ICIRSOC

Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales
de Seguridad para las Obras Civiles del Sistema INTI

BIBLIOTECA DE APOYO

**UNIVERSIDAD NACIONAL
DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,
INGENIERIA Y AGRIMENSURA**

PANDEO EN EL CAMPO REAL DE BARRAS DE ACERO

NUEVAS NORMAS DE LA CONSTRUCCION METALICA SEGUN DIN 18.800, AISC Y LA CONVENCION EUROPEA

Ing. Omar Miño

Febrero 1992

CIRSOC

INTI CIRSOC

Av. Cabildo 65 Subsuelo - Ala Savio
(C1426AAA) Ciudad Autónoma de Buenos Aires
República Argentina

Tel./Fax:(54 11) 4779-5271/5273
Web: www.inti.gob.ar/cirsoc
E-mail: cirsoc@ffmm.gov.ar
cirsoc@inti.gob.ar

Primer Director Técnico († 1980): Ing. Luis María Machado

Directora Técnica: Inga. Marta S. Parmigiani
Subdirector Técnico: Ing. Gustavo E. Darin

Editado por INTI
INSTITUTO NACIONAL DE TECNOLOGIA INDUSTRIAL
Av. Leandro N. Alem 1067 - 7° piso Buenos Aires

CIRSOC

ORGANISMOS PROMOTORES

Secretaría de Obras Públicas y Comunicaciones

Instituto Nacional de Tecnología Industrial

Secretaría de Estado de Desarrollo Urbano y Vivienda

Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires

Comisión Nacional de Energía Atómica

MIEMBROS ADHERENTES

Consejo Interprovincial de Ministros de Obras Públicas

Empresa del Estado Agua y Energía Eléctrica

AUTOR:

ING. OMAR MIÑO

- Profesor titular de Construcciones Metálicas I de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.
- Profesor titular de Construcciones Metálicas y de Madera de la Facultad Regional Venado Tuerto de la Universidad Tecnológica Nacional (U.T.N).
- Ex-Profesor Asociado de Construcciones Metálicas y de Madera de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Buenos Aires (U.B.A.).

PROLOGO:

La publicación del presente trabajo realizado por el Ing. Omar Miño tiene por objeto contribuir al conocimiento de los criterios y conceptos actuales relacionados con la inestabilidad del equilibrio de barras de acero según las normas de construcción metálica más modernas.

Se tratan en profundidad los conceptos básicos elaborados por la Convención Europea de la Construcción Metálica (CECM) incluidos en el EUROCODE 3 y en la Norma DIN 18800 y se presentan también los fundamentos del tema según la Norma del American Institute of Steel Construction (AISC) "Load and Resistance Factor Design". Se incluyen comparaciones de los resultados entre las normas analizadas y ejemplos de cálculo aclaratorios.

El **CIRSOC** agradece al autor y a la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario la autorización para publicar este trabajo que será un valioso antecedente para el estudio de las alternativas que pueden servir de base a la actualización de nuestros Reglamentos de Seguridad para las Obras Civiles.

Dirección Técnica
CIRSOC

PROLOGO DEL AUTOR

Los países Europeos en 1955 resuelven reunirse, a fin de aunar criterios y terminar con las discrepancias que tienen los diversos reglamentos.

Sabían de antemano que no sería una tarea fácil, por eso decidieron enfrentar el problema y en 1960 siguiendo una proposición, la C.E.C.M. (Convención Europea de la Construcción Metálica) decide organizar una gran campaña de ensayos de laboratorio y establecer además un estudio teórico del fenómeno "Pandeo", basado en una simulación numérica. Dicha simulación consiste en encontrar la solución numérica de las ecuaciones que formula el Pandeo, en una barra que no es perfecta.

No solamente se realizaron ensayos para la determinación de cargas críticas estadísticas probabilísticas, sino también para determinar las tensiones previas del material y las tensiones de fluencia, también con criterios estadísticos probabilísticos, evaluando asimismo la homogeneidad e isotropía del acero.

Antes de ser ensayadas las barras, se determina la deformación previa de las mismas y cual sería su posible excentricidad.

Los ensayos de laboratorio y los trabajos teóricos permiten que en 1970 la Comisión N° 8 de la C.E.C.M. proponga tres curvas adimensionales, establecidas en función de diferentes tipos de perfiles, teniendo en cuenta sus heterogeneidades tanto estructurales como geométricas.

Esta primera presentación tuvo sus críticas, que fueron corregidas en 1976, siguiéndose además con los ensayos de laboratorio y los estudios teóricos.

En 1978 se realiza una nueva presentación y en 1979 Alemania presenta un proyecto de norma DIN 18800. Posteriormente estos proyectos sufren nuevas modificaciones que pueden verse en EUROCODE de 1984 y posteriormente en EUROCODE de 1990 por parte de la C.E.C.M. y la DIN sufre modificaciones en 1987 y 1990, siendo esta última una norma y no un proyecto.

Cabe destacar que desde 1960, nunca se dejaron de realizar ensayos de laboratorio y estudios teóricos, actualmente continúan realizandose con el objeto de afinar valores y algunas posibles discrepancias, contándose con experiencias de laboratorio de más de 30 años.

Basándome en publicaciones y textos, que figuran en la parte bibliográfica he tratado de resumir los diferentes estudios, comenzando con un breve repaso histórico de trabajos realizados en el campo teórico, para terminar con un acercamiento físico del problema de Pandeo, ya que no se habían realizado ensayos de laboratorio estadísticos probabilísticos, que son los que nos aproximan a la realidad.

Por último agradezco la colaboración prestada por los Ingenieros Horacio J. Favarel y Sergio Grossman, como asimismo al alumno Marcelo G. Vega.

EL AUTOR

I N D I C E

Pag.

Prólogo

CAPITULO I : Introducción

1.1. Reseña histórica.................................1

CAPITULO II : NUEVO ESTUDIO DEL PANDEO EN EL CAMPO REAL

2.1. La barra articulada..............................29

2.2. ESTUDIO DE LAS DIVERSAS INFLUENCIAS EJERCIDAS POR LAS IMPERFECCIONES.

2.2.1. Tensiones residuales...........................34

2.2.2. Excentricidad por Aplicación de Cargas.....40

2.2.3. Influencia de las cargas laterales..........41

2.2.4. Las curvas de pandeo. Conclusiones finales..42

2.2.5. Las curvas de influencia. Espesor de pared...43

CAPITULO III: LAS CURVAS EUROPEAS DE PANDEO Y SUS LIMITES

3.1. Origen de las Curvas.............................65

3.2. Mecanismo de verificación de secciones........73

3.3. Modificaciones recientes.........................82

3.4. Limites de las curvas de pandeo.................91

CAPITULO IV : FORMULACION ANALITICA SIMPLE DE LAS CURVAS DE PANDEO

4.1. Comentarios.......................................94

4.2. Ajuste de las curvas..............................96

CAPITULO V : CRITERIO AMERICANO

5.1. Reglamentación americana de 1986..............104

CAPITULO VI : PANDEO EN BARRAS COMPUESTAS

6.1. Influencia del esfuerzo de corte sobre la carga crítica..................................109

6.2. Barras con diagonales...........................111

6.3. Barras con presillas............................113

6.4. Proceso de verificación de secciones.........116

6.5. Procedimiento de Domke..........................124

BIBLIOGRAFIA..129

APLICACIONES PRACTICAS..................................133

CAPITULO 1: Introducción.-

1.1.- Reseña Histórica:

Pandeo en el campo real:Nueva Norma de la Convención Europea de la Construcción Metálica.-

El comportamiento de una barra cargada axialmente ha sido siempre un problema complejo. Los primeros estudios respecto a este tema ha sido sobre la estabilidad de soportes de piedra y de madera, que se le atribuyen a **Herón de Alejandria** alrededor del año 75 AC.-

En el siglo XV, **Leonardo Da Vinci** (1452- 1519) escribió varias notas sobre la descripción de este fenómeno, pero recién en 1729 el físico holandés **Petrus Van Musschenbroek** (1629- 1761), propone por primera vez una fórmula empírica resultado de una serie de experimentos sistemáticos diciendo que la carga crítica de una columna biarticulada, es inversamente proporcional al cuadrado de su longitud.-

Algunos años más tarde el matemático **Leonard Euler** (1707- 1783), inspirado en los trabajos de **Jacob Bernoulli** (1654- 1705) establece la primera fórmula general para una barra inelástica ideal:

$$(1)\quad N = \frac{\pi^2 R}{l^2} \qquad R = \text{Momento de rigidez}$$

Recién en 1778 Euler propone una fórmula para el caso elástico:

$$(2)\quad N_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

que corresponde al valor minimo no nulo de la siguiente ecuación diferencial:

$$(3)\quad W'' + k^2 W = 0 \qquad k^2 = \frac{N}{EI}$$

pero esta ecuación posee infinitas soluciones y son del tipo:

$$(4)\quad N_k = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

donde n es un número entero y representa la cantidad de semiondas respecto de la forma de pandeo indeterminada y su ecuación es de forma senoidal (Figura A):

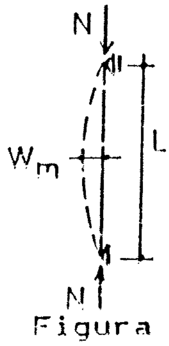


Figura A

y corresponde al problema de una barra ideal perfecta, con carga N perfectamente centrada que la lleva a una bifurcación del equilibrio pues no tiene en cuenta las imperfecciones inevitables de la barra.-

y esto conduce a la siguiente ecuación:

(10)

$$\frac{1}{\lambda_k}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_k}{E}}\left[\frac{\sigma_F-\sigma_P}{\sqrt{(\sigma_F-\sigma_P)^2-(\sigma-\sigma_P)^2}}\right]=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_k}{E}}\left[\frac{0{,}2\,\sigma_F}{\sqrt{(0{,}2\,\sigma_F)^2-(\sigma_K-0{,}8\,\sigma_F)^2}}\right]$$

Otros investigadores como **Considere** y **Jasinski** introdujeron un módulo también reducido, de valor intermedio entre E y E_t.-

Como la primer teoría de Engesser fue duramente criticada, en 1895 presenta una segunda teoría modificada, comprobada en forma experimental por Von Karman (1898), por eso a esta segunda teoría se la suele llamar como Engesser- Von Karman o teoría del Doble Módulo:

$$(11)\quad E_R=\frac{4\,E\,E_t}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2}=T$$

$$(12)\quad \sigma_k=\frac{\pi^2\,T}{\lambda_k^2}$$

y esto conduce a la siguiente ecuación:

$$(13)\quad \frac{1}{\lambda_k}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_k}{E}}\left[0.5+\frac{0.1.\sigma_F}{\sqrt{(0.2\sigma_F)^2-(\sigma_k-0.8\sigma_F)^2}}\right]$$

expresión que relaciona λ_k con σ_K .-

TABLA - ACERO ST52

λ	EULER kg/cm²	ENGESSER 1ª teoría σ_K [kg/cm²]	ENGESSER Von Karman 2ª teoría σ_K [kg/cm²]	DIFERENCIAS $\Delta\sigma$ [kg/cm²]	DIFERENCIAS relativas a la la 1ra (%).
15	92116	3586	3596	10	0,279
20	51815	3575	3592	17	0,476
25	33162	3560	3580	20	0,562
30	23029	3542	3578	36	1,016
35	16919	3521	3567	46	1,306
40	12954	3495	3553	58	1,660
45	10235	3466	3535	69	1,991
50	8290	3431	3511	80	2,332
55	6852	3392	3479	87	2,565
60	5757	3346	3439	93	2,779
65	4906	3293	3386	93	2,824
70	4230	3230	3317	87	2,693
75	3685	3153	3224	71	2,252
80	3238	3053	3093	40	1,310
84,833	2880	2880	2880	0	0
90	2559				
95	2297				
100	2073				

En 1826, **Lucien Navier** (1785- 1836), basado sobre análisis matemáticos de los resultados experimentales de aquella época, demuestra que la fórmula de Euler da un límite superior de la carga crítica de barras y que ella no es ilimitadamente cierta y solamente es válida hasta la tensión de proporcionalidad σ_p = 1903 kg/cm² (Tensión de proporcionalidad de aquella época), pasada ésta, se penetra en el campo elastoplástico. Navier logró llegar a enunciar una fórmula para fundiciones en este campo:

$$(6) \qquad \sigma_k = 3 - 0{,}012\,\lambda$$

y posteriormente **Tetmajer**, luego de decenas de ensayos en 1896 llegó a esta otra:

$$(7) \qquad \sigma_k = 3{,}03 - 0{,}0129\,\lambda$$

para fundición y en campo plástico, la cual para su aplicación en aceros comunes posee un techo cuyo valor es el de la tensión de fluencia (Figura B_1).-

x resultado de ensayo aislado.

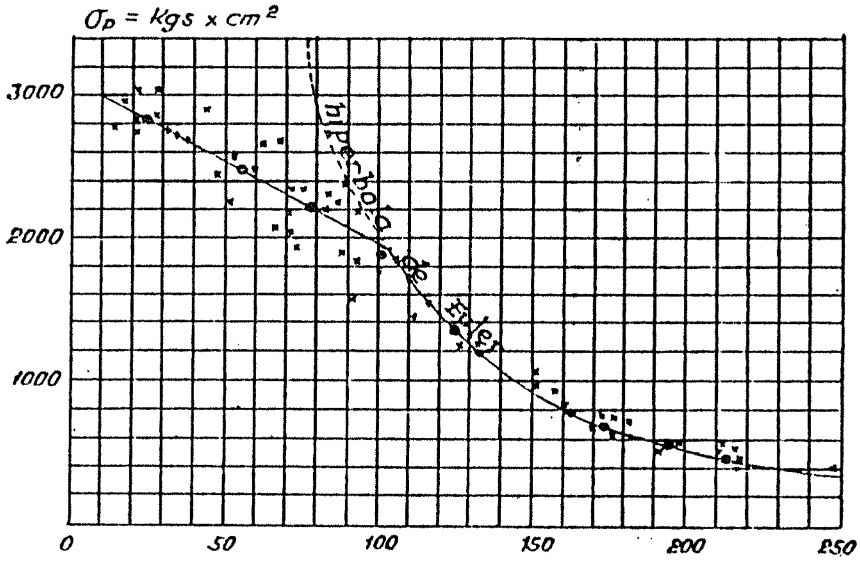


Fig.B₁

• centro de gravedad de grupo de ensayos aislados

Posterior a Euler se desarrollan dos grandes caminos en el fenómeno del pandeo: algunos investigadores, por un lado tratan de franquear el límite que separa la barra ideal de la real, mientras otros se encaminan hacia un estudio lógico de los trabajos de Euler, sobre el comportamiento inelástico de barras en el campo ideal.-

Surge en este camino ideal, la primera teoría de **Engesser** (1889), utilizando en la fórmula de Euler un módulo tangente E_t:

$$(8) \qquad E_t = E\left[1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_F - \sigma_p}\right)^2\right]$$

válida para el campo elastoplástico

σ_p = Tensión de proporcionalidad
σ_F = Tensión de fluencia
E = Módulo de Elasticidad de Hooke

$$(9) \qquad \sigma_k = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda_k^2}$$

TABLA - ACERO ST37

λ	EULER kg/cm² σ_{Ki}	ENGESSER 1ª teoria σ_K [kg/cm²]	ENGESSER Von Karman 2ª teoria σ_K [kg/cm²]	DIFERENCIAS $\Delta\sigma$ [kg/cm²]	DIFERENCIAS relativas a la la 1ra (%).
15	92116	2394	2398	4	0,167
20	51815	2389	2397	8	0,335
25	33162	2382	2394	12	0,504
30	23029	2375	2391	16	0,674
35	16919	2365	2387	22	0,930
40	12954	2354	2382	28	1,189
45	10235	2342	2375	33	1,409
50	8290	2327	2367	40	1,719
55	6852	2311	2357	46	1,990
60	5757	2292	2344	52	2,269
65	4906	2272	2328	56	2,465
70	4230	2249	2309	60	2,668
75	3685	2222	2285	63	2,835
80	3238	2193	2255	62	2,827
85	2869	2159	2217	58	2,686
90	2559	2119	2170	51	2,407
95	2297	2071	2108	37	1,787
100	2073	2006	2024	18	0,897
103,898	1920	1920	1920	0	0
105	1880				
110	1713				
115	1567				
120	1439				
125	1326				
130	1226				

