dz} &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

para $i = 1, 2, 3$.

En estas ecuaciones V_{X_i} , V_{Y_i} , N_{Z_i} , M_{X_i} , M_{Y_i} y M_{Z_i} son los esfuerzos de la barra en la configuración deformada referidos a las coordenadas cartesianas fijas X , Y , Z ; u_i y v_i son las componentes de los desplazamientos de los centros de corte de las secciones en las direcciones de los ejes X e Y , respectivamente; Θ_i es la rotación de las secciones en su propio plano; x_c e y_c son las coordenadas del centro de corte.

Si integramos las ecuaciones (2) y tenemos en cuenta que las coordenadas del centro de corte son nulas y la nulidad de N_{Z_i} , se obtiene, en general, para el tramo i , (con $i=1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
V_{X_i} &= V_{X_i}^* & M_{X_i} &= V_{Y_i}^* z + M_{X_i}^* \\
V_{Y_i} &= V_{Y_i}^* & M_{Y_i} &= -V_{X_i}^* z + M_{Y_i}^* \\
N_{Z_i} &= N_{Z_i}^* & M_{Z_i} &= V_{X_i}^* v_i - V_{Y_i}^* u_i + M_{Z_i}^*
\end{aligned} \tag{3}$$

En las ecuaciones (3), las cantidades señaladas con un asterisco (*), forman un conjunto de 18 constantes de integración.

Para determinar estas constantes se plantean:

a. Las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada de un segmento de barra comprendido entre dos secciones infinitamente próximas de coordenadas,

$$z = L - \frac{c}{2} - \delta \text{ y } z = L - \frac{c}{2} + \delta \text{ con } \delta \rightarrow 0.$$

b. Las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada de un segmento de barra comprendido entre dos secciones infinitamente próximas de coordenadas,

$$z = L + \frac{3}{2}c - \delta \text{ y } z = L + \frac{3}{2}c + \delta \text{ con } \delta \rightarrow 0.$$

c. Las condiciones de continuidad.

d. Las condiciones correspondientes a los extremos articulados.

e. La ausencia de esfuerzos iniciales en la barra.

Se obtienen, entonces, los esfuerzos para el tramo 1

$$\begin{aligned}
V_{X_1} &= 0 & M_{X_1} &= P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) z \\
V_{Y_1} &= P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) & M_{Y_1} &= 0 \\
N_{Z_1} &= 0 & M_{Z_1} &= -P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) u_1 + M_{Z_1}^*,
\end{aligned} \tag{4}$$

para el tramo 2

$$\begin{aligned}
V_{x_2} &= 0 & M_{x_2} &= P \left(-\frac{c}{2L} z + L - \frac{c}{2} - v'_{12} y_A \right) \\
V_{y_2} &= -P \frac{c}{2L} & M_{y_2} &= 0 \\
N_{z_2} &= 0 & M_{z_2} &= P \left(\frac{c}{2L} u_2 + y_A \Theta_{12} - u_{12} \right) + M_{z_1}^*
\end{aligned} \tag{5}$$

y para el tramo 3

$$\begin{aligned}
V_{x_3} &= 0 & M_{x_3} &= P \left[-\left(1 + \frac{c}{2L} \right) z + 2L + c - y_A (v'_{23} + v'_{12}) \right] \\
V_{y_3} &= -P \left(1 + \frac{c}{2L} \right) & M_{y_3} &= 0 \\
N_{z_3} &= 0 & M_{z_3} &= P \left[\left(1 + \frac{c}{2L} \right) u_3 + y_A (\Theta_{23} + \Theta_{12}) - (u_{12} + u_{23}) \right] + M_{z_1}^*
\end{aligned} \tag{6}$$

En las ecuaciones (4), (5) y (6) se usa la notación

$$\begin{aligned}
v'_{12} &= \left(\frac{dv_1}{dz} \right)_{z=L-\frac{c}{2}} = \left(\frac{dv_2}{dz} \right)_{z=L-\frac{c}{2}} & v'_{23} &= \left(\frac{dv_2}{dz} \right)_{z=L+\frac{3}{2}c} = \left(\frac{dv_3}{dz} \right)_{z=L+\frac{3}{2}c} \\
\Theta_{12} &= (\Theta_1)_{z=L-\frac{c}{2}} = (\Theta_2)_{z=L-\frac{c}{2}} & \Theta_{23} &= (\Theta_2)_{z=L+\frac{3}{2}c} = (\Theta_3)_{z=L+\frac{3}{2}c} \\
u_{12} &= (u_1)_{z=L-\frac{c}{2}} = (u_2)_{z=L-\frac{c}{2}}
\end{aligned} \tag{7}$$

4 Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones

Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones son⁽²⁾

$$\begin{aligned}
EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + (y_c V_x - M_z) \frac{du}{dz} + y_c V_y \frac{dv}{dz} + (y_c V_x - x_c V_y - M_z) y_c \frac{d\Theta}{dz} + M_y \Theta + M_x &= 0 \\
EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + (x_c V_y + M_z) \frac{dv}{dz} + x_c V_x \frac{du}{dz} + (y_c V_x - x_c V_y - M_z) x_c \frac{d\Theta}{dz} + M_x \Theta - M_y &= 0 \\
EI_w \frac{d^3 \Theta}{dz^3} + (-y_c N_z + M_x) \frac{du}{dz} + (x_c N_z + M_y) \frac{dv}{dz} - (GI_t + i_c^2 N_z + r_x M_x - r_y M_y) \frac{d\Theta}{dz} + M_z &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

En estas ecuaciones, I_x , I_y son los momentos principales de inercia baricéntricos de la sección; I_w es su momento de inercia de alabeo; I_t es la constante de torsión libre; i_c es su radio de giro polar respecto del centro de corte; y r_x , r_y son dos constantes geométricas de la sección definidas por las expresiones

$$r_x = \frac{\iint_A y(x^2 + y^2) dx dy}{I_x} - 2y_c \quad r_y = \frac{\iint_A x(x^2 + y^2) dx dy}{I_y} - 2x_c \tag{9}$$

Si en las ecuaciones (8) introducimos los esfuerzos expresados por las ecuaciones (6) y se tienen en cuenta las condiciones de simetría del perfil doble Te ($r_x = r_y = x_c = y_c = 0$), se tiene para el tramo 1,

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v_1}{dz^2} + P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) z &= 0 \\ EI_y \frac{d^2 u_1}{dz^2} + P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) z \Theta_1 &= 0 \\ EI_w \frac{d^3 \Theta_1}{dz^3} + P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) z \frac{du_1}{dz} - GI_t \frac{d\Theta_1}{dz} - P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) u_1 + M_{z_1}^* &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Después de derivar la última ecuación (10) una vez respecto de z , resulta

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_1}{dz^4} + P \left(1 - \frac{c}{2L} \right) z \frac{d^2 u_1}{dz^2} - GI_t \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} = 0 \quad (11)$$

De la segunda ecuación (10), obtenemos

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = -\frac{P}{EI_y} \left(1 - \frac{c}{2L} \right) z \Theta_1 \quad (12)$$

que, reemplazada en la ecuación (11), nos da

$$EI_w \frac{d^4 \Theta_1}{dz^4} - GI_t \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} - \frac{P^2}{EI_y} \left(1 - \frac{c}{2L} \right)^2 z^2 \Theta_1 = 0 \quad (13)$$

Si procedemos en forma análoga para el tramo 2, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{dz^2} &= -\frac{P}{EI_y} \left(-\frac{c}{2L} z + L - \frac{c}{2} \right) \Theta_2 \\ EI_w \frac{d^4 \Theta_2}{dz^4} - GI_t \frac{d^2 \Theta_2}{dz^2} - \frac{P^2}{EI_y} \left(-\frac{c}{2L} z + L - \frac{c}{2} \right)^2 \Theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

y para el tramo 3

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_3}{dz^2} &= -\frac{P}{EI_y} \left[-\left(1 + \frac{c}{2L} \right) z + 2L + c \right] \Theta_3 \\ EI_w \frac{d^4 \Theta_3}{dz^4} - GI_t \frac{d^2 \Theta_3}{dz^2} - \frac{P^2}{EI_y} \left[-\left(1 + \frac{c}{2L} \right) z + 2L + c \right]^2 \Theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Las ecuaciones (13), (14) y (15), deben satisfacer las siguientes 12 condiciones:

$$(\Theta_1)_{z=0} = 0 \quad \left(\frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} \right)_{z=0} = 0 \quad (\Theta_1)_{z=L-\frac{c}{2}} = (\Theta_2)_{z=L-\frac{c}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\Theta_1}{dz}\right)_{z=L-\frac{c}{2}} &= \left(\frac{d\Theta_2}{dz}\right)_{z=L-\frac{c}{2}} & \left(\frac{d^2\Theta_1}{dz^2}\right)_{z=L-\frac{c}{2}} &= \left(\frac{d^2\Theta_2}{dz^2}\right)_{z=L-\frac{c}{2}} \\
EI_w \left(\frac{d^3\Theta_1}{dz^3}\right)_{z=L-\frac{c}{2}} - EI_w \left(\frac{d^3\Theta_2}{dz^3}\right)_{z=L-\frac{c}{2}} - Py_A \Theta_{12} &= 0 & (\Theta_2)_{z=L+\frac{3}{2}c} &= (\Theta_3)_{z=L+\frac{3}{2}c} \quad (16) \\
\left(\frac{d\Theta_2}{dz}\right)_{z=L+\frac{3}{2}c} &= \left(\frac{d\Theta_3}{dz}\right)_{z=L+\frac{3}{2}c} & \left(\frac{d^2\Theta_2}{dz^2}\right)_{z=L+\frac{3}{2}c} &= \left(\frac{d^2\Theta_3}{dz^2}\right)_{z=L+\frac{3}{2}c} \\
EI_w \left(\frac{d^3\Theta_2}{dz^3}\right)_{z=L+\frac{3}{2}c} - EI_w \left(\frac{d^3\Theta_3}{dz^3}\right)_{z=L+\frac{3}{2}c} - Py_A \Theta_{23} &= 0 & (\Theta_3)_{z=2L} &= 0 \quad \left(\frac{d^2\Theta_3}{dz^2}\right)_{z=2L} = 0
\end{aligned}$$

Si definimos los adimensionales

$$\zeta = \frac{z}{2L} \quad \kappa = \frac{c}{L} \quad \alpha = \frac{GI_t L^2}{EI_w} \quad \beta = \sqrt{\frac{EI_y}{GI_t}} \quad \gamma = \frac{PL^2}{\sqrt{EI_y GI_t}} \quad (17)$$

las ecuaciones (13), (14) y (15) pueden escribirse en la forma

$$\frac{d^4\Theta_i}{d\zeta^4} - 4\alpha \frac{d^2\Theta_i}{d\zeta^2} - 16\gamma^2 \alpha \left(4\eta_i^2 \zeta^2 + 4\eta_i \sigma_i \zeta + \sigma_i^2\right) \Theta_i = 0 \quad (18)$$

con $i=1, 2, 3$, y donde los adimensionales η_i y σ_i , están definidos en la forma indicada en la tabla 4

Tabla 4. Valores de los adimensionales η_i y σ_i .

i	1	2	3
η_i	$1 - \frac{\kappa}{2}$	$-\frac{\kappa}{2}$	$-\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)$
σ_i	0	$1 - \frac{\kappa}{2}$	$2 + \kappa$

Con la adopción de la variable ζ los intervalos correspondientes a los tres tramos de la viga son los indicados en la Tabla 5.

Tabla 5. Intervalos en que se divide la longitud de la viga

Tramo	1	2	3
Intervalo	$0 < \zeta < \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{4} = \zeta_1$	$\zeta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{4} < \zeta < \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\kappa = \zeta_2$	$\zeta_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\kappa < \zeta < 1$

Si tenemos en cuenta que en el caso de perfiles doble Te, como el indicado en la figura 2, es

$$I_y = \frac{tb^3}{6} \quad I_t = \frac{2bt^3 + hs^3}{3} \quad I_w = \frac{b^3 h^2 t}{24} \quad (19)$$

y si introducimos estas expresiones en la tercera y cuarta ecuación (17), se obtiene

$$\alpha = \frac{16t^2 L^2}{b^2 h^2} \frac{G}{E} \left(1 + \frac{hs^3}{2bt^3} \right) \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{b}{t} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{hs^3}{2bt^3}}} \quad (20)$$