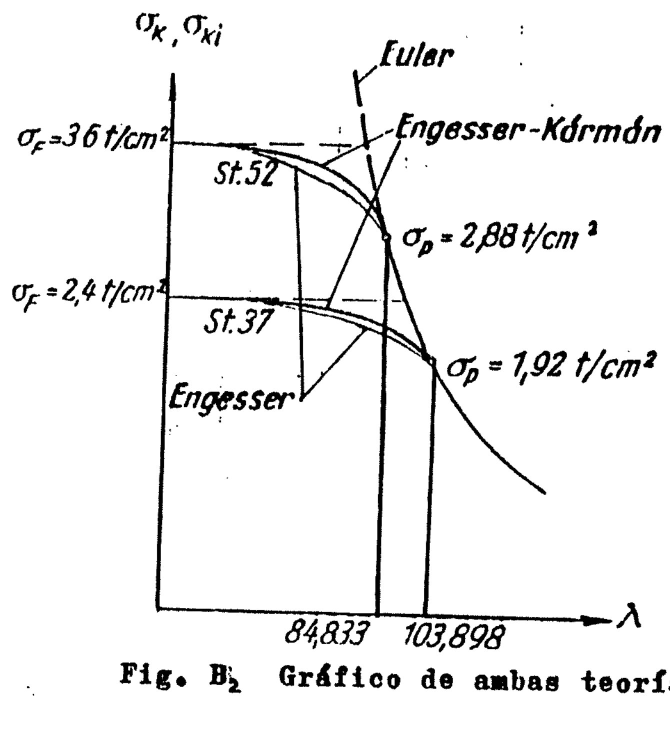


Fig. B_2 Gráfico de ambas teorías

< >

Östenfeld propone en lugar de la recta de Tetmajer, en campo plástico, una parábola tangente para esbeltez $\lambda = 0$ y $\sigma = \sigma_F$ respecto de la horizontal, y que corta a la hipérbola de Euler en λ limite ($\lambda_{limite} = 105$), siguiendo luego con la hipérbola para $\lambda > 105$; y esta parábola no es tangente a la curva clásica de Euler, y la ecuación que plantea es la siguiente:

$$\sigma_K = a - b\lambda^2 \qquad (\text{Fig. } B_3)$$

b depende del punto de encuentro y a = σ_F
En cambio Vianello propone la curva:

$$\sigma_K = \frac{c}{d+\lambda^2}$$

dependiendo los coeficientes, de la tensión de fluencia y del punto donde corta a la hipérbola (λ_{limite}) y en ambos casos las proposiciones de Östenfeld y Vianello no son tangentes a la hipérbola, siendo sus valores levemente inferiores a los de la primera teoría de Engesser.
En cambio planteando la ecuacion:

$$\sigma_K = a - b\lambda^3 \qquad a = \sigma_F$$

y b depende de la esbeltez límite, se obtienen valores intermedios entre la primera y segunda teoría de Engesser en la mayor parte de la curva, únicamente en lugares cercanos al λ_{limite}, se obtienen valores inferiores a la primer teoría.
A estas ecuaciones, con el fin de no violar el principio de continuidad, se les puede buscar el punto de tangencia con la hipérbola, siendo su expresión para acero ST 37:

$$\sigma_K = a - b\lambda^2 = 2.400 - 0{,}0694774\lambda^2$$

estando el punto de tangencia en λ = 131,422
y para acero ST 52:

$$\sigma_K = a - b\lambda^2 = 3.600 - 0{,}1563241\lambda^2$$

y el punto de tangencia esta en λ = 107,30582

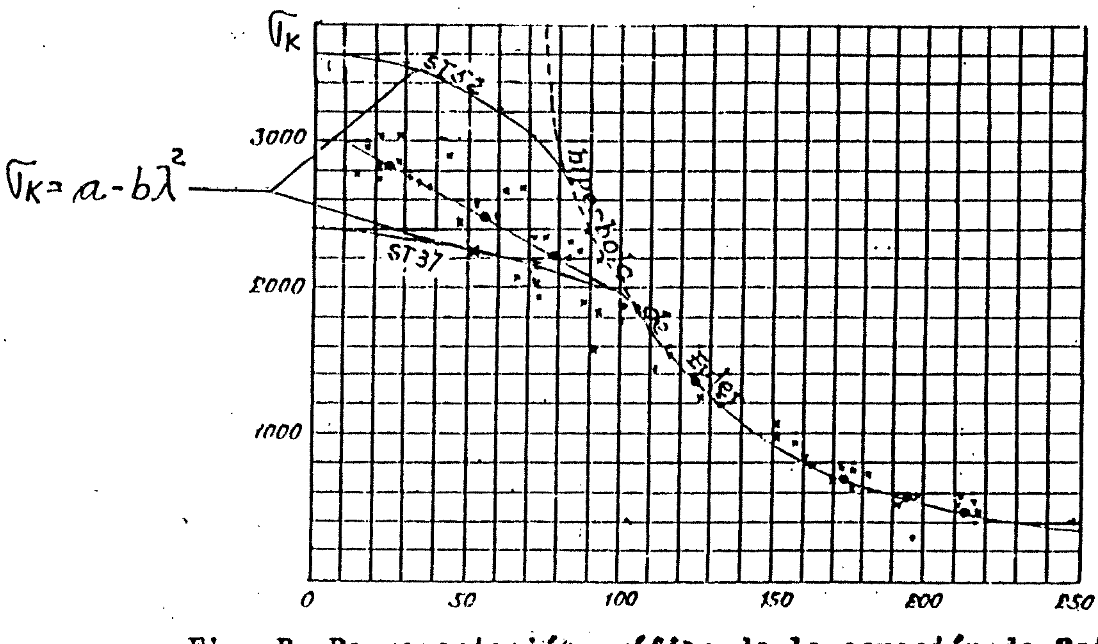


Fig. B_3 Representación gráfica de la ecuación de Östenfeld

Recien en 1947, Shanley demuestra que ninguna de las dos suposiciones de Engesser son ciertas, y no se produce bifurcacion del equilibrio, sino que el proceso es de desviacion del equilibrio.

La primer teoría de Engesser o del modulo tangente, conduce a una tensión crítica o carga crítica, que es el último valor que mantiene a la barra recta y no es verdad que el estudio se realice a carga constante, por el contrario, la carga actuante sobre la barra varía.

Entonces para llegar a la bifurcacion, es necesario un incremento de carga ΔP, respecto de P_K^I, siendo la carga de bifurcación:

$$P_K^S = P_K^I + \Delta P$$

P_K^S = carga crítica de Shanley,
P_K^I = carga crítica de la primer teoría de Engesser,

La carga crítica de Shanley, se situa entre los valores de la primera y segunda teoría de Engesser, y puede concluirse diciendo que la primera nos da un límite inferior y la segunda un límite superior, siendo este un valor inalcanzable, pues las imperfecciones inevitables de la barra impiden alcanzarlo y es asi que antes se llega a la carga P_K^S y posteriormente a una desviación del equilibrio (Fig. B_4 y B_5)

Se debe a Stussi la proposición de denominar a este método combinado "Teoría de Engesser-Shanley, siendo esta teoría corroborada en el famoso modelo mecánico-matemático de Ryder.

Puede verse en las tablas anteriores, que las diferencias entre las dos teorías de Engesser son mínimas y en ningun caso sobrepasan el 2,83%; las diferencias se achican aun mas al considerar la teoría de Shanley, concluyendo que las diferencias son conceptuales y no de valores.

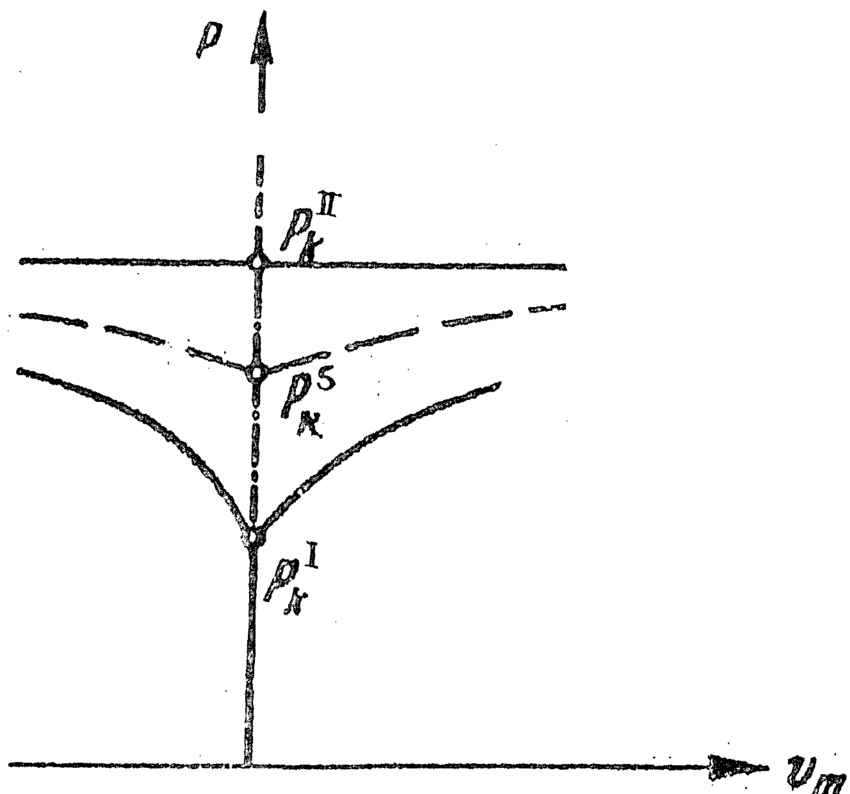


Fig. B_4 La carga crítica segun las tres teorías

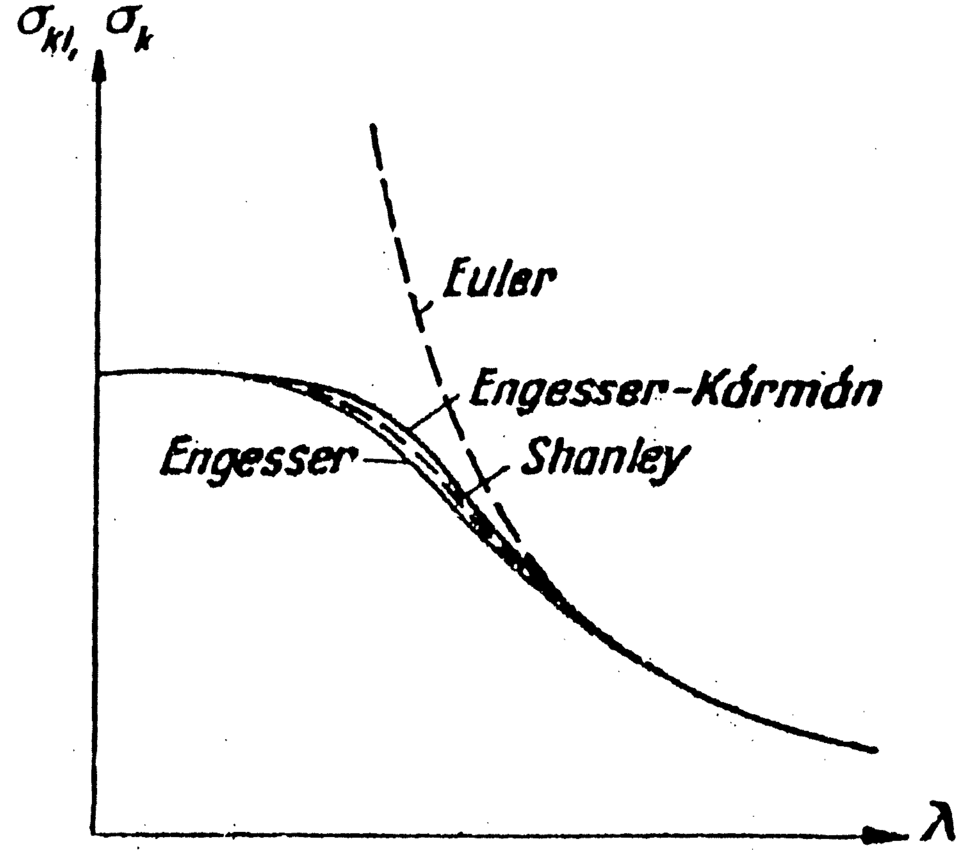


Fig. B. Representación gráfica de las tres teorías

En el campo real, es el físico inglés Thomas Young (1773-1829) el primero en demostrar en 1807, que el comportamiento de las barras reales está afectado por: las imperfecciones geométricas, excentricidad de las cargas, curvatura inicial de las barras; haciendo notar además que la falta de homogeneidd e isotropía afecta el fenómeno del pandeo. Este investigador introduce por primera vez el concepto de momentos flectorres de segundo orden.-

Para ello, estudia una barra que tiene curvatura inicial de forma senoidal haciendo actuar una carga N que provoca una nueva deformación (Figura C), y la elástica será:

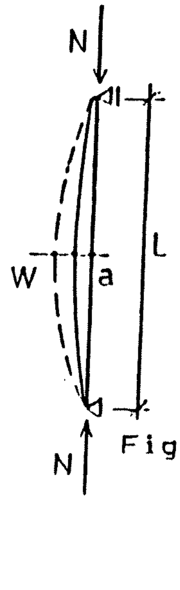


Figura C

(14) $(w + a_x) = w + a.\text{sen}\frac{\pi}{l}\, x$

a = curvatura inicial en el centro

$a_x = a \text{ sen} \frac{\pi}{L} x$

y el momento flector será:

(15) $M = N(w + a \text{ sen}\frac{\pi}{L}\, x)$

y la ecuación diferencial a plantearse es:

$$(16) \quad w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{N}{EI}\left(w + a . \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x\right)$$

quedando finalmente:

$$(17) \quad w'' + k^2 w = -k^2 a . \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x \qquad k^2 = \frac{N}{EI}$$

y la solución de esta ecuación es como sigue:

$$(18) \quad w = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + \frac{a}{\frac{\pi^2 EI}{N L^2} - 1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x$$

si imponemos las siguientes condiciones de borde:

$x = Ø \rightarrow w = Ø$
$x = L/2 \rightarrow w' = Ø$

los coeficientes c_1 y c_2 resultan nulos y la solución final queda:

$$(19) \quad w = \frac{a}{\frac{\pi^2 EI}{N L^2} - 1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x = \frac{a}{\frac{N_E}{N} - 1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x$$

y la flecha total de la barra en su punto medio es:

$$(2Ø) \quad W_0 = (w_m + a) = a + \frac{a}{\frac{N_E}{N} - 1} = \frac{a}{1 - \frac{N}{N_E}}$$

N_E = Carga crítica de Euler o también N_{Ki}

Denominamos momento flector de primer orden M^I a:

$$(21) \quad M^I_{max} = N . a$$

y el momento flector de segundo orden es:

$$(22) \quad M^{II}_{max} = N \frac{a}{1 - \frac{N}{N_{Ki}}} = N a K_1 \qquad (23) \quad K_1 = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{Ki}}}$$

Si la columna estuviese comprimida por una carga N y presenta una excentricidad e, se tendría (Figura D):

$$(24) \quad M^I = N \cdot e$$

$$(25) \quad M^{II} = N \frac{e}{\cos \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{N_{Ki}}}} = N e K_2 \qquad (26) \quad K_2 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N}{N_{Ki}}}}$$

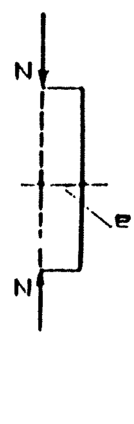
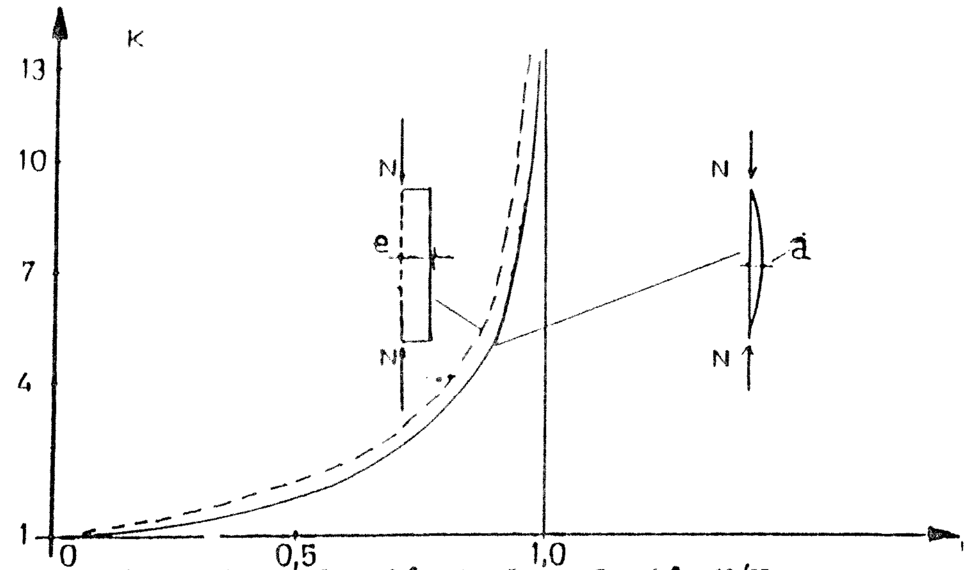


Figura D

Recién 80 años más tarde, los investigadores ingleses Ayrton y Perry demuestran que en el dominio de valores prácticos de la relación N/N_{ki}, los valores de k de las ecuaciones (23) y (26) dan resultados muy cercanos, y es por ello que la curvatura inicial puede ser considerada como una imperfección geométrica general.-

Representando en un sistema de ejes coordenados en función de k (23) y (26), N/N_{ki} se obtiene el gráfico siguiente (Figura E):



Coeficiente k en función de la relación N/N_{ki}

Figura E

Adoptando como criterio de ruina o de destrución de la barra la tensión de fluencia σ_F, se obtiene la fórmula de flexión compuesta: (Ayrton y Perry 1887)

$$(27)\quad \frac{N}{A} + \frac{M^{II}}{W} = \sigma_F$$

A = Area de la sección
W = Módulo Resistente

que puede transformarse en la siguiente relación:

$$(28)\quad \sigma_K + \frac{\sigma_K \cdot a}{\left(1 - \dfrac{\sigma_K}{\sigma_{Ki}}\right)} \cdot \frac{A}{W} = \sigma_F$$

llegándose a la expresión:

$$(29)\quad (\sigma_{Ki} - \sigma_K)(\sigma_F - \sigma_K) = \frac{a \cdot A}{W} \cdot \sigma_{Ki} \cdot \sigma_K = \eta\, \sigma_{Ki}\, \sigma_K$$

$$(30)\quad \eta = a\,\frac{A}{W}$$

y haciendo $(31)\ a = \dfrac{L}{\gamma}$ $\qquad (32)\ i^2 = \dfrac{I}{A}$

(33)

$$\eta = \frac{L}{\gamma} \cdot \frac{A}{W} = \frac{\dfrac{L}{i} \cdot A}{\dfrac{\gamma}{i} \cdot W} = \frac{\lambda \cdot A}{\dfrac{\gamma}{i} \cdot \dfrac{I}{\frac{h}{2}}} = \frac{\lambda}{\dfrac{\gamma}{i}} \cdot \frac{1}{\dfrac{I}{A} \cdot \dfrac{1}{v}} = \frac{\lambda}{\gamma \left(\dfrac{i}{v}\right)}$$

en la que v es la distancia del baricentro al borde de la sección; i/v es el diámetro relativo de la elipse de inercia de la sección para la dirección de pandeo considerada. Puede verse que cada tipo de perfil está caracterizado por el valor de la relación i/v.-

A continuación se expone la tabla A donde puede notarse un efecto diferente de las imperfecciones geométricas, según los dos planos principales de pandeo.-

TABLA A:

Valor de (i/v) Para series de perfiles laminados

PERFIL		Eje de Inercia Mayor		Eje de Inercia Menor	
		Media	Desviación	Media	Desviación
IPE		0.822	0.008	0.444	0.010
HEA	h/b ≤ 1.2	0.870	0.010	0.500	0.002
	h/b > 1.2	0.840	0.019	0.463	0.023
HEB	h/b ≤ 1.2	0.855	0.010	0.506	0.003
	h/b > 1.2	0.833	0.017	0.465	0.023
HEM	h/b ≤ 1.2	0.811	0.017	0.515	0.002
	h/b > 1.2	0.821	0.010	0.475	0.028

La tabla B muestra que la relación i/v, en la familia de perfiles, varía muy poco dentro de ella y por lo tanto según el valor de η, son necesarias varias curvas de pandeo donde se agrupan familias de perfiles de propiedades similares:

TABLA B:

Valor de (i/v) para diferentes series de perfiles

SECCION:	
Tubo rectangular	0.71 a 0.81
Tubo redondo	0.67 a 0.69
Barra rectangular	0.58
Redondo	0.50
Angular de alas iguales	0.43 a 0.50
Perfiles T	0.34 a 0.42

TABLA C

Valor de las imperfecciones equivalentes según Roberston x-x ;Inercia mayor; y-y ;Inercia menor [11]

SECCION:		= 1/wo
IPE	eje x-x	406
IPE	eje y-y	751
HEA (h/b ≤ 1.2)	eje x-x	383
HEA (h/b ≤ 1.2)	eje y-y	667
HEA (h/b > 1.2)	eje x-x	397
HEA (h/b > 1.2)	eje y-y	720
HEB (h/b ≤ 1.2)	eje x-x	390
HEB (h/b ≤ 1.2)	eje y-y	659
HEB (h/b > 1.2)	eje x-x	400
HEB (h/b > 1.2)	eje y-y	717
HEM (h/b ≤ 1.2)	eje x-x	411
HEM (h/b ≤ 1.2)	eje y-y	647
HEM (h/b > 1.2)	eje x-x	406
HEM (h/b > 1.2)	eje y-y	702
Tubo Rectangular		412 a 469
Tubo Cilindrico		483 a 498
Barra Rectangular		575
Redondo		667
Angular de Alas Iguales		667 a 775
Perfil T		794 a 980

En 1925 **A. Roberston** observa que la fórmula de **Ayrton y Perry** constituye una buena representación de **los resultados** experimentales disponibles si se da al párametro η el valor:

$$(34) \quad \eta_R = 0{,}003\,\lambda$$

y esto equivale a considerar una imperfección proporcional a la longitud de la barra:

(35) $\eta \dfrac{(\frac{i}{v})}{\lambda} = \dfrac{1}{\delta} = \dfrac{a}{l}$ $\qquad \delta = \dfrac{L}{a}$

(36) $\eta = \dfrac{\lambda}{\delta(\frac{i}{v})} = 0{,}003\ \lambda$

(37) $\dfrac{1}{\frac{L}{a}(\frac{i}{v})} = 0{,}003 = \dfrac{a}{L(\frac{i}{v})} = 0{,}003$

(38) $\dfrac{a}{l} = 0{,}003(\frac{i}{v})$

En la Tabla C se demuestra que la imperfección varía en la relación de 1/2.6 y favorece el pandeo de un perfil laminado según el eje de menor inercia en relación con el de mayor inercia.-

Robereton sin justificar en forma teórica, exagera la imperfección geométrica observada con la finalidad de tener en cuenta el efecto de las tensiones residuales.-

Estas tensiones residuales fueron puestas de manifiesto en 1888 por **Kalakoutsky**, con motivo de mediciones sobre cilindros de acero y la dispersión del límite de fluencia por **R.H.Smith** en 1878. Si bien la proporción de Roberston es un poco arbitraria, pues no tiene en cuenta la variación de las tensiones residuales, ni tampoco su intensidad y su distribución en las diversas secciones, contiene toda la esencia de la aproximación actual al problema de pandeo.-

A partir de 1925 la fórmula de **Ayrton** y **Perry** es utilizada en muchos países europeos con el η dado por **Roberston**, especialmente los ingleses, que incluso en 1962, el investigador **Godfrey** propone reemplazar en la norma inglesa (Uso de Aceros en Edificios) el valor del parámetro η de **Roberston** por:

(39) $\eta_G = 0{,}3\,(\frac{\lambda}{100})^2$

Con esto se pretende aproximarse a la idea de **Dutheil** que basándose en la teoría de Young, en donde el momento flector de 2° orden viene dado por:

(40) $M^{II} = \dfrac{1}{1 - \frac{N}{N_{Ki}}} \cdot W_0\ N$

en la que W_0 es una "flecha complementaria de falta de homogeneidad", ligada en flexión senoidal al momento máximo en el soporte por la relación:

(41) $W_0 = C \cdot \dfrac{M_0\ L^2}{\pi^2 E I}$

aceptando que $M_o = \sigma_F . W$ puede obtenerse la imperfección de Ayrton y Perry:

$$(42)\quad \eta_o = \frac{W_0 A}{W} = C \frac{M_0 L^2}{\pi^2 E I} \cdot \frac{A}{W} = C \cdot \frac{\sigma_F}{\sigma_{Ki}} = \frac{C}{\pi^2 E} \cdot \sigma_F \cdot \lambda^2$$

El valor de C lo determina en base a los resultados experimentales y propone para el valor de C= 1/12.-

La reglamentación francesa en 1956, acepta esta aproximación, pero la modifica un poco y con el objeto de no tener un fórmula tan compleja de preflecha, llama irregularidades de la estructura al cómputo de imperfecciones inevitables, sin distinguir su procedencia y toma como preflecha:

$$(43)\quad f = \frac{a\,\sigma\,\sigma_{Ki}\,I}{\sigma_{Ki} - \sigma(1+b)\,V\,N_{Ki}}$$

v = distancia desde la línea neutra al borde

donde a y b son valores que salen de la experiencia, y haciendo a=b=0.3 se obtiene para f un valor límite que no es posible sobrepasar, según resultados experimentales, quedando:

$$(44)\quad f = 0,3\,\sigma \cdot \frac{\sigma_{Ki}}{\sigma_{Ki} - 1,3\sigma} \cdot \frac{I}{V N_{Ki}}$$

$$(45)\quad M = N \cdot f = \sigma A f = \frac{0,3\,\sigma^2}{\sigma_{Ki} - 1,3\sigma} W$$

siguiendo el procedimiento matemático se llega a:

$$(46)\quad \sigma_S = \frac{1}{2}(\sigma_{Ki} + 1,3\sigma_F) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{Ki} + 1,3\sigma_F)^2 - \sigma_F \sigma_{Ki}}$$

$$(47)\quad \sigma_S = \frac{N_S}{A}$$

siendo Ns la carga que al aplicarse a una barra real con imperfecciones provoca en algún punto de la sección más desfavorable la tensión de fluencia σ_F.-

En síntesis, lo que se hizo fue igualar la máxima tensión de flexocompresión a la de fluencia σ_F, y a la carga Ns que la provoca se la toma como la de pandeo.-

Esta carga critica debe estar afectada por un coeficiente de seguridad, y que poseen los siguientes valores:

γ = 1,50 cuando la barra está solicitada por cargas principales (Estado H).-

γ = 1,33 cuando la barra está solicitada por cargas principales y adicionales (accidentales) (Estado HZ).-

Entonces en la verificación a realizar, se debe utilizar la carga de dimensionamiento, siendo esta la carga de servicio multiplicada por el coeficiente de seguridad γ, obteniéndose:

$$(63)\quad \omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_K}$$

$$(62)\quad \frac{\gamma N}{A}\omega \leqslant \sigma_F$$

TABLA - TENSIONES CRITICAS EN Kg/cm² - REGLAMENTO FRANCES DE 1956 $\sigma_F = 2400$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2392	2390	2388	2386	2383	2381	2378	2375	2372	2369
20	2366	2362	2358	2354	2350	2345	2340	2336	2330	2325
30	2319	2313	2307	2301	2294	2287	2280	2273	2265	2257
40	2249	2240	2231	2222	2212	2203	2192	2182	2171	2160
50	2148	2136	2124	2111	2098	2085	2071	2057	2043	2028
60	2013	1997	1982	1965	1949	1932	1915	1898	1890	1862
70	1844	1825	1807	1788	1769	1749	1730	1710	1691	1671
80	1651	1631	1611	1591	1572	1552	1532	1512	1492	1473
90	1453	1434	1415	1396	1377	1358	1340	1321	1303	1285
100	1267	1250	1232	1215	1198	1182	1165	1149	1133	1117
110	1102	1087	1072	1057	1042	1028	1014	1000	986	973
120	960	947	934	921	909	897	885	873	862	850
130	839	828	818	807	795	786	776	766	757	747
140	738	729	720	711	702	693	685	677	668	660
150	652	645	637	629	622	615	608	601	594	587
160	580	574	567	561	554	548	542	536	530	524
170	519	513	508	502	497	491	486	481	476	471
180	466	461	457	452	447	443	438	434	430	425
190	421	417	413	409	405	401	397	393	389	386
200	382	378	375	371	368	364	361	358	354	351
210	348	345	342	339	336	333	330	327	324	321
220	318	315	313	310	307	305	302	300	297	295
230	292	290	287	285	282	280	278	276	273	271
240	269	267	265	263	260	258	256	254	252	250
250	248									

COEFICIENTES ω PARA ACEROS A-37

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	20
30	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	30
40	1,07	1,07	1,08	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	40
50	1,12	1,12	1,13	1,14	1,14	1,15	1,16	1,17	1,17	1,18	50
60	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	60
70	1,30	1,31	1,33	1,34	1,36	1,37	1,39	1,40	1,42	1,44	70
80	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61	1,63	80
90	1,65	1,67	1,70	1,72	1,74	1,77	1,79	1,82	1,84	1,87	90
100	1,89	1,92	1,95	1,97	2,00	2,03	2,06	2,09	2,12	2,15	100
110	2,18	2,21	2,24	2,27	2,30	2,33	2,37	2,40	2,43	2,47	110
120	2,50	2,53	2,57	2,60	2,64	2,68	2,71	2,75	2,78	2,82	120
130	2,86	2,90	2,94	2,97	3,01	3,05	3,09	3,13	3,17	3,21	130
140	3,25	3,29	3,33	3,38	3,42	3,46	3,50	3,55	3,59	3,63	140
150	3,68	3,72	3,77	3,81	3,86	3,90	3,95	4,00	4,04	4,09	150
160	4,14	4,18	4,23	4,28	4,33	4,38	4,43	4,48	4,53	4,58	160
170	4,63	4,68	4,73	4,78	4,83	4,88	4,94	4,99	5,04	5,09	170
180	5,15	5,20	5,26	5,31	5,36	5,42	5,48	5,53	5,59	5,64	180
190	5,70	5,76	5,81	5,87	5,93	5,99	6,05	6,11	6,16	6,22	190
200	6,28	6,34	6,40	6,46	6,53	6,59	6,65	6,71	6,77	6,84	200
210	6,90	6,96	7,03	7,09	7,15	7,22	7,28	7,35	7,41	7,48	210
220	7,54	7,61	7,67	7,74	7,81	7,88	7,94	8,01	8,08	8,15	220
230	8,22	8,29	8,36	8,43	8,49	8,57	8,64	8,71	8,78	8,85	230
240	8,92	8,99	9,07	9,14	9,21	9,29	9,36	9,43	9,51	9,58	240
250	9,66										

TABLA - TENSIONES CRITICAS EN Kg/cm^2 - REGLAMENTO FRANCES DE 1956 $\sigma_F = 2600$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2590	2588	2586	2583	2580	2578	2574	2571	2567	2564
20	2559	2555	2551	2546	2541	2535	2530	2524	2518	2511
30	2505	2498	2491	2483	2475	2467	2458	2449	2440	2431
40	2421	2410	2400	2389	2377	2366	2353	2341	2328	2314
50	2300	2286	2272	2256	2241	2225	2209	2192	2175	2157
60	2139	2121	2102	2083	2063	2043	2023	2003	1982	1961
70	1940	1918	1896	1874	1852	1830	1808	1786	1763	1741
80	1718	1696	1674	1651	1629	1607	1585	1563	1541	1520
90	1498	1477	1456	1435	1415	1394	1374	1355	1335	1316
100	1297	1278	1259	1241	1223	1206	1188	1171	1154	1138
110	1121	1105	1090	1074	1059	1045	1029	1015	1001	987
120	973	959	946	933	921	908	896	884	872	860
130	849	837	826	815	805	794	784	774	764	754
140	745	735	726	717	708	699	690	682	674	665
150	657	649	642	634	626	619	612	605	598	591
160	584	577	571	564	558	551	545	539	533	527
170	521	516	510	505	499	494	489	483	478	473
180	468	463	459	454	449	445	440	436	431	427
190	423	419	414	410	406	402	398	395	391	387
200	383	380	376	373	369	366	362	359	356	352
210	349	346	343	340	337	334	331	328	325	322
220	319	316	314	311	308	306	303	300	298	295
230	293	290	288	286	283	281	279	276	274	272
240	270	267	265	263	261	259	257	255	253	251
250	249									

COEFICIENTES ω PARA ACEROS A-42

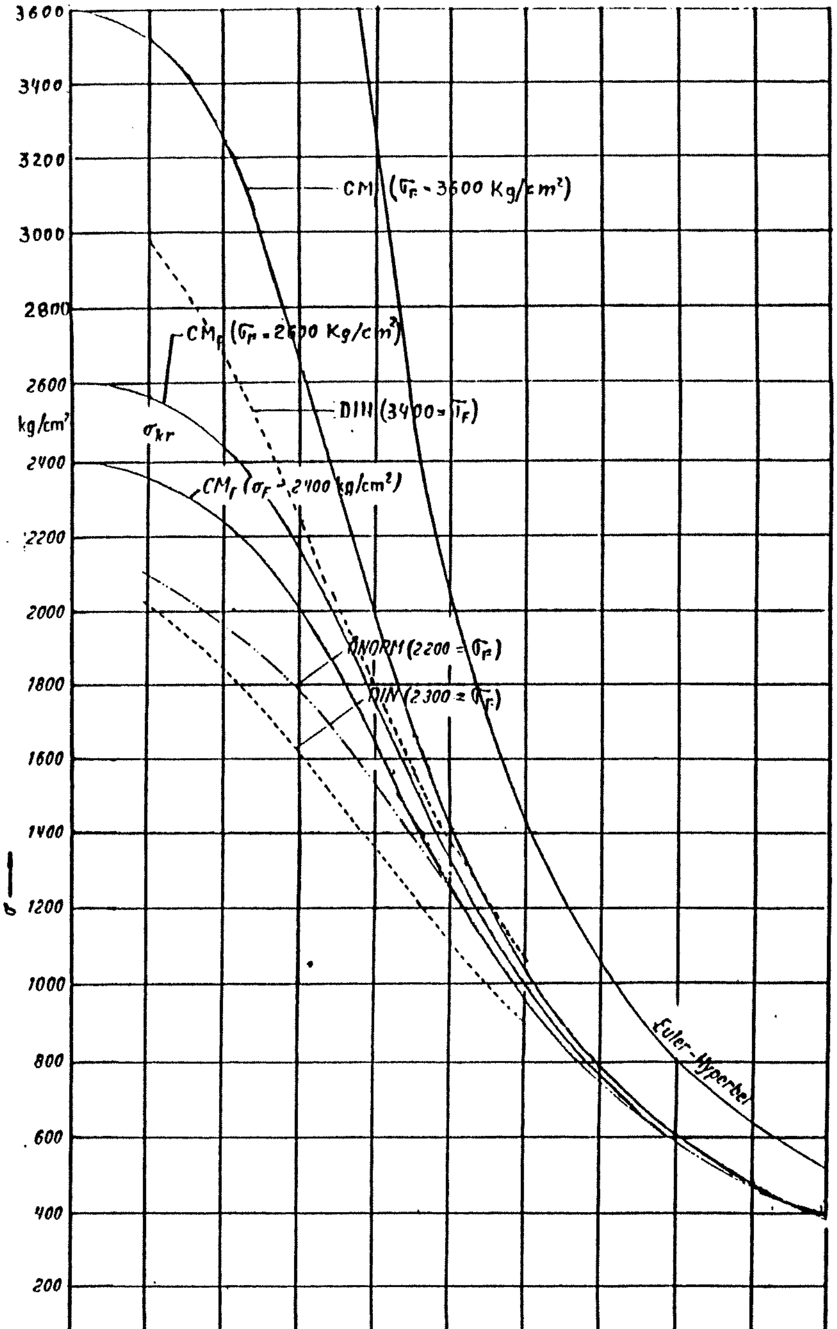
λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	20
30	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	30
40	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,12	40
50	1,13	1,14	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	50
60	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,29	1,30	1,31	1,33	60
70	1,34	1,36	1,37	1,39	1,40	1,42	1,44	1,46	1,47	1,49	70
80	1,51	1,53	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,66	1,69	1,71	80
90	1,74	1,76	1,79	1,81	1,84	1,86	1,89	1,92	1,95	1,98	90
100	2,01	2,03	2,06	2,09	2,13	2,16	2,19	2,22	2,25	2,29	100
110	2,32	2,35	2,39	2,42	2,46	2,49	2,53	2,56	2,60	2,64	110
120	2,67	2,71	2,75	2,79	2,82	2,86	2,90	2,94	2,98	3,02	120
130	3,06	3,11	3,15	3,19	3,23	3,27	3,32	3,36	3,40	3,45	130
140	3,49	3,54	3,58	3,63	3,67	3,72	3,77	3,81	3,86	3,91	140
150	3,96	4,00	4,05	4,10	4,15	4,20	4,25	4,30	4,35	4,40	150
160	4,45	4,51	4,56	4,61	4,66	4,72	4,77	4,82	4,88	4,93	160
170	4,99	5,04	5,10	5,15	5,21	5,26	5,32	5,38	5,44	5,49	170
180	5,55	5,61	5,67	5,73	5,79	5,85	5,91	5,97	6,03	6,09	180
190	6,15	6,21	6,27	6,34	6,40	6,46	6,53	6,59	6,65	6,72	190
200	6,78	6,85	6,91	6,98	7,05	7,11	7,18	7,25	7,31	7,38	200
210	7,45	7,52	7,59	7,66	7,72	7,79	7,86	7,93	8,01	8,08	210
220	8,15	8,22	8,29	8,36	8,44	8,51	8,58	8,66	8,73	8,80	220
230	8,88	8,95	9,03	9,11	9,18	9,26	9,33	9,41	9,49	9,57	230
240	9,64	9,72	9,80	9,88	9,96	10,04	10,12	10,20	10,28	10,36	240
250	10,44										

TABLA - TENSIONES CRITICAS EN Kg/cm^2 - REGLAMENTO FRANCES DE 1956 $\sigma_E = 3600$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3581	3577	3573	3568	3562	3557	3550	3544	3537	3529
20	3521	3513	3504	3494	3484	3474	3463	3451	3439	3426
30	3412	3398	3383	3368	3352	3335	3317	3299	3280	3260
40	3240	3219	3196	3174	3150	3125	3100	3074	3047	3019
50	2991	2961	2931	2901	2869	2837	2804	2771	2737	2702
60	2668	2632	2597	2561	2525	2488	2452	2415	2379	2342
70	2306	2269	2233	2197	2162	2126	2091	2057	2022	1988
80	1955	1922	1890	1857	1826	1795	1764	1734	1705	1676
90	1648	1620	1592	1565	1539	1513	1488	1463	1439	1415
100	1392	1369	1347	1325	1303	1282	1262	1242	1222	1203
110	1184	1165	1147	1129	1112	1095	1078	1062	1046	1031
120	1015	1000	985	971	957	943	930	916	903	891
130	878	866	854	842	830	819	808	797	786	776
140	766	756	746	736	727	717	708	699	690	681
150	673	665	656	648	640	633	625	617	610	603
160	596	589	582	575	568	562	555	549	543	537
170	531	525	519	513	507	502	496	491	486	481
180	475	470	465	461	456	451	446	442	437	433
190	428	424	420	416	411	407	403	399	395	392
200	388	384	380	377	373	370	366	363	359	356
210	353	349	346	343	340	337	334	331	328	325
220	322	319	316	314	311	308	306	303	300	298
230	295	293	290	288	286	283	281	278	276	274
240	272	269	267	265	263	261	259	257	255	253
250	251									

COEFICIENTES ω PARA ACEROS A-52

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
20	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	20
30	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,10	1,10	30
40	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	40
50	1,20	1,22	1,23	1,24	1,25	1,27	1,28	1,30	1,31	1,33	50
60	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,54	60
70	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66	1.69	1,72	1,75	1,78	1,81	70
80	1,84	1,87	1,90	1,94	1,97	2,01	2,04	2,08	2,11	2,15	80
90	2,18	2,22	2,26	2,30	2,34	2,38	2,42	2,46	2,50	2,54	90
100	2,59	2,63	2,67	2,72	2,76	2,81	2,85	2,90	2,95	2,99	100
110	3.04	3,09	3,14	3,19	3,24	3,29	3,34	3,39	3,44	3,49	110
120	3,55	3,60	3,65	3,71	3,76	3,82	3,87	3,93	3,98	4,04	120
130	4,10	4,16	4,22	4,27	4,33	4,39	4,45	4,52	4,58	4,64	130
140	4,70	4,76	4,83	4,89	4,95	5,02	5,08	5,15	5,22	5,28	140
150	5,35	5,42	5,48	5,55	5,62	5,69	5,76	5,83	5,90	5,97	150
160	6,04	6,12	6,19	6,26	6,34	6,41	6,48	6,56	6,63	6,71	160
170	6,79	6,86	6,94	7,02	7,09	7,17	7,25	7,33	7,41	7,49	170
180	7,57	7,65	7,73	7,82	7,90	7,98	8,07	8,15	8,24	8.32	180
190	8,40	8,49	8,58	8,66	8,75	8,84	8,93	9,02	9,10	9,19	190
200	9,28	9,37	9,47	9,56	9,65	9,74	9,83	9,92	10,02	10,11	200
210	10,21	10,30	10,40	10,49	10,59	10,69	10,78	10,88	10,98	11,08	210
220	11,18	11,27	11,38	11,48	11,57	11,68	11,78	11,88	11,98	12,09	220
230	12,19	12,29	12,40	12,50	12,61	12,72	12,82	12,93	13,03	13,14	230
240	13,25	13,36	13,47	13,58	13,69	13,80	13,91	14,02	14,13	14,25	240
250	14,36										



Tensiones críticas del Regl. Francés (1956), DIN (1952) y Austriaco (1953).