con lo que resulta entonces

$$\alpha \beta \frac{y_A}{L} = \sqrt{\alpha \varepsilon} \quad (21)$$

En la ecuación (21), ε es un adimensional definido por la expresión

$$\varepsilon = \frac{2y_A}{h} \quad (22)$$

Las doce condiciones (16) pueden entonces ponerse en forma adimensional

$$\begin{aligned} (\Theta_1)_{\zeta=0} &= 0 & \left(\frac{d^2 \Theta_1}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=0} &= 0 & (\Theta_1)_{\zeta=\zeta_1} &= (\Theta_2)_{\zeta=\zeta_1} & \left(\frac{d\Theta_1}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_1} &= \left(\frac{d\Theta_2}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_1} \\ \left(\frac{d^2 \Theta_1}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=\zeta_1} &= \left(\frac{d^2 \Theta_2}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=\zeta_1} & \left(\frac{d^3 \Theta_1}{d\zeta^3} \right)_{\zeta=\zeta_1} - \left(\frac{d^3 \Theta_2}{d\zeta^3} \right)_{\zeta=\zeta_1} - \lambda (\Theta_1)_{\zeta=\zeta_1} &= 0 \\ (\Theta_2)_{\zeta=\zeta_2} &= (\Theta_3)_{\zeta=\zeta_2} & \left(\frac{d\Theta_2}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_2} &= \left(\frac{d\Theta_3}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_2} & \left(\frac{d^2 \Theta_2}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=\zeta_2} &= \left(\frac{d^2 \Theta_3}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=\zeta_2} & \left(\frac{d^3 \Theta_2}{d\zeta^3} \right)_{\zeta=\zeta_2} - \left(\frac{d^3 \Theta_3}{d\zeta^3} \right)_{\zeta=\zeta_2} - \lambda (\Theta_2)_{\zeta=\zeta_2} &= 0 \\ (\Theta_3)_{\zeta=1} &= 0 & \left(\frac{d^2 \Theta_3}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=1} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

En estas expresiones se ha puesto

$$\lambda = 8\gamma \sqrt{\alpha \varepsilon} \quad (24)$$

Las ecuaciones (23) son las condiciones que deben satisfacer las ecuaciones diferenciales (18).

5 La solución de las ecuaciones diferenciales del problema

Las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales (18) pueden encontrarse proponiendo series de potencias de la forma

$$\Theta_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,m}^{(i)} \zeta^{m+j} \quad (25)$$

donde $i = 1, 2, 3$ y m es una constante.

Si introducimos la ecuación (25) en cada una de las ecuaciones diferenciales (18), se obtienen series de potencias de ζ donde la menor potencia es ζ^{m-4} . Si anulamos el coeficiente de esa potencia en la serie, resultan las ecuaciones

$$a_{0,m}^{(i)} m(m-1)(m-2)(m-3) = 0 \quad (26)$$

con $i = 1, 2, 3$.

Estas ecuaciones se satisfacen cuando

$$m = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad (27)$$

y adoptamos arbitrariamente $a_{0,m}^{(i)} = 1$.

Si anulamos todos los demás coeficientes de las series de potencias resultantes, se obtienen los coeficientes $a_{j,m}^{(i)}$ de cuatro series de potencias de la forma (25) que son soluciones de las ecuaciones diferenciales (18).

Entonces, las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales (18) pueden expresarse como la suma de cuatro series multiplicadas por sendas constantes arbitrarias, o sea

$$\Theta_i = \sum_{m=0}^3 A_m^{(i)} f_m^{(i)} \quad (28)$$

donde $A_m^{(i)}$ son doce constantes arbitrarias. Las series son

$$f_m^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,m}^{(i)} \zeta^{m+j} \quad (29)$$

con $m = 0, 1, 2, 3$ e $i = 1, 2, 3$.

Los coeficientes de las series en la expresión (29) son

$$\begin{aligned} a_{0,m}^{(i)} &= 1 & a_{1,m}^{(i)} &= 0 & a_{2,m}^{(i)} &= \frac{4\alpha}{(m+2)(m+1)} & a_{3,m}^{(i)} &= 0 \\ a_{4,m}^{(i)} &= \frac{4\alpha}{(m+4)(m+3)} a_{2,m}^{(i)} + \frac{16\gamma^2 \alpha \sigma_i^2}{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)} \\ a_{5,m}^{(i)} &= \frac{64\gamma^2 \alpha \eta_i \sigma_i}{(m+5)(m+4)(m+3)(m+2)} \end{aligned} \quad (30)$$

$$a_{6,m}^{(i)} = \frac{4\alpha a_{4,m}^{(i)}}{(m+6)(m+5)} + 16\gamma^2 \alpha \frac{\sigma_i^2 a_{2,m}^{(i)} + 4\eta_i^2}{(m+6)(m+5)(m+4)(m+3)}$$

$$a_{j,m}^{(i)} = \frac{4\alpha a_{j-2,m}^{(i)}}{(m+j)(m+j-1)} + 16\gamma^2 \alpha \frac{\sigma_i^2 a_{j-4,m}^{(i)} + 4\eta_i \sigma_i a_{j-5,m}^{(i)} + 4\eta_i^2 a_{j-6,m}^{(i)}}{(m+j)(m+j-1)(m+j-2)(m+j-3)},$$

para $j = 7, 8, \dots, \infty$.

Las derivadas primera, segunda y tercera de las series (29) son

$$f_m'^{(i)} = \frac{df_m^{(i)}}{d\zeta} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,m}^{(i)} (m+j) \zeta^{m+j-1}$$

$$f_m''^{(i)} = \frac{d^2 f_m^{(i)}}{d\zeta^2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,m}^{(i)} (m+j)(m+j-1) \zeta^{m+j-2} \quad (31)$$

$$f_m'''^{(i)} = \frac{d^3 f_m^{(i)}}{d\zeta^3} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,m}^{(i)} (m+j)(m+j-1)(m+j-2) \zeta^{m+j-3}$$

Si introducimos la ecuación (28) en las dos primeras ecuaciones (23), se obtiene

$$A_0^{(1)} = 0 \quad A_2^{(1)} = 0 \quad (32)$$

Si se plantean las restantes condiciones (23), se obtiene un sistema de diez ecuaciones lineales algebraicas homogéneas en $A_1^{(1)}$, $A_3^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$, $A_3^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, $A_1^{(3)}$, $A_2^{(3)}$ y $A_3^{(3)}$. La condición para que este sistema tenga soluciones distintas de la trivial es que se anule el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|K_{ij}| = 0 \quad (33)$$

donde la matriz $[K_{ij}]$ tiene dimensiones de 10 filas y 10 columnas y sus elementos pueden verse en la tabla 6.