Otro investigador, que también trabajó en el campo real, fue Karl Jezek, quien en 1937 presenta una teoría a fin de calcular la carga crítica en barras metálicas, que se funda en una serie de hipótesis simplificativas: adopta el diagrama de tenso-deformación de Prandtl, la deformada de la barra recta y excéntricamente cargada es una sinusoide, se admite como válida la teoría de Bernoulli y válida la ley de Hooke hasta la tensión de fluencia. Conduciendo el desarrollo de la teoría se llega a la siguiente expresión:

$$(48)\ \lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_m}\left[1 - \frac{J_{ic}}{J_y} - \frac{m\sigma_m}{\sigma_F - \sigma_m} + \frac{m\sigma_m W_c C}{(\sigma_F - \sigma_m) J_y} - S_{ic}\frac{(h_i - C)}{J_y} - \frac{m\sigma_m}{\sigma_F - \sigma_m}\cdot\frac{W_c S_{ic}}{J_y F}\right]$$

donde: σ_m = Tensión media.-
J_{ic} = Momento de Inercia de la zona plastificada.-
J_y = Momento de Inercia de la sección.-
c = Longitud de la zona plastificada.-
S_{ic} = Momento estático de la zona plastificada.-
σ_F = Tensión de fluencia.-
h = Distáncia del borde plastificado al baricentro.-
W_c = Momento resistente de compresión.-
e = Excentricidad.-
F = Superficie de la sección.-

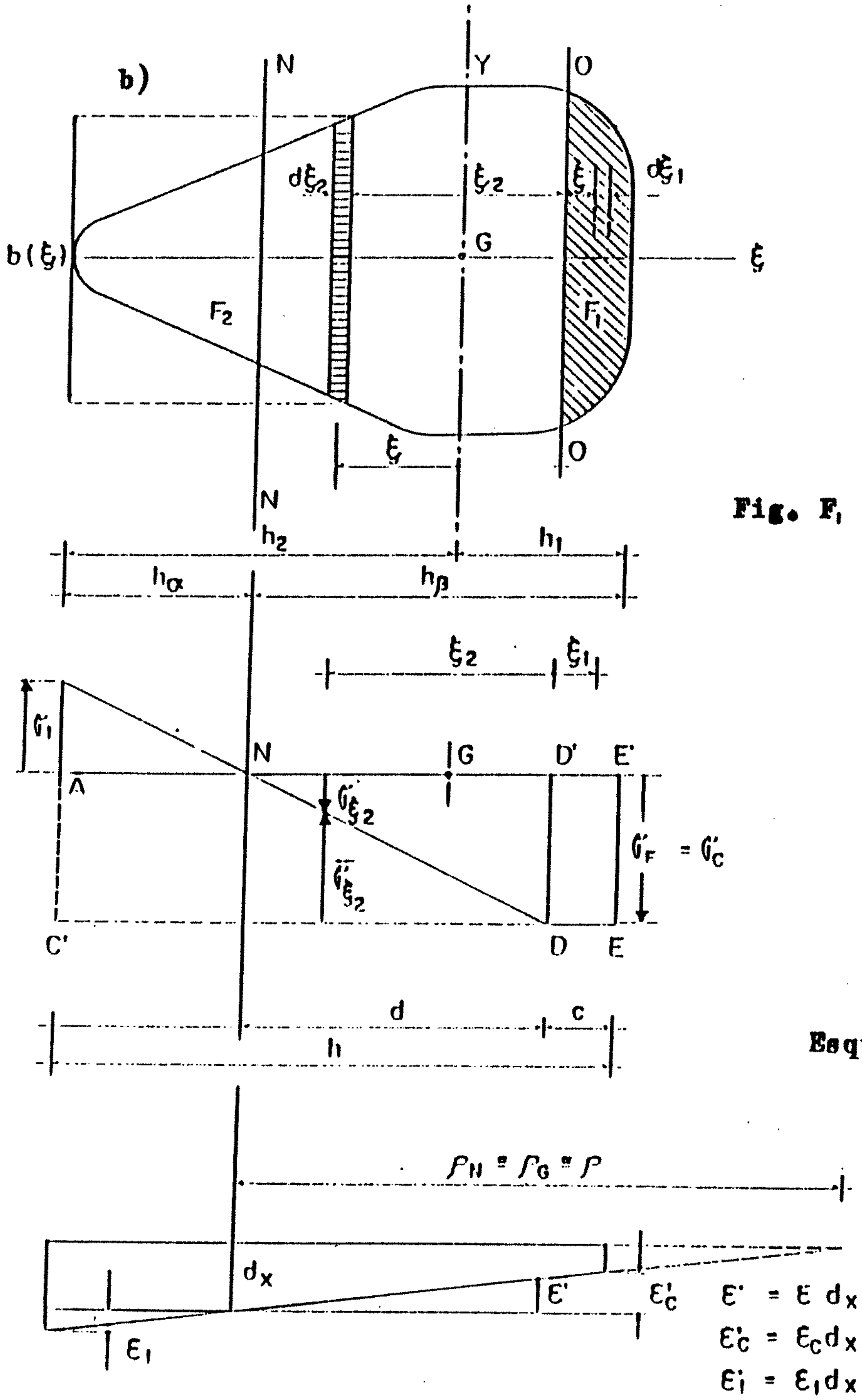
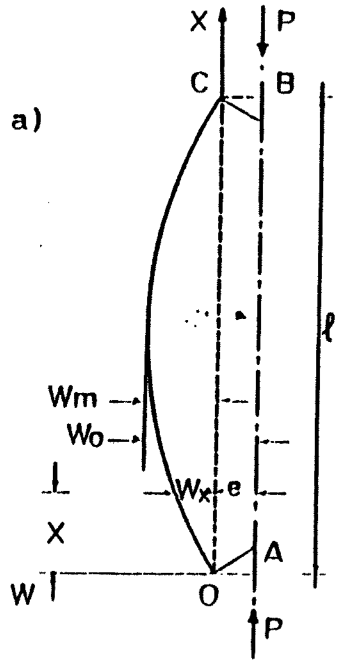


Fig. F1



Esquema de carga de K. Jenek

y esta fórmula es válida para cualquier tipo de sección. El reglamento alemán (1952) aplica esta teoría a una sección compuesta por dos angulares de alas iguales (Figura F) con una excentricidad e igual a:

$$(49)\quad e = \frac{i_x}{20} + \frac{\ell}{500} = i_x\left(\frac{1}{20} + \frac{\lambda}{500}\right)$$

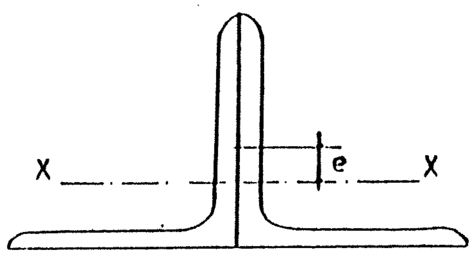


Fig. F_2

y esto conduce a la expresión conocida:

$$(50)\quad \lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_K}\left[1 - \frac{m\,\sigma_K}{\sigma_F - \sigma_K} + 0{,}25\left(\frac{m\,\sigma_K}{\sigma_F - \sigma_K}\right)^2 - 0{,}005\left(\frac{m\,\sigma_K}{\sigma_F - \sigma_K}\right)^3\right]$$

y esta tensión critica la toma como válida para cualquier tipo de sección, lo cual es muy desfavorable y corresponde a la a la norma DIN de 1952.-

En 1953 Klöppell realiza una serie de ensayos en Münich constatando que la norma mencionada sobredimensiona la sección, pues la carga que destruye la barra son mayores que las que se determina en la fórmula anterior (50).-

Posteriormente Dutheil y Massonnet, también constatan mediante ensayos que las cargas criticas son mayores que las que se dan en los diversos reglamentos europeos. Debido a todo esto es que deciden los investigadores europeos organizar una reunión para cambiar opiniones y aunar criterios. En las primeras de ellas se dan cuenta que es muchísimo en lo que tienen que ponerse de acuerdo y debían por lo tanto reunirse en varias ocasiones más, en una palabra se va gestando el nacimiento de la Convención Europea de la Construcción Metálica.-

TABLA - ACERO ST 37

λ	EULER Kg/cm² σ_{Ki}	ENGESSER Von Karman σ_K Kg/cm²	JEZEK Kg/cm² σ_K
20	51815	2397	2023
25	33162	2394	1983
30	23029	2391	1941
35	16919	2387	1894
40	12954	2382	1845
45	10235	2375	1792
50	8290	2367	1737
55	6852	2357	1678

TABLA - ACERO ST 52

λ	EULER Kg/cm² σ_{Ki}	ENGESSER Von Karman σ_K Kg/cm²	JEZEK Kg/cm² σ_K
20	51815	3592	2975
25	33162	3580	2907
30	23029	3578	2832
35	16919	3567	2749
40	12954	3553	2659
45	10235	3535	2561
50	8290	3511	2456
55	6852	3479	2346

TABLA - ACERO ST 37 (cont.)

λ	EULER Kg/cm^2 σ_{Ki}	ENGESSER Von Karman σ_K Kg/cm^2	JEZEK Kg/cm^2 σ_K
60	5757	2344	1617
65	4906	2328	1554
70	4230	2309	1489
75	3685	2285	1424
80	3238	2255	1358
85	2869	2217	1293
90	2559	2170	1229
95	2297	2108	1167
100	2073	2024	1107
105	1880	-	1049
110	1713	-	994
114,84	1571,57	-	942,914
115	1567	-	941
120	1439	-	892
125	1326	-	845
130	1226	-	801

TABLA - ACERO ST 52 (cont.)

λ	EULER Kg/cm^2 σ_{Ki}	ENGESSER Von Karman σ_K Kg/cm^2	JEZEK Kg/cm^2 σ_K
60	5757	3439	2231
65	4906	3386	2113
70	4230	3317	1995
75	3685	3224	1877
80	3238	3093	1762
85	2869	-	1652
89	2617	-	1567
90	2559	-	1546
95	2297	-	1447
100	2073	-	1354
105	1880	-	1267
110	1713	-	1186
115	1567	-	1112
120	1439	-	1043
125	1326	-	979
130	1226	-	921

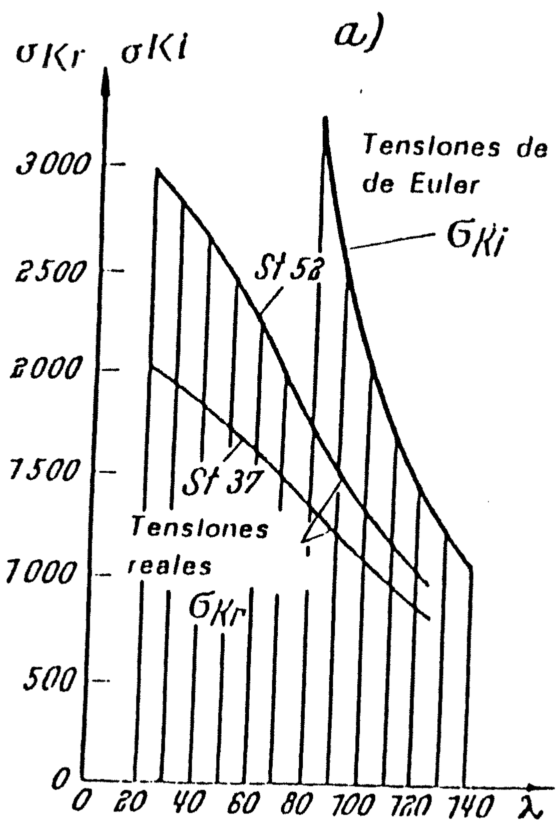


Fig. G_1 Tensiones críticas del Regl. Alemán DIN 4114 (1952)

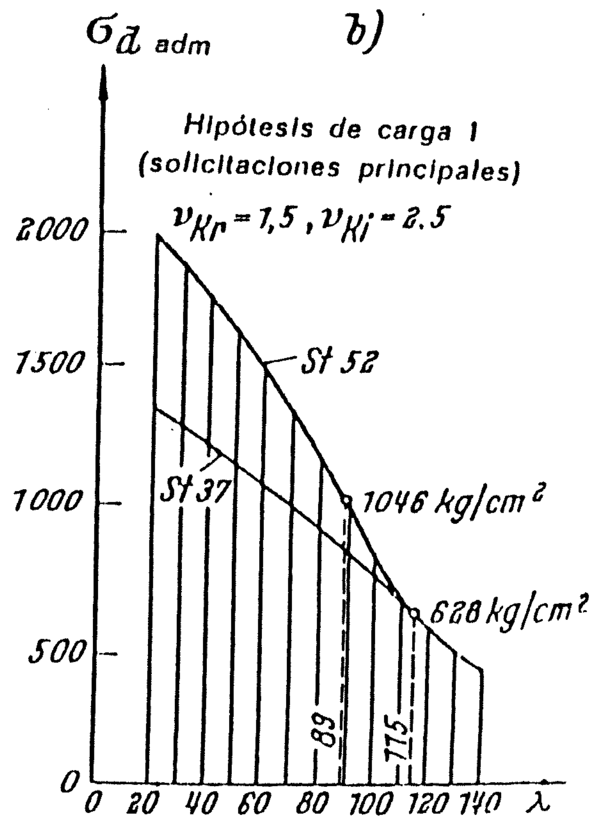
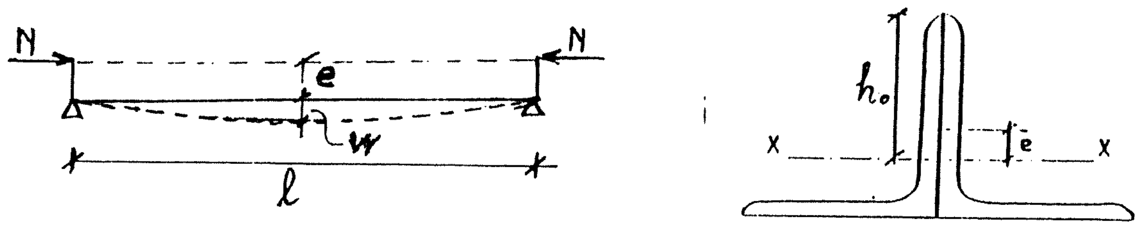


Fig. G_2 Tensiones admisibles del Regl. Alemán DIN 4114, para cargas principales (1952)

La norma austriaca ÖNORM (año 1953), empieza por suponer al igual que la DIN 4114, una barra de seccion T, formada por dos angulares de alas iguales, con excentricidad e, que es muy desfavorable por su poca capacidad de carga (ver fig)



Planteando el problema como una flexocompresión, se llega a:

$$W'' + k^2 W = -k^2 \frac{M_{ox}}{N} \qquad k^2 = \frac{N}{EI}$$

siendo M_{ox} el momento de primer orden, y la solución de esta ecuación es:

$$W = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - \frac{M_{ox}}{N} + \frac{M''_{ox}}{Nk^2} - \frac{M^{IV}_{ox}}{Nk^4} + \ldots$$

y aplicado esto a nuestro caso , se llega a:

$$W = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - e$$

y con las condiciones de borde , queda finalmente:

$$W = \left\{ tg\, k\frac{l}{2} \cdot \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1 \right\} \cdot e$$

$$W_{max} = \left\{ tg\, k\frac{l}{2} \operatorname{sen} k\frac{l}{2} + \cos k\frac{l}{2} - 1 \right\} \cdot e = e \left\{ \frac{1 - \cos k\frac{l}{2}}{\cos k\frac{l}{2}} \right\}$$

y siguiendo a Timoshenko queda:

$$W_t = W_{max} + e = \frac{e}{\cos k\frac{l}{2}} = \frac{e}{\cos \frac{l}{2}\sqrt{\frac{N}{EI}}} = \frac{e}{\cos \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{E}}}$$

La máxima tensión en el borde será:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{I} \cdot l_o = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{I \cos \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{E}}}\, l_o$$

con $I = A.i^2$

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{N.e.h_o}{A i^2 \cos\frac{l}{2i}\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} = \frac{N}{A}\left[1 + \frac{e.h_o}{i^2 \cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{E}}}\right]$$

multiplicando y dividiendo por l y suponiendo

$$\frac{e}{l} = \frac{1}{1000}$$

y para el tipo de perfil considerado $h_o/i = 2,65$

$$\therefore \frac{a}{l} \cdot \frac{l_o}{i} = 0,00265$$

quedando la ecuacion:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A}\left[1 + 0,00265\,\lambda . \frac{1}{\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{E}}}\right]$$

A esta ecuacion se le hace cumplir la condicion de que la fibra mas exigida alcance la tension de fluencia

$$\sigma_F = \frac{N}{A}\left[1 + 0,00265\,\lambda . \frac{1}{\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{N}{EA}}}\right] \quad ó \quad \frac{N}{A}\left[1 + 0,00265\,\lambda \frac{1}{\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{N}{EA}}}\right] - \sigma_F = 0$$

A la carga N se la toma como carga de pandeo o tambien $N/A = \sigma_K$ tension crítica. En el gráfico pueden verse las curvas críticas para aceros ST37, ST44 y ST52.Con respecto a la tensión admisible de pandeo, la ÖNORM sigue el mismo camino que la DIN 4114, las tensiones criticas que provienen de la fórmula se la divide por un coeficiente ν de seguridad y las σ_{Ki} ideales de Euler por $\nu_{Ki} = 2,5$, tomando como tensión crítica la menor de las dos. Para un determinado valor de ν se igualan las tensiones admisibles, quedando dividido el campo en dos partes: zona plástica y zona elástica.

Para cargas principales

ST37
$$\sigma_F \geq 2.220\ Kg/cm^2$$
$$\sigma_{adm} = 1.400\ Kg/cm^2$$
$$\nu = \frac{2,220}{1.400} = 1,586$$

ST44
$$\sigma_F \geq 2.640\ Kg/cm^2$$
$$\sigma_{adm} = 1.680\ Kg/cm^2$$
$$\nu = \frac{2.640}{1.680} = 1,571$$

ST52

$$\sigma_F \geq 3.300 \ Kg/cm^2$$
$$\sigma_{adm} = 2.100 \ Kg/cm^2$$
$$\nu = \frac{3.300}{2.100} = 1{,}57$$

Para cargas principales y accidentales

ST37

$$\sigma_F \geq 2.220 \ Kg/cm^2$$
$$\sigma_{adm} = 1{,}15 \times 1.400 = 1.610 \ Kg/cm^2$$
$$\nu = \frac{1{,}586}{1{,}15} = 1{,}379$$

ST44

$$\sigma_F \geq 2.640 \ Kg/cm^2$$
$$\sigma_{adm} = 1{,}15 \times 1.680 = 1932 \ Kg/cm^2$$
$$\nu = \frac{1{,}571}{1{,}15} = 1{,}366$$

ST52

$$\sigma_F \geq 3.300 \ Kg/cm^2$$
$$\sigma_{adm} = 1{,}15 \times 2.100 = 2.415 \ Kg/cm^2$$
$$\nu = \frac{3.300}{2.415} = 1{,}366$$

En acero ST37 la división esta dada para un valor de λ =105,87, para acero ST44 en λ = 93,585 y para acero ST52 en $\lambda = 81{,}261$

A continuación puede verse la tabla con tensiones críticas y admisibles.

$$\omega = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{d\,adm}}$$

TABLA - Ö N O R M (año 1953) - ACERO ST37

	EULER σ_{Ki} Kg/cm^2	ÖNORM σ_K Kg/cm^2	σ_{adm} cargas I	σ_{adm} cargas II	ω
10	207262	2162	1363	1568	1,03
15	92116	2133	1345	1546	1,04
20	51815	2103	1326	1525	1,06
25	33162	2071	1306	1502	1,07
30	23029	2038	1285	1478	1,09
35	16919	2003	1263	1453	1,11
40	12954	1965	1239	1425	1,13
45	10235	1925	1213	1396	1,15
50	8290	1880	1185	1363	1,18
55	6852	1832	1155	1328	1,21
60	5757	1780	1122	1290	1,25
65	4906	1733	1093	1257	1,28
70	4230	1662	1048	1206	1,34
75	3685	1598	1008	1159	1,39
80	3238	1531	965	1110	1,45
85	2869	1462	922	1060	1,52
90	2559	1392	878	1009	1,60
95	2297	1321	833	958	1,68
100	2073	1252	789	908	1,77
105	1880	1185	747	859	1,87
105,87	1849	1173	740	850	1,89
110	1713	1119	685	788	2,04
115	1567	1057	627	721	2,23
120	1439	998	576	662	2,43
125	1326	942	531	610	2,64
130	1226	890	491	564	2,85
135	1137	841	455	523	3,08
140	1057	795	423	486	3,31
145	986	753	394	453	3,55
150	921	713	368	424	3,80

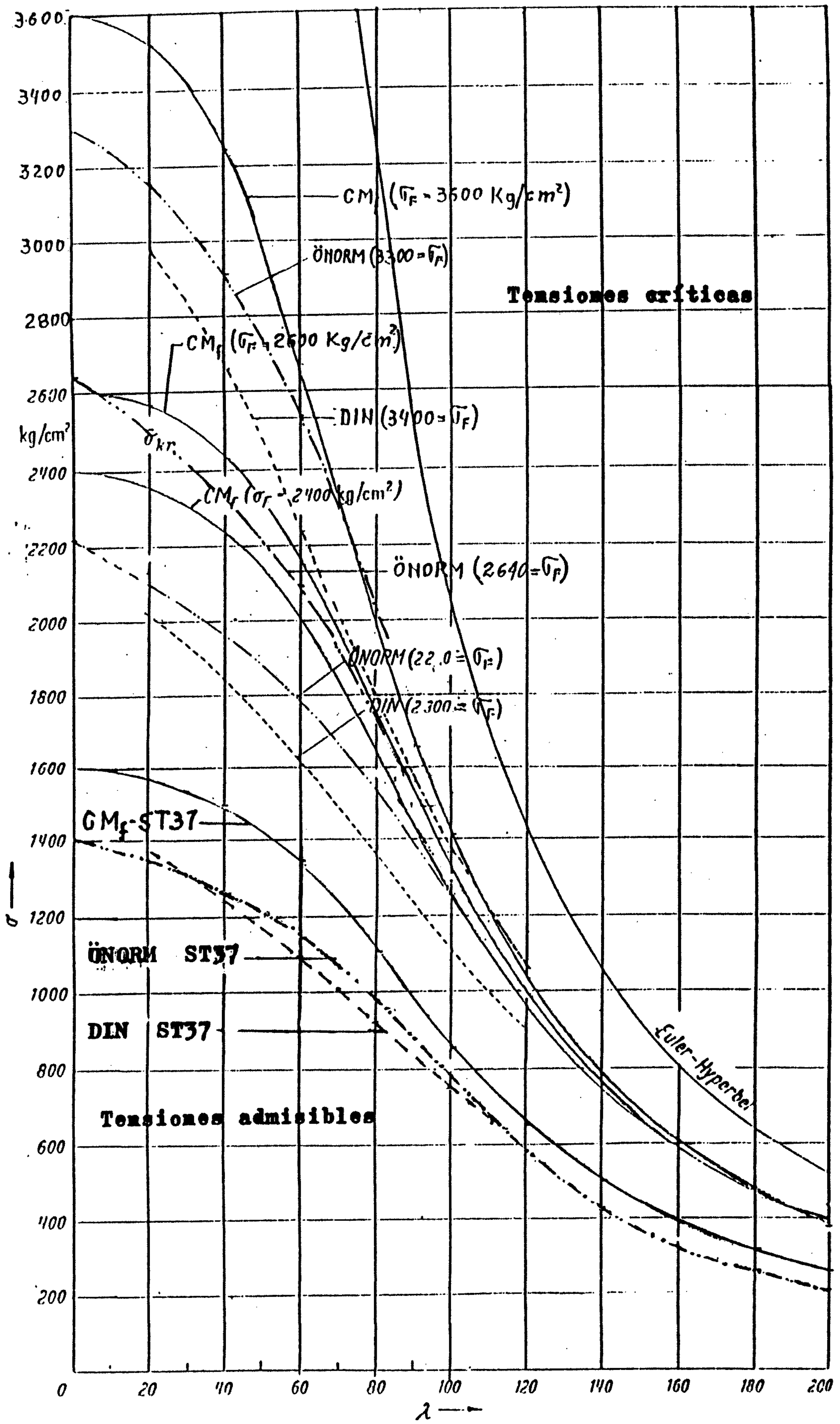
TABLA - Ö N O R M (año 1953) - ACERO ST44

	EULER σ_{Ki} Kg/cm^2	ÖNORM σ_K Kg/cm^2	σ_{adm} cargas I	σ_{adm} cargas II	ω
10	207262	2571	1636	1882	1,03
15	92116	2536	1614	1856	1,04
20	51815	2499	1591	1829	1,06
25	33162	2461	1566	1801	1,07
30	23029	2420	1540	1771	1,09
35	16919	2375	1512	1739	1,11
40	12954	2326	1481	1703	1,13
45	10235	2273	1447	1664	1,16
50	8290	2214	1409	1621	1,19
55	6852	2149	1368	1573	1,23
60	5757	2077	1322	1521	1,27
65	4906	2000	1273	1464	1,32
70	4230	1916	1220	1403	1,38
75	3685	1828	1164	1339	1,44

80	3238	1737	1106	1272	1,52
85	2869	1645	1047	1204	1,60
90	2559	1552	988	1136	1,70
93,585	2366,5	1487,1	947	1089	1,77
95	2297	1462	919	1056	1,83
100	2073	1374	829	953	2,03
105	1880	1291	752	865	2,23
110	1713	1211	685	788	2,45
115	1567	1137	627	721	2,68
120	1439	1068	576	662	2,92
125	1326	1004	531	610	3,17
130	1226	944	491	564	3,45
135	1137	888	455	523	3,72
140	1057	837	423	486	4,00
145	986	790	394	453	4,26
150	921	746	368	424	4,56

TABLA - O N O R M (año 1953) - ACERO ST52

	EULER Kg/cm	ONORM Kg/cm	cargas I	cargas II	
10	207262	3213	2045	2352	1,03
15	92116	3169	2017	2319	1,04
20	51815	3121	1987	2285	1,06
25	33162	3071	1955	2248	1,07
30	23029	3016	1919	2207	1,09
35	16919	2954	1880	2162	1,12
40	12954	2885	1837	2112	1,14
45	10235	2808	1787	2055	1,17
50	8290	2720	1732	1991	1,21
55	6852	2622	1669	1920	1,26
60	5757	2513	1600	1840	1,31
65	4906	2395	1524	1753	1,38
70	4230	2269	1444	1661	1,45
75	3685	2138	1361	1565	1,54
80	3238	2006	1277	1468	1,65
81,261	3138,735	1972,32	1255,5	1443,86	1,67
85	2869	1875	1147	1320	1,83
90	2559	1749	1024	1177	2,05
95	2297	1629	919	1056	2,29
100	2073	1516	829	953	2,53
105	1880	1412	752	865	2,79
110	1713	1315	685	788	3,06
115	1567	1226	627	721	3,35
120	1439	1145	576	662	3,65
125	1326	1070	531	610	3,96
130	1226	1002	491	564	4,28
135	1137	940	455	523	4,62
140	1057	882	423	486	4,96
145	986	830	394	453	5,33
150	921	782	368	424	5,70



3600
3400
3200
3000
2800
2600
kg/cm²
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
λ
σ
CMf (σF = 3600 Kg/cm²)
ÖNORM (3300 = σF)
Tensiones críticas
CMf (σF = 2600 Kg/cm²)
DIN (3400 = σF)
σkr
CMf (σF = 2400 kg/cm²)
ÖNORM (2640 = σF)
ÖNORM (2200 = σF)
DIN (2300 = σF)
CMf-ST37
ÖNORM ST37
DIN ST37
Euler-Hyperbel
Tensiones admisibles

La reglamentación americana AISC después de analizar el problema, llega a las siguientes consideraciones (año 1961):

Pandeo en zona elástica (I) $\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Pandeo en zona elastoplástica

$$(II)\ \sigma_K = \sigma_F - \frac{\sigma_{RC}}{\pi^2 E}(\sigma_F - \sigma_{RC})\lambda^2$$

σ_{RC} = Tensión residual de compresión

σ_F = Tensión de fluencia

Tomando $\sigma_{RC} = \sigma_F/2$, se obtienen buenos resultados en perfiles laminados doble T de alas cortas y anchas, llegándose a la transformación de (II) en:

$$(III)\ \sigma_K = \sigma_F - \frac{\sigma_F^2}{4\pi^2 E}\lambda^2$$

y esta curva es tangente a la de Euler en un punto determinado.-
La ecuación (I) sólo es aplicable cuando:

$$(IV)\ \sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_p \qquad (V)\ \lambda \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

σ_p= Tensión de proporcionalidad, es decir donde termina la parte recta en el diagrama tenso deformación.-
La norma americana supone $\sigma_{RC} = \sigma_F/2$ y entonces $\sigma_p = \sigma_F - \sigma_{RC} = \sigma_F/2$, luego la ecuación (I) es aplicable a barras con esbeltez mayor que :

$$(VI)\ \lambda = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_F}} = C_c$$

y la ecuación (III) puede transformarse en :

$$(VII)\ \sigma_K = \sigma_F\left[1 - \frac{\sigma_F}{4\pi^2 E}\lambda^2\right] = \sigma_F\left[1 - \frac{\lambda^2}{2\frac{2\pi^2 E}{\sigma_F}}\right] = \sigma_F\left[1 - \frac{\lambda^2}{2C_c^2}\right]$$

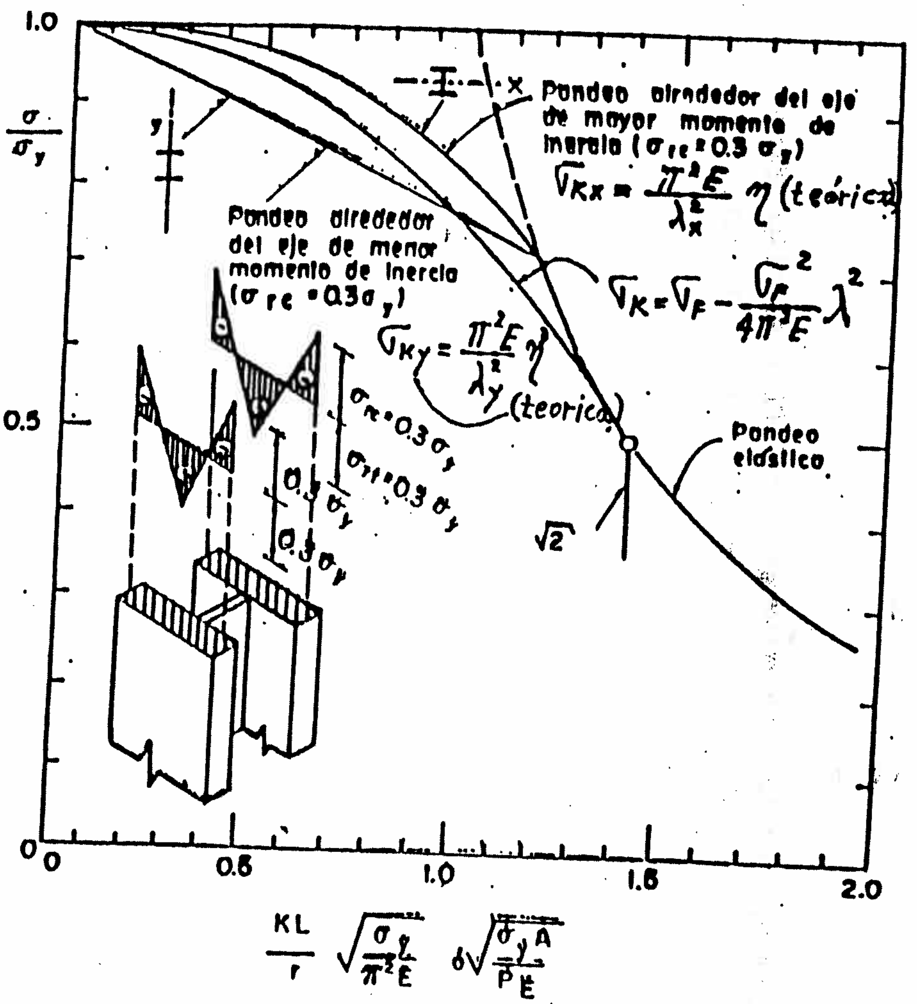
Esta tensión critica (VII), debe tener un coeficiente de seguridad (c.s.), que en periodo plástico es:

$$C.S. = \frac{5}{3} + \frac{3\lambda}{8C_c} - \frac{\lambda^3}{8C_c^3}$$

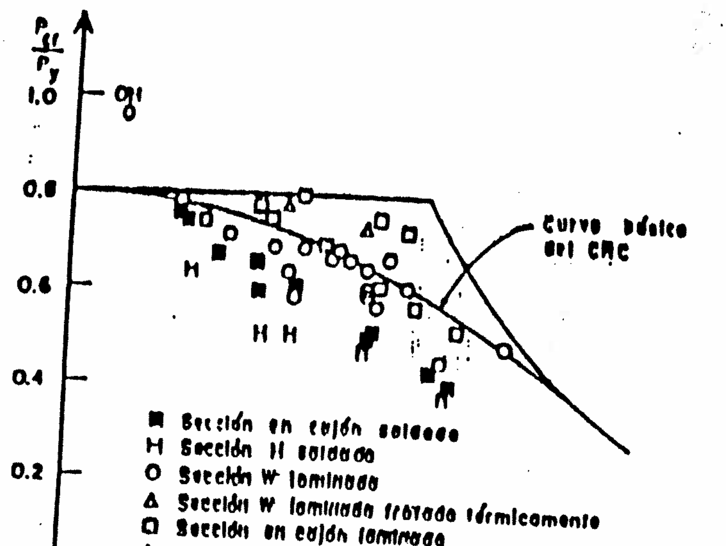
la norma lo adopta variable y vale 1,67 para λ=0 y 1,92 para

$\lambda = C_c$ y en la zona elástica se conserva constante = 1,92.-

Todo lo que se ha visto anteriormente, no tiene un estudio estadístico de probabilidades de que realmente se produzca.-



Curvas esfuerzo crítico-relación de esbeltez para una columna I con esfuerzos residuales



Comparación de resultados experimentales con la ecuación III ó VII

CAPITULO 2: NUEVO ESTUDIO DEL PANDEO EN EL CAMPO REAL:

2.1.-La Barra Articulada:

Desde su creación en 1955, **La Convención Europea de la Construcción Metálica**, tiene como meta primordial trabajar para los progresos técnicos de la profesión. Es así que marca su primer objetivo y constituye la **Comisión nº1** denominada **"Normas y Reglamentos Técnicos"**, con la misión de elaborar las **"Recomendaciones Europeas para el Cálculo y la Realización de Construcciones Metálicas"**.-

El caso más sencillo como es el de la barra biarticulada, no tenía una solución totalmente satisfactoria, y por otro lado la gran disparidad de criterios utilizadas en las diversas normas de los países europeos (Figura 1 y Tabla 1) hacía imposible uniformar las aproximaciones utilizadas para encontrar una respuesta al problema mencionado.-