Tabla 6. Elementos de la matriz $[K_{ij}]$

	1	2	3
1	$(f_1^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$(f_3^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_0^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
2	$(f_1'^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$(f_3'^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_0'^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
3	$(f_1''^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$(f_3''^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_0''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
4	$(f_1'''^{(1)})_{\zeta=\zeta_1} - \lambda(f_1^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$(f_3'''^{(1)})_{\zeta=\zeta_1} - \lambda(f_3^{(1)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_0'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
5	0	0	$(f_0^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
6	0	0	$(f_0'^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
7	0	0	$(f_0''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
8	0	0	$(f_0'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2} - \lambda(f_0^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
9	0	0	0
10	0	0	0

	4	5	6
1	$-(f_1^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_2^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_3^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
2	$-(f_1'^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_2'^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_3'^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
3	$-(f_1''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_2''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_3''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
4	$-(f_1'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_2'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$	$-(f_3'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_1}$
5	$(f_1^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_2^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_3^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
6	$(f_1'^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_2'^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_3'^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
7	$(f_1''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_2''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_3''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
8	$(f_1'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2} - \lambda(f_1^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_2'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2} - \lambda(f_2^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$	$(f_3'''^{(2)})_{\zeta=\zeta_2} - \lambda(f_3^{(2)})_{\zeta=\zeta_2}$
9	0	0	0
10	0	0	0

	7	8	9	10
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	$-(f_0^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_1^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_2^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_3^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$
6	$-(f_0'^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_1'^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_2'^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_3'^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$
7	$-(f_0''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_1''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_2''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_3''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$
8	$-(f_0'''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_1'''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_2'''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$	$-(f_3'''^{(3)})_{\zeta=\zeta_2}$
9	$(f_0^{(3)})_{\zeta=1}$	$(f_1^{(3)})_{\zeta=1}$	$(f_2^{(3)})_{\zeta=1}$	$(f_3^{(3)})_{\zeta=1}$
10	$(f_0''^{(3)})_{\zeta=1}$	$(f_1''^{(3)})_{\zeta=1}$	$(f_2''^{(3)})_{\zeta=1}$	$(f_3''^{(3)})_{\zeta=1}$

Los elementos del determinante de la ecuación (33) se calculan con las expresiones (29) y (31).

La ecuación (33) es una función de la forma

$$F(\alpha, \kappa, \varepsilon, \gamma) = 0 \quad (34)$$

donde el adimensional α depende de las propiedades geométricas y mecánicas de la viga, κ representa a la distancia entre las cargas del tren de cargas, ε caracteriza a la ubicación del punto de aplicación de las cargas en el plano de la sección y γ es un adimensional que representa a la magnitud de las cargas con relación a las propiedades de la viga; la definición de estos adimensionales puede verse en las expresiones (17) y (22).

Fijados α , κ y ε , se obtiene γ_{cr} como la menor raíz real positiva de la función (34), lo que permite calcular la carga crítica en régimen elástico mediante la expresión

$$P_{cr} = \gamma_{cr} \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L^2} \quad (35)$$

6 Los resultados obtenidos

Se realizaron los cálculos de γ_{cr} tomando para α valores en el intervalo $0,1 \leq \alpha \leq 100$, que coinciden con los considerados por Timoshenko⁽³⁾ en el

problema de pandeo lateral de una viga de sección doble Te bajo la acción de una fuerza concentrada en el centro.

Los valores de κ se tomaron entre 0,1 y 0,6, variando en intervalos de 0,1.

Los valores considerados para ε son $-1,0$ (cargas aplicadas en el centro del ala superior) y valores $-1,2$, $-1,4$, $-1,6$, $-1,8$ y $-2,0$, que corresponden a posiciones de las cargas por encima del ala superior, como los que se dan usualmente en las vigas carrileras.

Para realizar los cálculos se desarrolló un programa de computación en lenguaje Fortran en el que se usó doble precisión. Las series fueron evaluadas mediante la suma de sus doscientos primeros términos ($j = 0, 1, \dots, 200$), después de comprobar que los resultados no experimentaban cambio con cantidades de términos menores que la adoptada

Los resultados obtenidos se consignan en las tablas 7 a 12. Los valores correspondientes a los lugares ocupados con un asterisco, no han podido determinarse.

Tabla 7.
Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,0$.

α	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$
0.1	6.598	7.124	8.052	9.464	11.42	13.85
1	2,590	2,793	3,149	3,690	4,438	5,378
2	2,185	2,353	2,648	3,095	3,715	4,500
4	1,980	2,130	2,391	2,785	3,334	4,035
6	1,924	2,068	2,318	2,695	3,220	3,897
8	1,905	2,047	2,291	2,660	3,174	3,842
12	1,899	2,038	2,278	2,640	3,145	3,807
16	1,904	2,043	2,281	2,640	3,141	3,804
20	1,912	2,051	2,288	2,645	3,146	3,810
24	1,921	2,059	2,296	2,652	3,153	3,820
40	1,950	2,088	2,325	2,681	3,182	3,860
60	1,975	2,113	2,350	2,707	3,212	*
80	1,993	2,131	2,368	2,723	3,245	*
100	2,006	2,145	2,385	2,748	*	*

Tabla 8.
Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,2$.

α	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$
0.1	6.010	6.505	7.380	8.712	10.54	12.75
1	2,383	2,576	2,915	3,429	4,135	4,996
2	2,026	2,187	2,470	2,898	3,486	4,209
4	1,856	2,001	2,253	2,634	3,157	3,811
6	1,817	1,957	2,199	2,565	3,069	3,703
8	1,808	1,946	2,185	2,544	3,039	3,667
12	1,814	1,951	2,186	2,540	3,029	3,656
16	1,828	1,965	2,199	2,551	3,038	3,668
20	1,843	1,979	2,213	2,564	3,051	3,686
24	1,856	1,993	2,226	2,577	3,065	3,704
40	1,897	2,034	2,269	2,620	3,112	3,766
60	1,930	2,068	2,303	2,656	3,152	*
80	1,953	2,091	2,327	2,677	3,174	*
100	1,970	2,109	2,347	2,718	*	*

Tabla 9.
Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,4$.

α	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$
0.1	5.499	5.965	6.790	8.046	9.756	11.77
1	2,200	2,383	2,705	3,194	3,859	4,651
2	1,883	2,038	2,308	2,718	3,275	3,944
4	1,742	1,882	2,126	2,493	2,993	3,602
6	1,717	1,853	2,089	2,443	2,926	3,521
8	1,717	1,852	2,084	2,433	2,910	3,501
12	1,735	1,869	2,099	2,444	2,917	3,512
16	1,756	1,891	2,121	2,465	2,938	3,538
20	1,776	1,911	2,141	2,485	2,959	3,566
24	1,793	1,929	2,159	2,504	2,980	3,593
40	1,845	1,982	2,214	2,561	3,042	3,675
60	1,887	2,024	2,257	2,606	3,094	*
80	1,915	2,052	2,286	2,636	3,116	*
100	1,935	2,074	2,314	*	*	*

Tabla 10.
Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,6$.