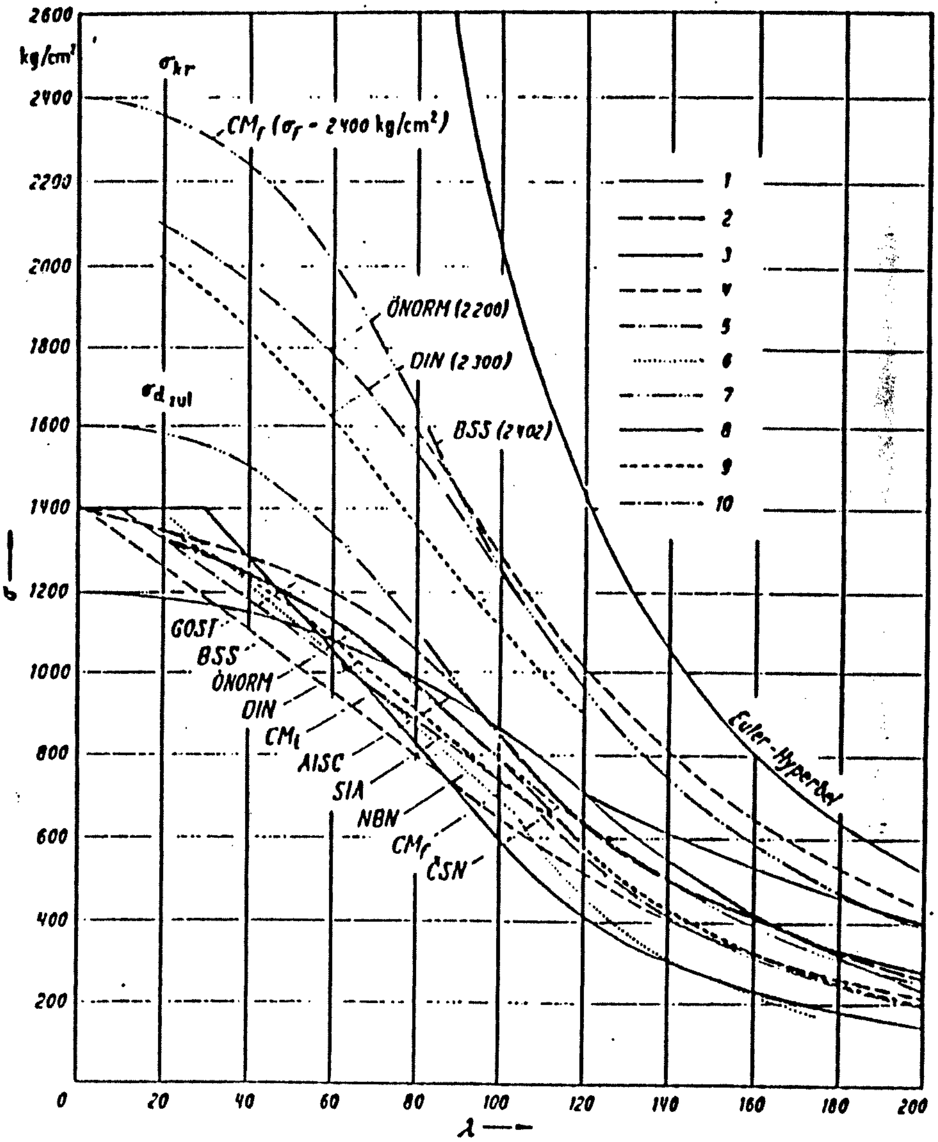


Fig.1 – Tensiones críticas y admisibles de pandeo en diversos reglamentos para ST37 en los años 1950 a 1960. 1)Checoslovaco; 2) U.S.S.R.; 3)U.S.A.; 4)Inglés; 5)Austríaco; 6)Belga; 7)Francés; 8)Italiano; 9)Alemán; 10)Suizo.

Es por ello que la Comisión número 8 "Problemas de Inestabilidad", presidida por el profesor Hermann Beer, decide encarar el problema organizando una gran campaña de ensayos de laboratorio y establecer al mismo tiempo un estudio teórico del fenómeno pandeo, basado en modelos matemáticos o de simulación numérica. Nace dentro de la misma, la subcomisión 8.1 "Estudio Experimental de Pandeo" con la dirección del profesor D.Sfintesco.-

Lo que se busca es establecer curvas de pandeo, en función de la esbeltez y la tensión crítica, y para ello se ha tenido en cuenta la influencia de la forma de la sección transversal del perfil y su proceso de fabricación. Miles de ensayos realizados durante 10 años, que luego fueron confrontados con los resultados del programa de simulación numérica, ejecutados en siete paises:Alemania Occidental; Bélgica; Francia; Gran Bretaña; Italia; Holanda y Yugoslavia.-

Estos ensayos fueron sobre barras cargadas centradamente, con secciones de formas diferentes con imperfecciones tanto geométricas como estructurales.-

TABLA N°1.-

	Tensión crítica de pandeo	Tensión admisible kg/cm²	Seguridad	σ_F kg/cm²
DIN 4114 (1952) Alemán	$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}}\left[1 - \frac{m\,\sigma_{kr}}{\sigma_F - \sigma_{kr}} + 0,25\left(\frac{m\,\sigma_{kr}}{\sigma_F - \sigma_{kr}}\right)^2 - 0,005\left(\frac{m\,\sigma_{kr}}{\sigma_F - \sigma_{kr}}\right)^3\right]$ $m = 2,317\left(0,05 + \frac{\lambda}{500}\right)$ $\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ $\quad e = \frac{i}{20} + \frac{l}{500}$	$\sigma_d\,\text{zul} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu_{kr}}$	$\nu_{kr} = 1,5$	2300
		$\sigma_d\,\text{zul} = \frac{\sigma_K}{\nu_K}$	$\nu_K = 2,5$	
ÖNORM B 4600/4 (1960) Austríaco	$\sigma_F = \sigma_{kr}\left[1 + 0,00205\,\lambda\,\sec.\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{E}}\right)\right]$ $m = 0,00205\,\lambda$ $\quad e = \frac{l}{1000}$ $\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ $\quad E = 2100000$ kg/cm²	$\sigma_d\,\text{zul} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu_{kr}}$	$\nu_{kr} = 1,580$	2220
		$\sigma_d\,\text{zul} = \frac{\sigma_K}{\nu_K}$	$\nu_K = 2,5$	
SIA No. 162 (1956) Suizo		$10 < \lambda < 110$ $\sigma_{d,}\,\text{zul} = 1480 - 7,5\,\lambda$		2400
	$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$	$\lambda > 110$ $\sigma_d\,\text{zul} = \frac{8 \cdot 10^6}{\lambda^2}$	$\nu_K = 2,59$	
CM$_F$ (1956) Italiano		$80 < \lambda < 101$ $\sigma_d\,\text{zul} = 1740 - 11,54\,\lambda$		
	$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$	$\lambda > 110$ $\sigma_d\,\text{zul} = \frac{592,18 \times 10^4}{\lambda^2}$	$\nu_K = 3,5$	
NBN 5 (1952) Belga		$\lambda \leq 20$ $\sigma_d\,\text{zul} = 1400$ $20 < \lambda \leq 105$ $\sigma_d\,\text{zul} = 1670,4 - 0,02\lambda$ $105 < \lambda < 175$ $\sigma_d\,\text{zul} = \frac{2122 \times 10^4}{(1,510 + 0,0142\lambda)\,\lambda^2}$		
BSS 449 (1948) Inglés	$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$; $\quad E = 2047000$ kg/cm² $\sigma_{kr} = \frac{\sigma_F + (1 + m)\,\sigma_K}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma_F + (1 + m)\,\sigma_K}{2}\right]^2 - \sigma_K\,\sigma_F}$ $m = 0,003\,\lambda$	$\lambda < 80$ Gerade ($\lambda = 0$, $\sigma_d\,\text{zul} = 0,59\,\sigma_F$)		2102
		$\lambda > 80$ $\sigma_d\,\text{zul} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu_{kr}}$	$\nu_{kr} = 2$	

continuación TABLA Nº1

Règles CM, (1966) Francés	$\sigma_{kr} = \frac{1,3\,\sigma_F + \sigma_E}{2} - \sqrt{\left[\frac{1,3\,\sigma_F + \sigma_E}{2}\right]^2 - \sigma_E\,\sigma_F}$ $m = \frac{0,3\,\sigma_F}{\sigma_k} = \frac{0,3\,\sigma_F\,\lambda^2}{\pi^2 E} = 0,348 \times 10^{-4}\,\lambda^2$ $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ $E = 2100000\ kg/cm^2$	$\sigma_{d\,zul} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu_{kr}}$	$\nu_{kr} = 1,5$	2100
CSN 050110 (1949) Checoslovaco	$\sigma_{kr}^2 - \frac{\sigma_E(1+m)+\sigma_F}{1-0,284\,m}\,\sigma_{kr} + \frac{\sigma_E\,\sigma_F}{1-0,284\,m} = 0$ $m = 0,0025\lambda$ $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ $e = \frac{l}{700}$	$\sigma_{d\,zul} = \frac{\sigma_{kr}}{\nu_{kr}}$	$\nu_{kr} = \frac{\sigma_F}{\sigma_{zul}} = 1,042$	2900
AISC (1949)		$\lambda < 120$ $\sigma_{d\,zul} = 1195 - 0,034\,\lambda^2$ $\lambda > 120$ Sekundäre Druckstäbe $\sigma_{d\,zul} = \frac{1265,4}{1 + \frac{\lambda^2}{18000}}$ Primäre Druckstäbe $\sigma_{d\,zul} = \left(1,6 - \frac{\lambda}{200}\right)\frac{1265,4}{1 + \frac{\lambda^2}{18000}}$		$\sigma_F = 0,6\,\sigma_s > 2320$

Las barras destinadas a los ensayos fueron tomadas al azar y de la producción de esos países, como si ellas fueren a emplearse en la construcción real, además el programa se ha basado sobre una gama de esbelteces auténticamente prácticas y con el fin de limitar el número de ensayos, la influencia de la esbeltez ha sido estudiada para cada perfil por cada tipo de sección, mientras que el estudio de la influencia de la forma de la sección, se basaba solamente sobre diversos tipos de barras de variadas esbelteces.-

El modelo matemático, suponía una imperfección geométrica introducida en una deformación senoidal de amplitud 1/1000 de la longitud de la barra, siendo éste un valor desfavorable de imperfecciones inevitables de fabricación y fue confirmado por las medidas sobre piezas ensayadas y diversos elementos realemente existentes. Esta simulación corresponde a imperfecciones constructivas admitidas por los países europeos.-

Otro defecto de la barra, es el de puesta en carga, por la introducción de una excentricidad de aquella con relación al eje de la barra, pero un estudio comparativo ha revelado que una preflecha de 1/1000 de la longitud, cubre con seguridad las excentricidades accidentales de puesta en carga en el campo de las medianas y grandes esbelteces. En el campo de las pequeñas esbelteces se las desprecia, pues el límite de fluencia de cálculo se ha tomado con mucha prudencia.-

Las imperfecciones estructurales están constituidas por las tensiones residuales debidas al laminado, al trafilado, al soldado y al estirado en frío, así como a la dispersión de los valores del límite de fluencia del material en frío y a la variación de los valores del mismo en el interior de una sección recta. Se han realizado mediciones experimentales, estableciéndose la distribución y valores realistas de estas tensiones residuales y el modelo matemático consideró estas tensiones caracteristicas en cada tipo de perfil (Figura 6). Compróbose además que las tensiones residuales influencian la capacidad portante, más que la variación del limite de fluencia en la sección, y como el elemento determinante para definir el limite de fluencia de los perfiles laminados está constituido por las alas, la influencia de la dispersión no se tomó en cuenta.-

Con lo anteriormente expuesto, la determinación de la capacidad portante de una barra solicitada axialmente, presentando las imperfecciones expuestas, desemboca en un problema de estabilidad dominado por el límite de fluencia. Al estado límite de capacidad portante se llega cuando la plastificación es tal que, para toda carga suplementaria, no se puede establecer un estado de equilibrio entre fuerzas exteriores e interiores, estableciéndose un pandeo por divergencia de equilibrio.-

El estudio del modelo matemático (o ecuación matemática) que resuelve el problema, estuvo a cargo de **Hermann Beer** y **Gerald Schulz**, quienes posteriormente establecieron un programa para un ordenador, que sirvió para simular el pandeo y resolver las ecuaciones que definen la carga crítica de la barra, teniendo en cuenta todas las imperfecciones. Se realizaron tantos ensayos de laboratorio como de simulación por computadora, obteniéndose una corroboración de los resultados, y se puede discutir indefinidamente, sobre si los ensayos estaban destinados a respaldar los resultados obtenidos por vía numérica a base de simulación, o por el contrario estos últimos tenían por fin asegurar la continuidad de las leyes a deducir de las experiencias. Poco importa aportar una respuesta a está duda, lo importante es que se está en presencia de un método útil de simulación y que se dispone de un número considerable de resultados experimentales de laboratorio que proceden de una gran variedad de muestras (probetas).-

Con los resultados de los ensayos de laboratorio, se buscó la tensión crítica característica de pandeo, y esto resultó de la interpretación estadística de esos resultados, que fueron calculados de la siguiente manera:

$$(51)\quad \sigma_K = \sigma_{Km} - 2S$$

siendo σ_{Km} la resistencia crítica media y cuyo valor se obtiene como:

$$(52)\quad \sigma_{Km} = \frac{\sigma_{K1} + \sigma_{K2} + \sigma_{K3} + \cdots\cdots + \sigma_{Kn}}{n}$$

y s es la desviación normal; cuyo cálculo es:

$$(53)\quad S = \sqrt{\frac{\sum (\sigma_{Ki} - \sigma_{Km})^2}{n-1}}$$

n:es el número de ensayos y cuando éste es mayor de 30,podrá ponerse n en lugar de (n-1).-

σ_K Tensión critica característica de pandeo, y considerando que los resultados de los ensayos mencionados se distribuyen de acuerdo a una curva estadística normal, este valor es el que corresponde a la probabilidad de que el 98% de los resultados obtenidos superen este valor.-

Lo que se busca no es la adopción de curvas de pandeo dimensionales en función de (σ_K, λ), pues esto obligaría a tener que adoptar curvas para cada calidad de acero; sino la adopción de curvas adimensionales en función de ($\bar{N}$,$\bar{\lambda}$) y que puedan ser utilizadas para diferentes calidades de aceros, en intervalos determinados con respecto a la calidad. Para llegar a la forma adimensional se deben establecer los siguientes valores:

E = Módulo de Elasticidad.-
G = Módulo Transversal.-
σ_F = Limite de Fluencia.-
μ = Módulo de Poisson.-
A = Superficie de la Barra.-
W = Momento Resistente Elástico.-
Wp = Momento Resistente Plástico.-
I = Momento de Inercia.-
i = $\sqrt{(I/A)}$ Radio de Giro.-

Siendo estos valores los que identifican al material, los que identifican a la barra se detallan a continuación:

ℓ = Longitud de la Barra.-
ℓ_K = Longitud Critica.-
λ = ℓ_K /i Esbeltez de la Barra.-
$\lambda_s = \lambda_F = \pi\sqrt{E/\sigma_F}$ Grado de Esbeltez de Referencia.-
$\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_s = \sqrt{N_{pl}/N_{Ki}} = \sqrt{\sigma_F/\sigma_{Ki}}$ Grado de Esbeltez Referido.-
Npl = A σ_F Fuerza Longitudinal Plástica.-
Nki = Carga Critica Ideal de Euler.-
σ_{ki} = Nki/A Tensión Critica Ideal de Euler.-
$\bar{N} = \sigma_K/\sigma_F$ Coeficiente o Factor Adimensioanal de Reducción.-

2.2.-ESTUDIO DE LAS DIVERSAS INFLUENCIAS EJERCIDAS POR LAS IMPERFECCIONES.-

2.2.1 Tensiones Residuales:

El estudio fue realizado por **Hermann Beer** y **Gerald Schulz** con ecuaciones matemáticas complejas cuyos resultados se extraían de una computadora, y para representar estos resultados se utiliza el diagrama de $(\bar{N},\bar{\lambda})$, significando esto que la carga de pandeo Nk es relacionada a la carga de fluencia $N_F = \sigma_F . A$; la esbeltez λ es relacionada a la esbeltez de fluencia que correponde a la fórmula de Euler: $\lambda_F = \pi \sqrt{E / \sigma_F}$ obteniéndose $\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_F$ y los estudios demuestran que el cálculo de la carga de pandeo o tensión de pandeo queda así entre límites ciertos y son sensiblementes independientes de la tensión de fluencia y en consecuencia de la calidad del acero, es decir los errores que pueden cometerse entre determinados intervalos de tensiones de fluencia son despreciados.-

Como hipótesis de imperfecciones geométricas se adoptan preflechas de $\ell/500$ a $\ell/2000$ (Figura 2), y se determina la influencia sobre la carga de pandeo. Para las formas o secciones de perfiles estudiados, se observa una disminución de la carga de pandeo cuando mayor es la preflecha, y las curvas que se obtienen son aún menores cuando se adiciona la influencia de las tensiones residuales.-

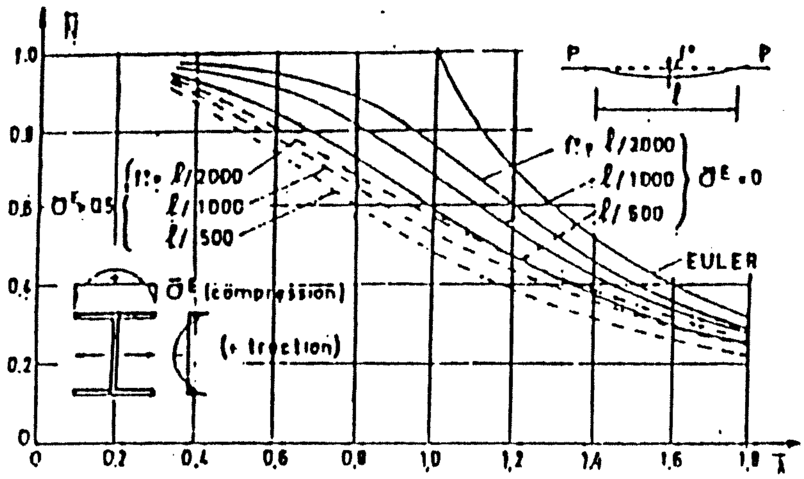


Fig.2 - Influencia de la preflecha en I-DIE-20 con y sin tensiones internas.

Fig. 2

Los perfiles tubulares (Figura 3), muestran la misma tendencia en función de la relación diámetro- espesor de pared, puede verse que la influencia es muy reducida. Un estudio profundo de las imperfecciones inevitables en la práctica, muestra que con una preflecha inicial igual a $\ell/1000$ en la mitad de la barra previene con seguridad contra la influencia de esas imperfecciones considerando además que todas las imperfecciones geométricas se ejercen simultáneamente.-

La influencia ejercida por la forma del perfil sobre la carga de pandeo, es en general reducida si la barra considerada está exenta de tensiones residuales. En la Figura 4, se han trazado las curvas críticas para diferentes secciones de perfiles, y se observa que sólo las secciones T se destacan netamente de los otros tipos de perfiles y muestran una carga de pandeo que es más elevada cuando el ala está más comprimida y menor carga cuando es el alma la que está comprimida.-

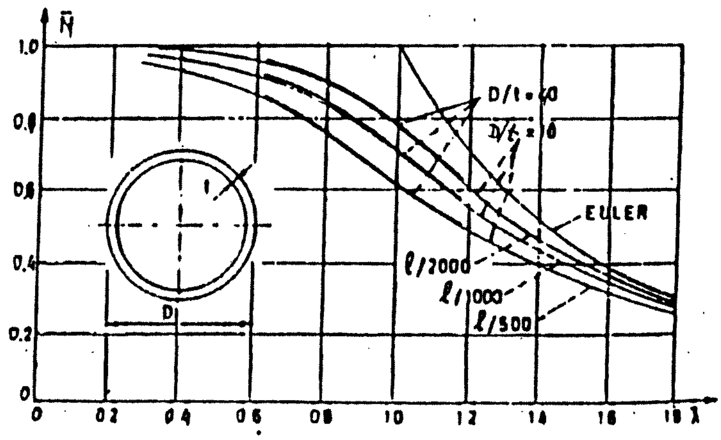


Fig. 3 – Influencia de la preflecha en tubos con D/t= 10 y 40 sin imperfecciones estructurales.

Fig. 3

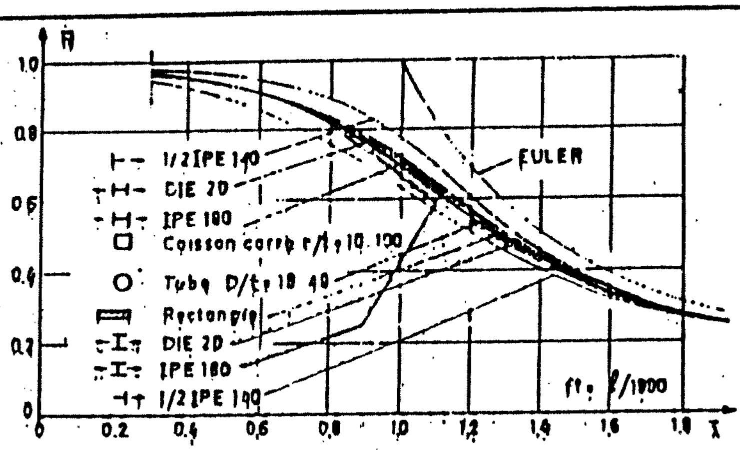


Fig. 4 – Curvas de pandeo (N, λ̄), en barras sin imperfecciones estructurales.

Fig. 4

La Figura 5 nos permite observar el comportamiento de las secciones cajón, con diferencias excesivas entre los espesores de paredes y relaciones altura- ancho (h/b); puede verse una diferencia muy reducida en lo que concierne a carga crítica; en las secciones la letra C corresponde al cuadrado y la R al rectángulo.-

Haciendo un resumen sobre el modo de distribución de las tensiones internas residuales en perfiles I laminados, se ve que depende de la geometría del perfil.-

En la Figura 6 se observa que la repartición de tensiones residuales depende de la relación altura- ancho (h/b).-

Mientras que en los perfiles haya una relación $h/b \leq 1{,}2$ las tensiones residuales de compresión pueden ser relativamente fuertes con $\sigma = 0{,}5\,\sigma_F$ en las extremidades de las alas, y para una relación 1,2 < h/b < 1,7 las tensiones son más débiles con $\sigma = 0{,}3\,\sigma_F$ pero desfavorablemente repartidas en la totalidad del ala.-

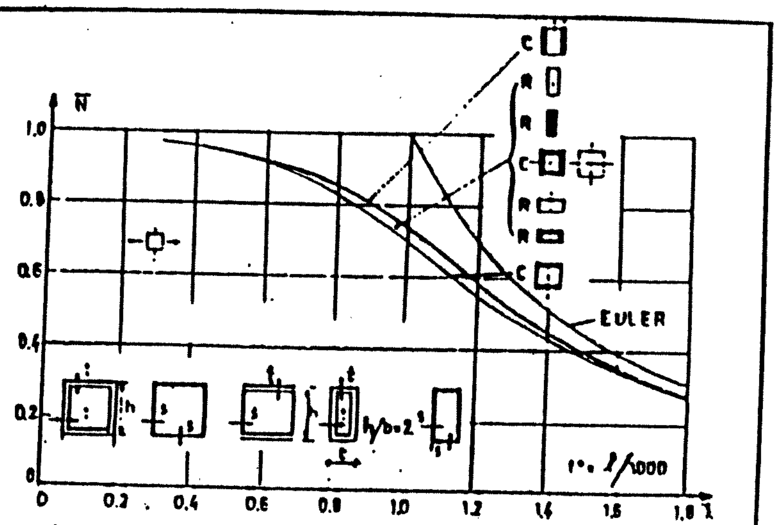


Fig.5 - Curvas de pandeo ($N, \bar{\lambda}$), en barras de sección cajón, sin imperfecciones estructurales.

Fig. 5

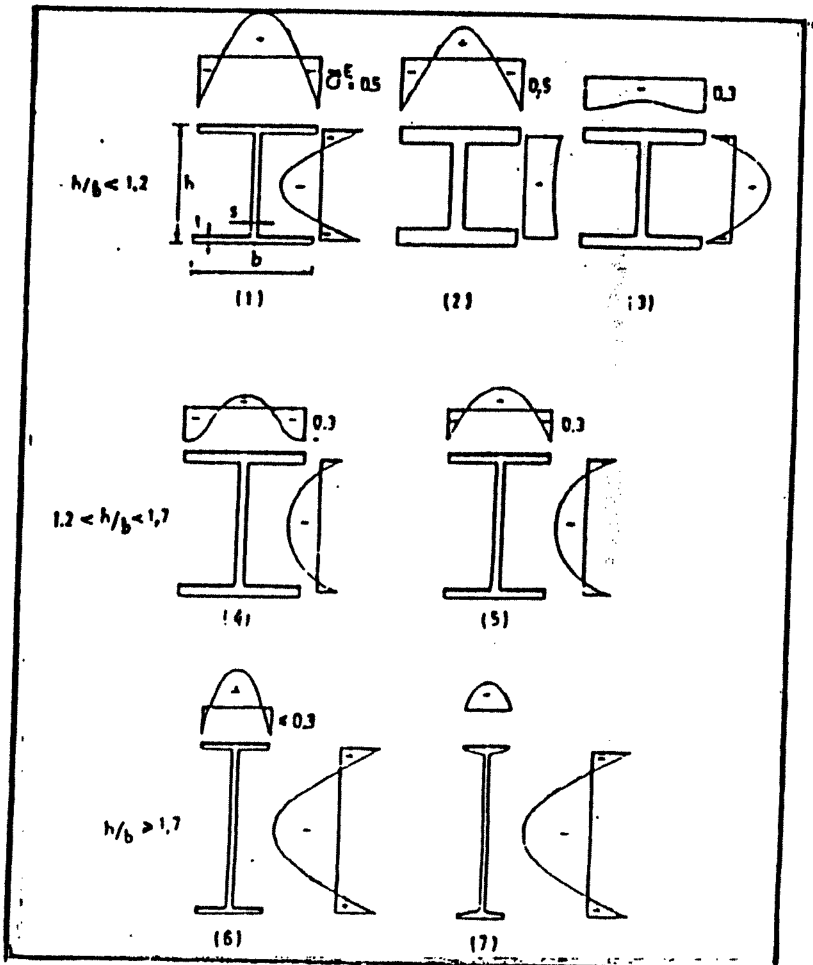


Fig. 6

El comportamiento es sensiblemente mejor si las alas no son laminadas, sino fabricadas con chapas cortadas con soplete pues en esos casos se produce en la zona de bordes tensiones residuales menores (Figura 7).-

Para perfiles esbeltos, con h/b ≥ 1,7 esta tendencia es más martada y en los mismos puede producirse una inversión, como ocurre con los perfiles normalizados muy esbeltos, con tensiones residuales de tracción repartidas en toda el ala. La razón de esta distribución tan diferente de la anterior es debida a los distintos procesos de enfriamiento correspondiente a distintas geometrías de perfiles laminados, estableciéndose un límite de influencia ejercido por las tensiones residuales sobre la carga crítica por una relación h/b ≤ 1.2.-

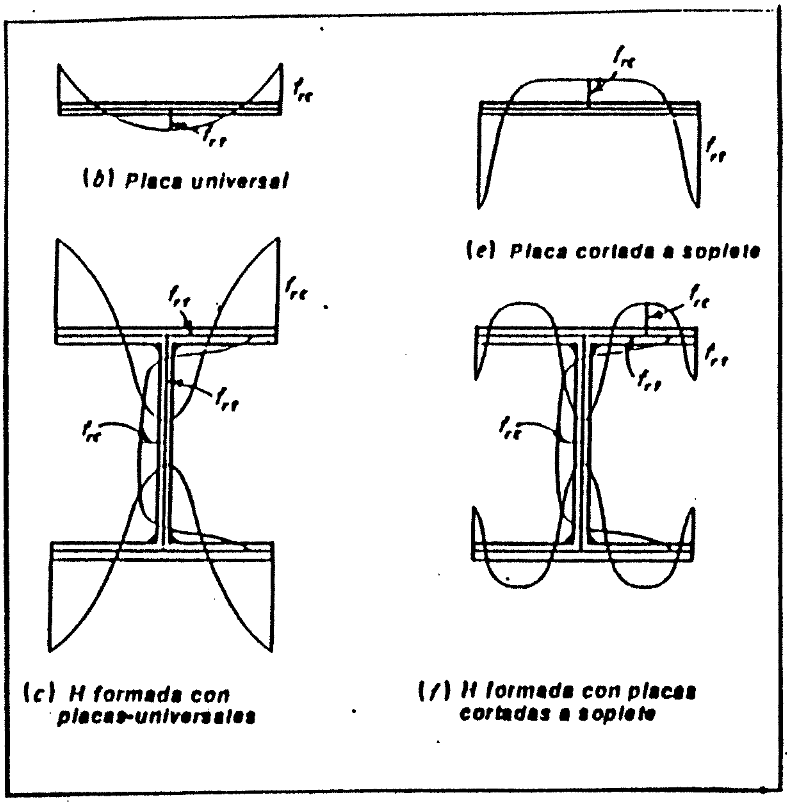


Fig. 7

Se han trazado las curvas de pandeo para diferentas perfiles laminados I teniendo en cuenta las tensiones residuales (Figura 8). Se constató que las barras de ala ancha y de alma alta, así como los perfiles IPE esbeltos, tienen un comportamiento favorable, mientras que las barra de ala ancha y poca altura (no esbeltos), por ejemplo DIE 20 poseen cargas de pandeo menores que las anteriores.-

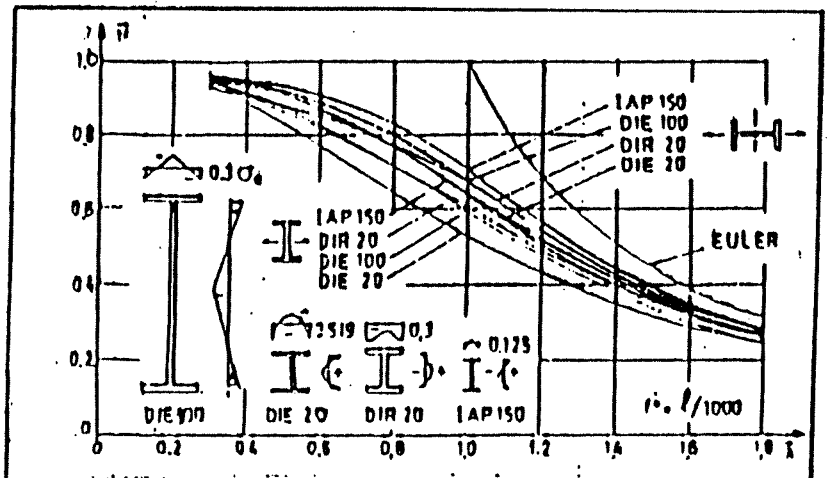


Fig. 8

Fig.8 - Perfiles I, teniendo en cuenta las tensiones internas.

En los perfiles I soldados, en el cual las alas son chapas laminadas, las tensiones residuales de compresión son elevadas en la parte exterior de las alas (con una repartición similar al perfil (1) de la Figura 6), y tienen en consecuencia un comportamiento de colapso desfavorable, similar a la de las barras de ala ancha y poca altura. El comportamiento al colapso o al pandeo es sin embargo sensiblemente mejor si las alas no son laminadas, sino fabricadas con chapas cortadas con soplete, en estos casos se produce en la zona de borde cortado con soplete tensiones residuales menores.-

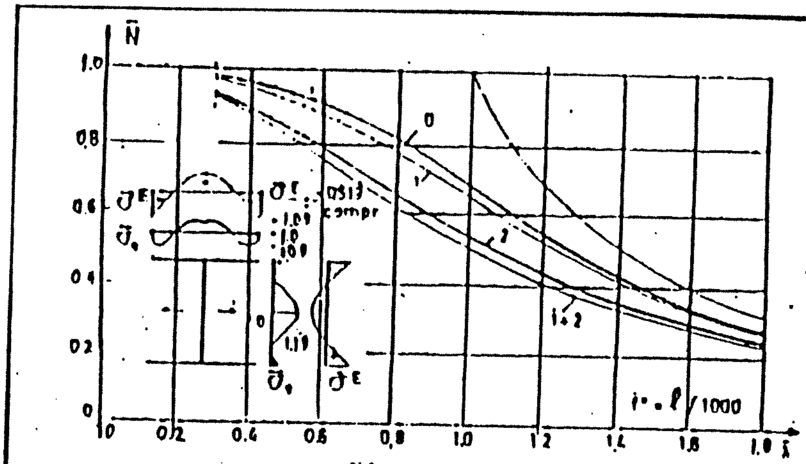


Fig. 9

Fig.9 - Influencia de las imperfecciones estructurales en DIE 20.
0 - sin imperfecciones estructurales.
1 - influencia de la dispersión de la fluencia.
2 - influencia de las tensiones residuales solas.
1-2 influencia de las dos imperfecciones.

Se tiene conocimiento que el límite de fluencia no es una constante en la sección y los procesos de fabricación son los que originan una dispersión en este límite. En la Figura 9, se representa la influencia ejercida por esta dispersión, sobre la carga de pandeo en perfiles DIE 20 con y sin tensiones residuales. Las imperfecciones estructurales son representadas por sus valores intrínsecos: $\bar{\sigma}^E = \sigma^E/\sigma_F$ que son las medias globales para las tensiones residuales, y por $\bar{\sigma}_F = \sigma_{Fi} / \sigma_F$ que son las medias globales para el límite de fluencia.-

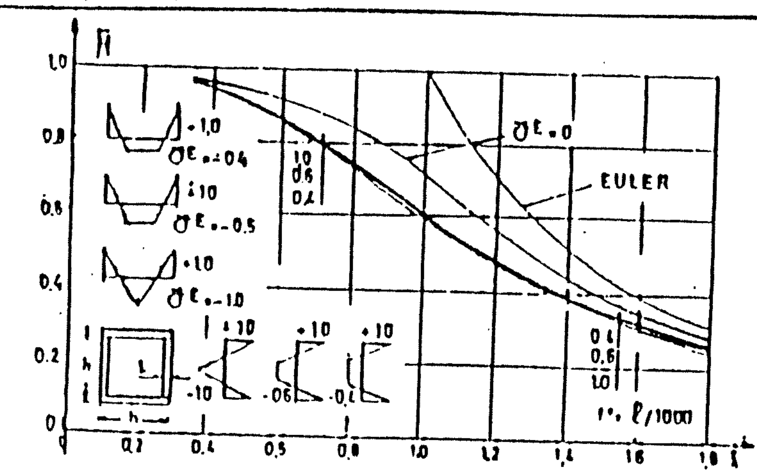


Fig. 10

Fig.10 - Influencia de las tensiones residuales en secciones cajones cuadradas. (b/t = 10).

Puede observarse que las tensiones residuales ejercen una influencia sobre la carga de pandeo más importante que la variación de la tensión de fluencia en la sección y el elemento determinánte para precisar los limites de fluencia en la sección está constituido por las alas y la influencia ejercida por la dispersión del limite de fluencia, no se toma en cuenta en los trabajos ulteriores.-

La influencia ejercida por las tensiones residuales sobre la carga de pandeo en las secciones cajón fue objeto de un estudio sistemático; los cajones soldados tienen fuertes tensiones residuales de tracción en la zona del cordón de soldadura ($\sigma^E=1$) y por razones de equilibrio existen tensiones residuales de compresión en la parte central. La repartición y el valor de estas últimas dependen de las dimensiones del cajón, en los cajones de dimensiones reducidas, las tensiones residuales de compresión pueden alcanzar el mismo valor que las de tracción, disminuyendo su valor a medida que los cajones aumentan sus dimensiones.(Figura 10).-

Se determina la influencia ejercida por estas reducciones de tensiones residuales sobre la carga de pandeo, pues si bien las reparticiones son diferentes, estas se encuentran en equilibrio, constatándose que la carga de pandeo es prácticamente independiente de le repartición de las tensiones residuales, si en el lugar de la soldadura se considera que existe un valor $\sigma^E=1$.

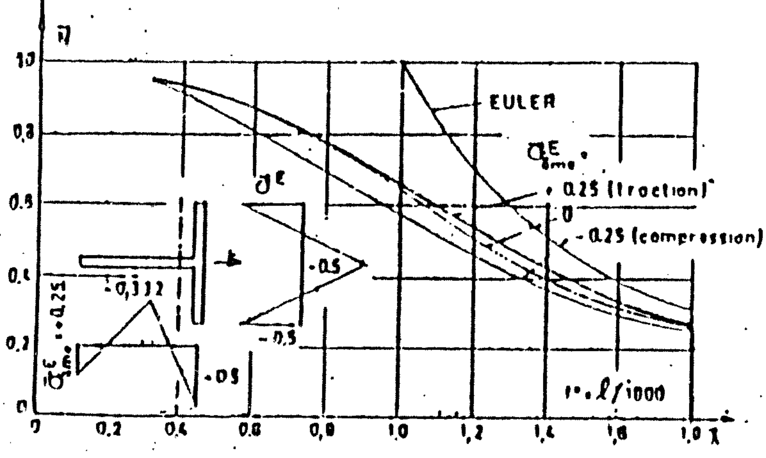


Fig.11 - Influencia de las tensiones residuales en secciones T.

Fig. 11

Otro estudio particularmente interesante es el comportamiento de perfiles T para diferentes hipótesis de repartición de tensiones residuales (Figura 11). Las mediciones de laboratorio nos muestran que, en las partes exteriores del alma, existen en general tensiones de tracción, que pueden según los casos,ser débiles tensiones de compresión. En cambio, no se observa en los perfiles soldados, en perfiles T fabricados por corte a soplete de perfiles I, las tensiones residuales de tracción sobre el corte exterior del alma.-

Puede observarse también en la Figura 11, la gran reducción de carga de pandeo en la hipótesis de tensiones residuales de compresión en el borde libre del alma y contrariamente en los casos en que estas tensiones de tracción existieran en ese sitio, se constata lógicamente un aumento de la capacidad portente en perfiles T exentos de tensiones residuales.-

2.2.2.- Excentricidad por Aplicación de las Cargas.-

La influencia por excentricidades por aplicación de las cargas en los extremos de la barra articulada, fue también objeto de un estudio profundo.-

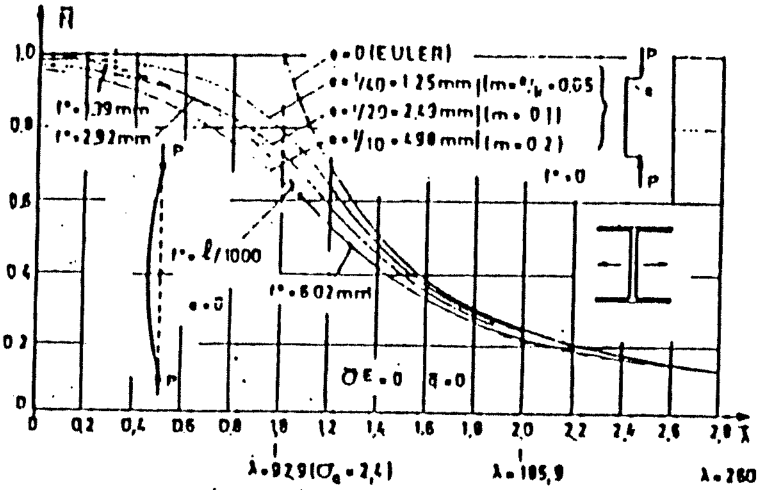


Fig.12 - Comparación de los efectos de una excentricidad y de una preflecha senoidal en un DIE 20, sin tensiones residuales.