α	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$
0.1	5.055	5.493	6.270	7.455	9.058	10.91
1	2,037	2,211	2,517	2,982	3,610	4,340
2	1,755	1,903	2,162	2,553	3,082	3,701
4	1,638	1,773	2,008	2,362	2,840	3,408
6	1,624	1,756	1,985	2,328	2,792	3,349
8	1,632	1,763	1,990	2,329	2,788	3,344
12	1,659	1,791	2,017	2,353	2,811	3,374
16	1,687	1,820	2,046	2,383	2,842	3,413
20	1,712	1,845	2,072	2,409	2,871	3,451
24	1,734	1,867	2,095	2,433	2,897	3,484
40	1,796	1,931	2,161	2,503	2,975	3,585
60	1,844	1,981	2,212	2,557	3,036	*
80	1,877	2,014	2,247	2,598	3,090	*
100	1,900	2,038	2,283	2,488	*	*

Tabla 11.
Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,8$.

α	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$
0.1	4.667	5.079	5.812	6.930	8.436	10.14
1	1,893	2,058	2,349	2,791	3,384	4,060
2	1,640	1,781	2,029	2,403	2,905	3,480
4	1,543	1,673	1,900	2,241	2,698	3,228
6	1,539	1,667	1,889	2,221	2,666	3,189
8	1,552	1,681	1,901	2,230	2,672	3,197
12	1,589	1,718	1,938	2,267	2,709	3,243
16	1,622	1,753	1,974	2,304	2,749	3,293
20	1,651	1,783	2,005	2,336	2,785	3,339
24	1,676	1,808	2,032	2,365	2,816	3,379
40	1,747	1,882	2,109	2,446	2,908	3,498
60	1,803	1,939	2,168	2,509	2,980	*
80	1,840	1,977	2,208	2,553	2,999	*
100	1,867	2,002	2,234	*	*	*

Tabla 12.
Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -2,0$.

α	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$
0.1	4.327	4.715	5.407	6.463	7.880	9.455
1	1,765	1,921	2,198	2,618	3,180	3,807
2	1,536	1,671	1,908	2,266	2,743	3,279
4	1,456	1,582	1,800	2,128	2,565	3,062
6	1,460	1,584	1,799	2,120	2,548	3,039
8	1,478	1,603	1,818	2,137	2,563	3,058
12	1,522	1,648	1,864	2,184	2,612	3,118
16	1,560	1,689	1,906	2,228	2,660	3,178
20	1,593	1,723	1,942	2,266	2,702	3,231
24	1,621	1,752	1,972	2,298	2,739	3,278
40	1,701	1,834	2,059	2,391	2,844	3,412
60	1,762	1,898	2,125	2,462	2,925	*
80	1,803	1,940	2,169	2,505	2,975	*
100	1,834	1,970	2,195	*	*	*

Los valores de γ_{cr} suministrados en las tablas se representan gráficamente en las figuras 13 a 18, donde cada curva se corresponde con un valor de κ .

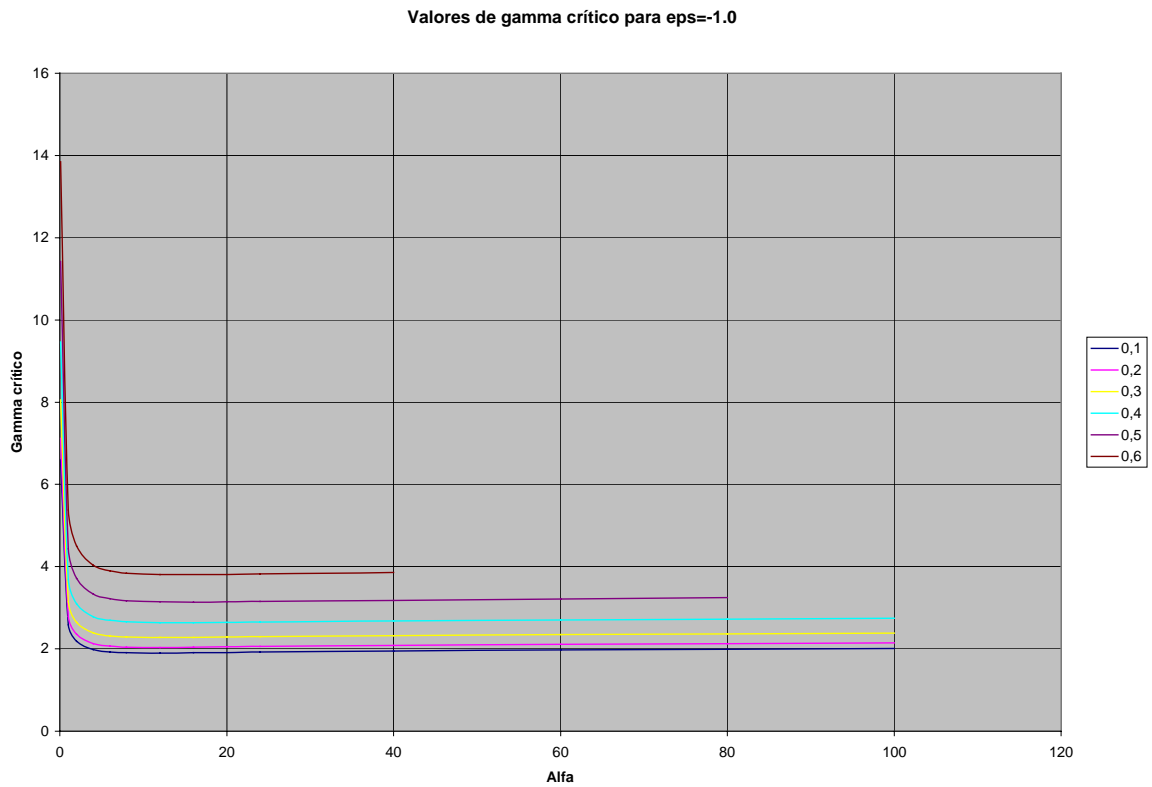


Fig. 13. Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,0$.

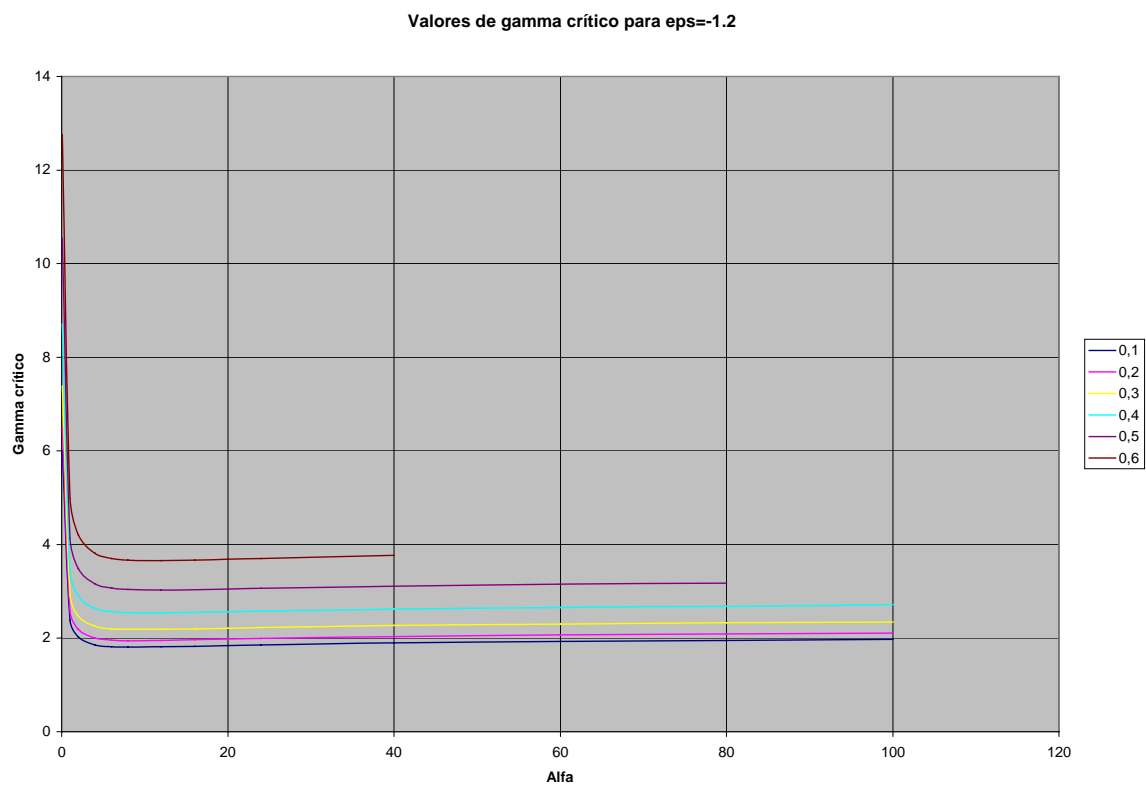


Fig. 14. Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,2$.

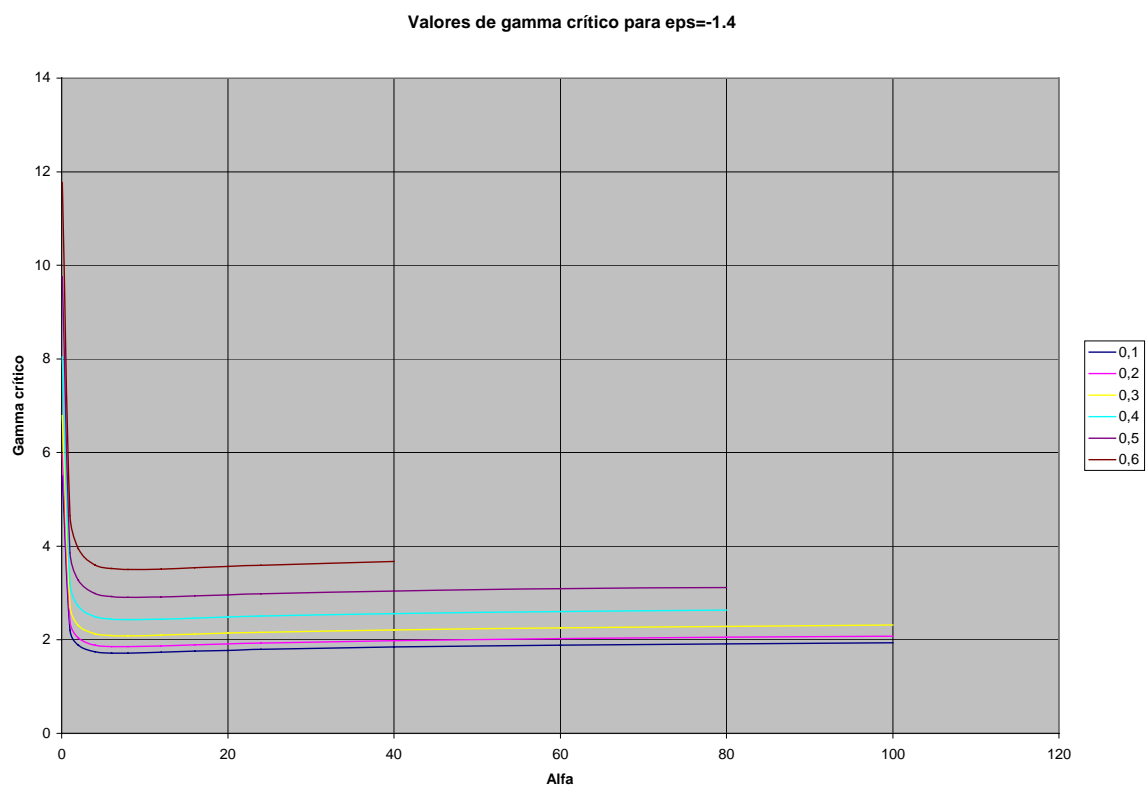


Fig. 15. Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -1,4$.

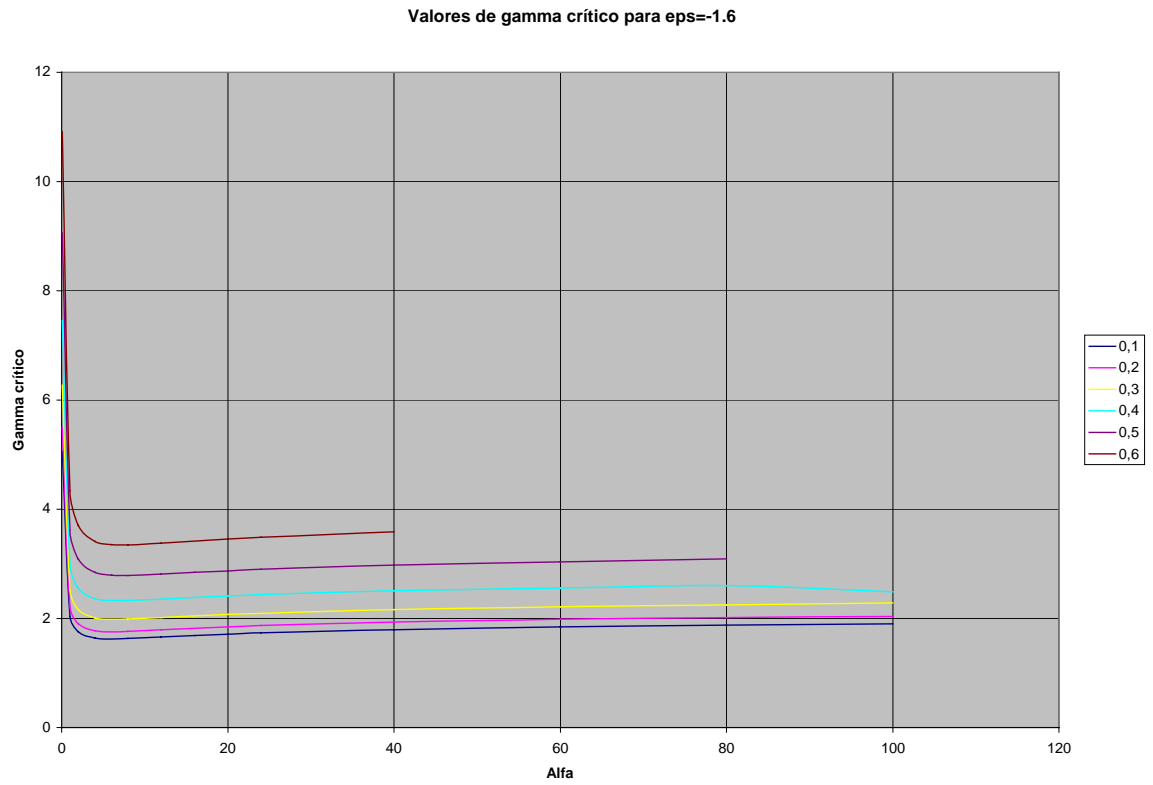


Fig. 16. Valores de γ_{cr} para $\epsilon = -1.6$.

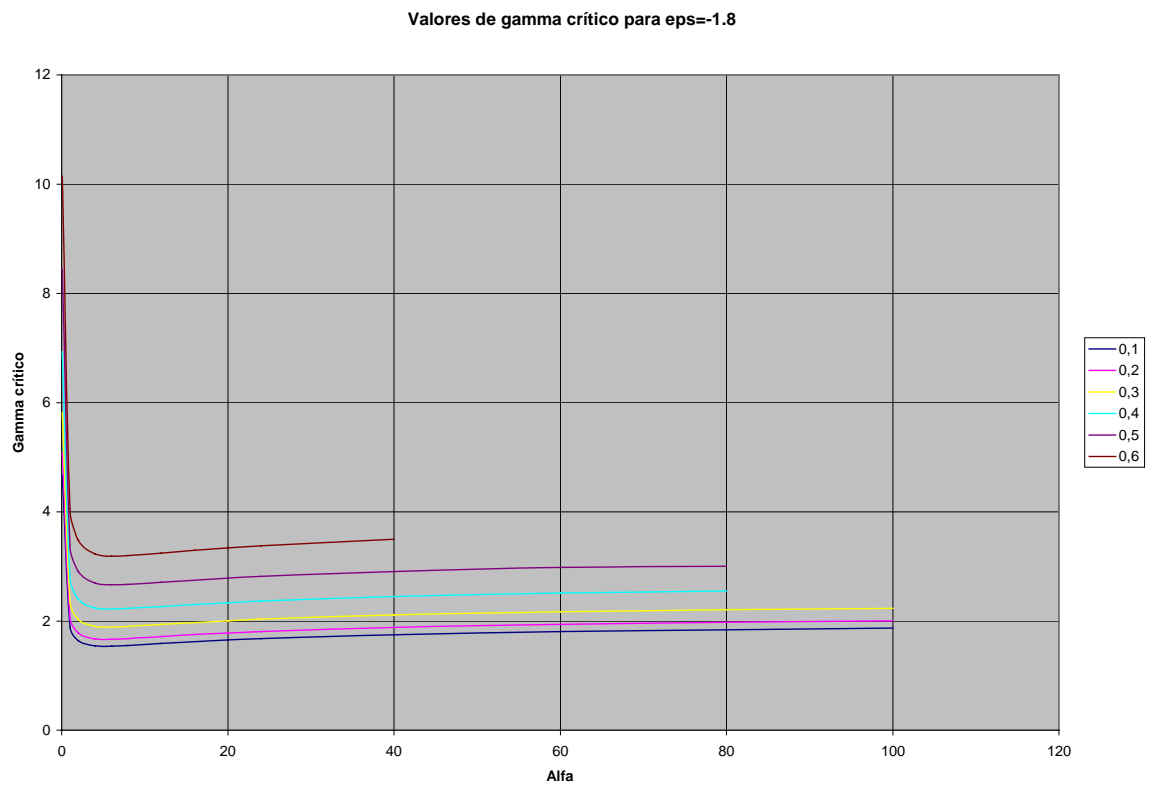


Fig. 17. Valores de γ_{cr} para $\epsilon = -1.8$.

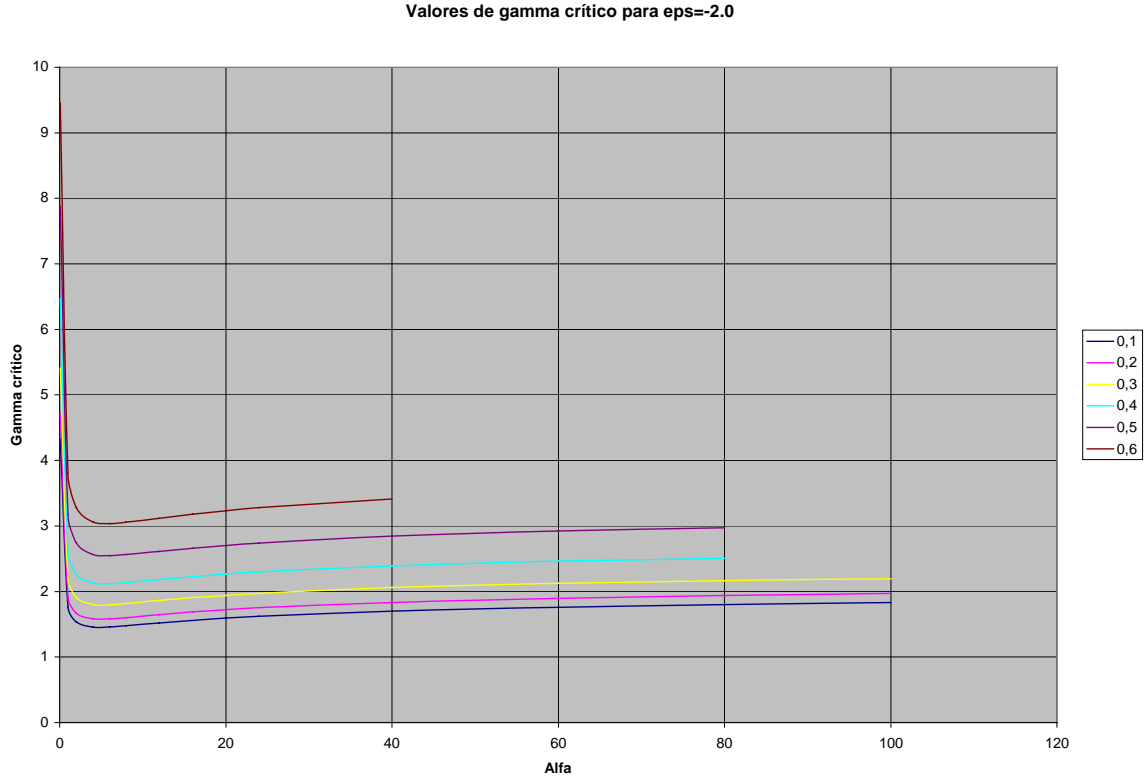


Fig. 18. Valores de γ_{cr} para $\varepsilon = -2,0$.

7 Cálculo de las cargas críticas mediante el Eurocode 3

La norma europea Eurocode 3⁽⁴⁾ contiene una fórmula general para el cálculo de momentos flexores críticos en régimen elástico que permite tener en cuenta la altura de aplicación de las cargas, pero la norma no trae los valores de los coeficientes necesarios para realizar los cálculos correspondientes a este caso, por lo que no puede aplicarse.

8 Cálculo de las cargas críticas mediante la Norma AISI

La norma americana ya citada⁽¹⁾ contiene fórmulas aproximadas que permiten el cálculo del momento crítico cuando las cargas están aplicadas a lo largo del eje baricéntrico de la viga. Dichas fórmulas pueden llegar a expresarse en términos de los adimensionales utilizados en el presente trabajo y resultan las expresiones

$$(\gamma_{cr})_a = \frac{6.25 \pi}{9.5 - 6.5 \kappa - 0.625 \kappa^2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4\alpha}}, \quad \text{para } \kappa \leq \frac{1}{3} \quad (36)$$

$$(\gamma_{cr})_a = \frac{6.25 \pi}{11 - 11 \kappa - 0.625 \kappa^2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4\alpha}}, \quad \text{para } \frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3} \quad (37)$$

Nos pareció interesante comparar los resultados de la norma americana con los obtenidos en el presente trabajo cuando las cargas se suponen aplicadas en el centro del ala superior, o sea para $\varepsilon = -1,0$. Si tomamos a estos últimos como

valores exactos, se pueden calcular en cada caso los errores relativos porcentuales

$$E_a = \frac{\gamma_{cr} - (\gamma_{cr})_a}{(\gamma_{cr})_a} 100\% \quad (38)$$

que se consignan en la tabla 19.

Tabla 19. Valores de E_a para $\varepsilon = -1,0$.

α	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,3$	$\kappa=0,4$	$\kappa=0,5$	$\kappa=0,6$
0,1	-41,3	-41,1	-37,2	-36,3	-35,1	-35,6
1	-37,3	-37,2	-33,2	-32,4	-31,3	-32,0
2	-34,1	-34,1	-30,0	-29,3	-28,4	-29,1
4	-29,8	-29,8	-25,7	-25,3	-24,5	-25,3
6	-26,9	-27,1	-22,9	-22,6	-21,9	-22,7
8	-24,9	-25,0	-20,9	-20,6	-20,1	-20,9
12	-22,0	-22,2	-18,0	-18,0	-17,5	-18,3
16	-20,1	-20,3	-19,1	-16,1	-15,8	-16,6
20	-18,6	-18,9	-14,7	-14,8	-14,5	-15,3
24	-17,5	-17,9	-13,6	-13,8	-13,5	-14,3
40	-14,6	-15,1	-10,9	-11,2	-11,0	-11,8
60	-12,7	-13,3	-9,0	-9,5	-9,3	*
80	-11,5	-12,1	-7,9	-8,4	-7,9	*
100	-10,6	-11,2	-6,9	-7,4	*	*

Los valores negativos indican que los errores están del lado de la inseguridad. Cuando la carga está por encima del ala superior, los errores del reglamento americano son más grandes.

9 Conclusiones

9.1 Los valores críticos de las cargas que producen el pandeo lateral torsional en régimen elástico en el caso estudiado, pueden calcularse mediante las tablas 7 a 12. En ellas puede apreciarse la importancia de la altura del punto de aplicación de las cargas.

9.2 Las fórmulas aproximadas adoptadas por la norma americana adolecen de errores que están del lado de la inseguridad y que son tanto mayores cuanto más alto es el punto de aplicación de las cargas. Cuando éstas están aplicadas en el centro del ala superior de la sección, los errores pueden apreciarse en la tabla 19.

10 Referencias

- (1) AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, INC. "ANSI/AISC 360/05 Specification for Structural Steel Buildings". Chicago, 2005.
- (2) Rezk H., "Teoría de segundo orden de las barras elásticas prismáticas de sección abierta y paredes delgadas". Ed. Fac. de Ing. de la Univ. de Buenos Aires, 1981.
- (3) Timoshenko S. P. y Gere J. M., "Theory of Elastic Stability". Ed. McGraw-Hill, 1961.

- (4) Comité Européen de Normalisation, "Eurocode 3, Calcul des structures en acier et Document d'Application National. Partie 1: Règles générales et règles pour les bâtiments". Association Française de Normalisation, 1992.