Fig. 12

En la Figura 12 están trazadas las curvas de pandeo para perfiles I DIE 20 respecto a su menor momento de inercia: a) para una preflecha de $\ell/1000$; b) para diferentes excentricidades iniciales en función del radio de giro: i/10, i/20, i/40. Puede verse que adoptando una preflecha igual a su longitud sobre mil, se cubre de dos excentricidades la de i/20 y la i/40; naturalmente las curvas de pandeo para las cargas excéntricas no desembocan en $\bar{N}=1$, se colocan muy cerca e inferiormente sobre el eje de las ordenadas.-

En estos diagramas, hay que remarcar, que estas excentricidades iniciales ejercen en el dominio de las pequeñas esbelteces, una influencia sobre la carga crítica similar a la de una bajada del límite de fluencia. Si hoy estas excentricidades iniciales no están más tomadas en cuenta en la elaboración de las curvas de pandeo, es debido a que el límite de fluencia es adoptado con prudencia, haciendo notar que la barra con articualciones ideales no existe prácticamente. Adoptando una hipótesis apropiada de longitud de pandeo existe la posibilidad de eliminar las excentricidades o las imperfecciones y de considerar la barra comprimida con aplicación de carga centrada en sus extremos.-

2.2.3.-Influencia de las Cargas Laterales.-

La investigación nos permite saber que débiles cargas laterales, tales como los pesos de las barras o la presión del viento, ejercen una influencia que no es despreciable sobre la carga de pandeo, más particularmente si las barras son esbeltas. Esta influencia fue estudiada por G. Schulz a fin de suministrar amplios detalles posteriormente.

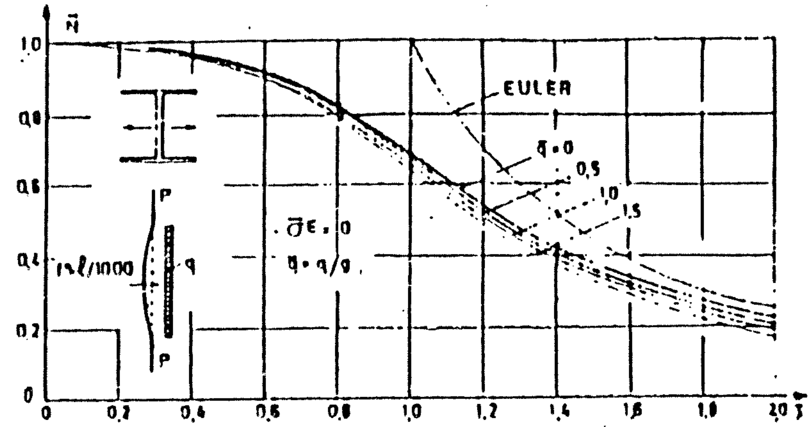


Fig. 13

Fig.13- Influencia de una carga transversal repartida; perfil utilizado DIE 20 sin tensiones internas (g es el peso propio).

En la Figura 13, pueden verse las representaciones de las investigaciones sobre perfiles I DIE 2Ø con cargas laterales y relaciones de Ø.5 , 1.Ø , 1.5 entre la carga y el peso propio de la barra. El diagrama muestra que el porcentaje de disminución de la carga crítica aumenta con la esbeltez y es más importante para las barras muy elásticas.-

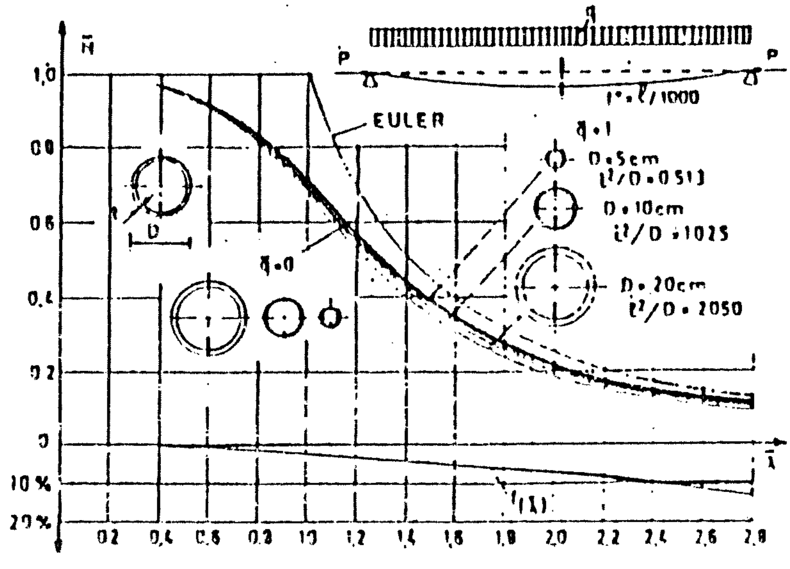


Fig. 14

Fig. 14 Influencia de una carga transversal repartida; perfil usado: tubo con D/h = 10; g = 1

G. Schulz demuestra que la influencia de las cargas laterales (Figura 14) puede ser tomada en cuenta por la fórmula:

$$(55)\quad \bar{N}(\bar{q}=1) = K_q\, \bar{N}(\bar{q}=0)$$

gracias a un factor correctivo $K_q = 1 - i^2/D \cdot f(\bar{\lambda})$

La función $f(\bar{\lambda})$ puede representarse con una presición suficiente por una recta y en la Figura 14 se muestra para un perfil tubular.-

Examinemos rápidamnete la eliminación de preflechas inadmisiblemente grande de las barras, por el proceso de enderazamiento. Se sabe que este procedimiento produce una plastificación parcial de la sección y con eso un cambio en el estado de tensiones residuales. Por las vías teóricas Ch. Massonnet ha demostrado que el enderazamiento influye favorablemente sobre éstos disminuyendo sus valores y por lo tanto favorece la carga de pandeo.-

2.2.4.- Las Curvas de Pandeo. Conclusiones Finales.-

Todas estas investigaciones y muchas más presentadas separadamente y vistas las influencias ejercidas por las diferentes imperfecciones sobre la carga de pandeo, sirvieron de apoyo necesario para elaborar una combinación racional que se presenta en la actualidad bajo un aspecto probabilistico satisfactorio.-

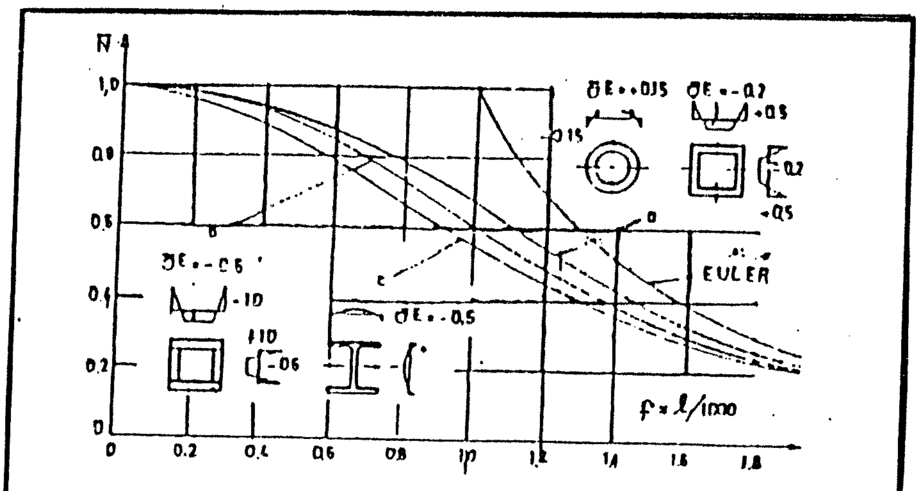


Fig. 15

Fig.15 - Curvas de pandeo para tres secciones diferentes: tubos, cajones soldados, perfil I.

La Comisión número 8 estaba persuadida en principio, que el establecimiento de una sola curva de pandeo llevaría inútilmente un perjuicio a la mayor parte de los perfiles utilizados en la práctica. También se decidió proponer varias curvas de pandeo y colocar junto a ellas los perfiles respectivos, al comienzo se previeron cuatro curvas y finalmente se decidieron por tres. Esta decisión se funda en que ellas están lo suficientemente espaciadas y además permiten un escalonamiento racional de perfiles utilizados en la construcción (Figura 15). Las curvas son trazadas para las secciones de perfiles, con las tensiones residuales medidas en laboratorio y una preflecha de $l/1000$; la curva de tubos a) está calculada para los tubos circulares y tensiones residuales; la curva de secciones cajones b) corresponde a la carga de pandeo de cajones soldados rectangulares con tensiones residuales y la curva de perfiles c) concierne a perfiles I con repartición de tensiones residuales desfavorables y pandeo con respecto al eje de inercia menor.-

2.2.5.-Limite de influencia.Espesor de Pared:

Pero antes de ordenar definivamente los perfiles en estas curvas, se debió resolver el problema del limite de fluencia, con lo cual era necesario transferir de la curva de las tensiones de pandeo (σ_k, λ) al de las curvas ($\bar{N},\bar{\lambda}$).-

Las amplias investigaciones han puesto en evidencia la influencia marcada que el espesor de las paredes ejerce sobre el limite de fluencia, y teniendo en cuenta estos resultados (que corresponde a numerosisimos ensayos) se ha determinado tres zonas para el limite de fluencia, tomando en consideración las calidades E 24 que corresponde al St 37 y E 36 que corresponde al St 52 de los aceros de la construcción.-

Dado que los limites de fluencia dependen muy poco de las curvas ($\bar{N},\bar{\lambda}$), por las hipótesis de una preflecha de la barra en función de su longitud y con tensiones residuales no muy altas, que se constatan en los aceros de construcción, hace que las hipótesis adoptadas coloquen al acero E 36 con un poco más de seguridad.-

Se han determinado los limites de fluencia siguientes en función del espesor de la pared t:

	E 24	E 36
$t \leq 20$ mm	$\sigma_F = 25.5$ Kg/mm²	$\sigma_F = 38$ Kg/mm²
20 mm $< t \leq 30$ mm	$\sigma_F = 24$ Kg/mm²	$\sigma_F = 36$ Kg/mm²
30 mm $< t \leq 40$ mm	$\sigma_F = 22.5$ Kg/mm²	$\sigma_F = 34$ Kg/mm²

(56)

El espesor determinante de la pared t es función de las partes de la sección que son solicitadas a la compresión en un proceso de pandeo. Esto es asi, y es necesario considerar por ejemplo los espesores de las alas en los perfiles I y las partes de la pared situadas en el plano de pandeo en los cajones rectangulares. Se observa más particularmente aqui, que el limite de fluencia determinado en tracción, no es absolutamente indispensable para el trazado de los diagramas o curvas ($\bar{N},\bar{\lambda}$), y en los limites de fluencia globales determinados por los ensayos sobre barras cortas, son susceptibles de predecir este fenómeno.-

Los valores propuestos aquí para σ_F (Tensión de Fluencia) son los determinados por los ultimos ensayos y asimismo su correlación con los resultados de los ensayos de pandeo.-

La elección de perfiles para las curvas a,b,c están basados en trabajos teóricos bastante bastos, en los cuales se han tomado en primer lugar los perfiles I laminados con la repartición de tensiones residuales correspondientes a diferentes formas de perfiles, habiendo tenido en cuenta los dos ejes de inercia (Figura 16).-

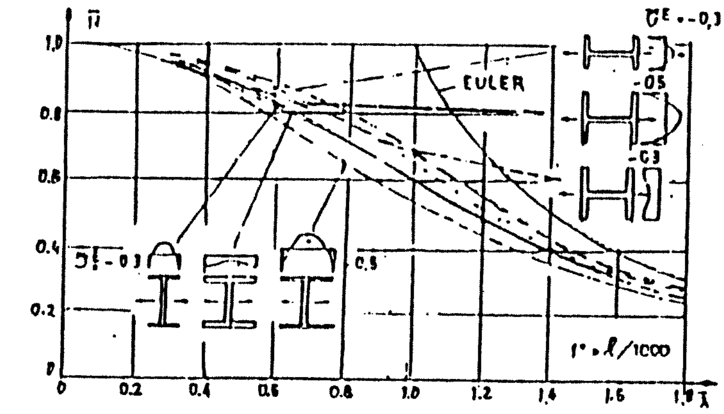


Fig.16 – Perfiles I: influencia de la repartición de imperfecciones estructurales.

Fig. 16

Se constata la disminución relativamente fuerte de la carga de pandeo en barras I, cuando se consideran los perfiles macizos de alas anchas (pandeo rspecto del eje mayor de inercia) y más aún para los perfiles de ala ancha de poca altura (petisos) y de paredes delgadas. El comportamiento más favorable es el que corresponde al perfil IPE esbelto, solicitados a pandeo según el eje de mayor o menor inercia.-

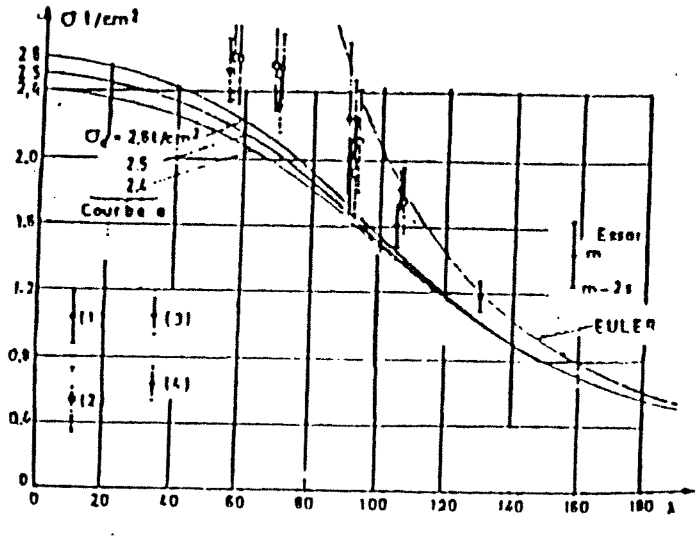


Fig.17 – Comparación entre la curva teórica a (tubos), determinada para 3 tensiones de fluencia: 2.400, 2.500, 2.600 kg/cm² y los ensayos de tubos laminados sin soldadura en aceros ST 37. (comparar con la de fig.15)

Fig. 17

Para llegar concretamente a ordenar los perfiles en las curvas a, b, y c no sólo se deben establer las consideraciones teóricas, sinó también utilizar los resultados experimentales. En lo que concierne a los tubos, se encontraban en la feliz situación de disponer de un vasto material documentado sobre los ensayos.-

En la Figura 17, puede verse la comparación entre los resultados de ensayos sobre tubos laminados sin soldadura ($\sigma_K = \sigma_{Km} - 2s$) y la curva de tubos (a), que resulta del estudiuo teórico para tres límites diferentes de fluencia.Se constata además, que con la hipótesis de un limite fluencia de 2550 kg/cm², los valores experimentales (para e < 20mm) son bien cubiertos por la curva.-

En la Tabla II puede verse los valores de tensión de fluencia característica en diferentes tubos, con diferentes esbelteces, los cuales se calcularon con la siguiente fórmula:

TABLA II

Tubos mm	λ	$\sigma_{Fm} - 2s$ t/cm²
(1) 88.9 x 5	55	2.63 (*)
	70	2.64 (*)
	90	2.66 (*)
	105	2.65
	130	2.65
(2) 127 x 127 x 4.76	55	2.68 (*)
	56.3	2.60 (*)
	70	2.57 (*)
	90	2.56 (*)
	91.2	2.62 (*)
	105	2.53 (*)
(3) ø 89 x 8	90	2.60
(4) ø 121 x 5.5	70	2.67 (*)
	90	2.61 (*)
	105	2.62 (*)

(*) $\sigma_F = \sigma_{Fm} - 2S$

Los resultados que se observan en la Figura 18, son los ensayos ejecutados por Ch. Massonnet sobre tubos en aceros de construcción de alta resistencia, y muestran que en lo concerniente a la curva de tubos (a), que es el resultado de estudios teóricos, dichos ensayos se sitúan en la mayoria de los casos sobre ella; poniéndose en evidencia además que: La influencia de tensiones residuales sobre la carga de pandeo disminuye en los aceros de construcción de alta resistencia, esto se confirma por otra parte, por una comparación entre los resultados experimentales y la curva de tubo calculadas sin tensiones residuales, dibujada en trazo interrumpido.-

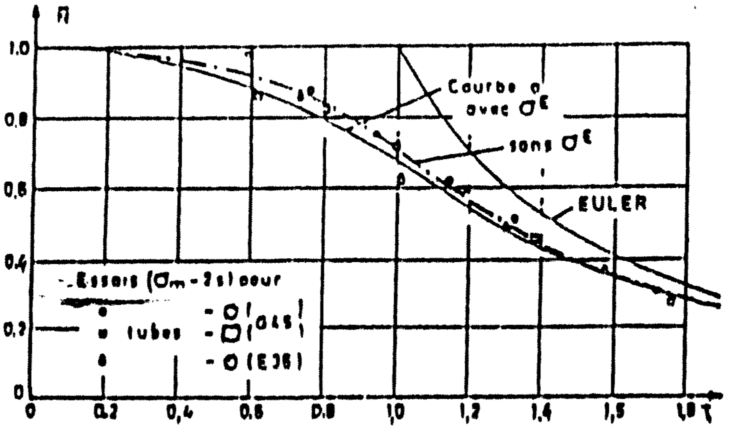


Fig.18 – Comparación entre la curva teórica a (tubos) y los ensayos de tubos laminados sin soldadura en acero de alta resistencia.(comparar con la de fig.15)

Fig. 18

El comportamieno a pandeo de tubos soldados puede verse en la Figura 19. Los resultados experimentales se sitúan, en los dominios de pequeñas esbelteces, un poco por abajo de la curva teórica ; esto es atribuido a la influencia ejercida por la deformación de la sección debido a la soldadura, que a un efecto comparable a las de una excentricidad inicial.-

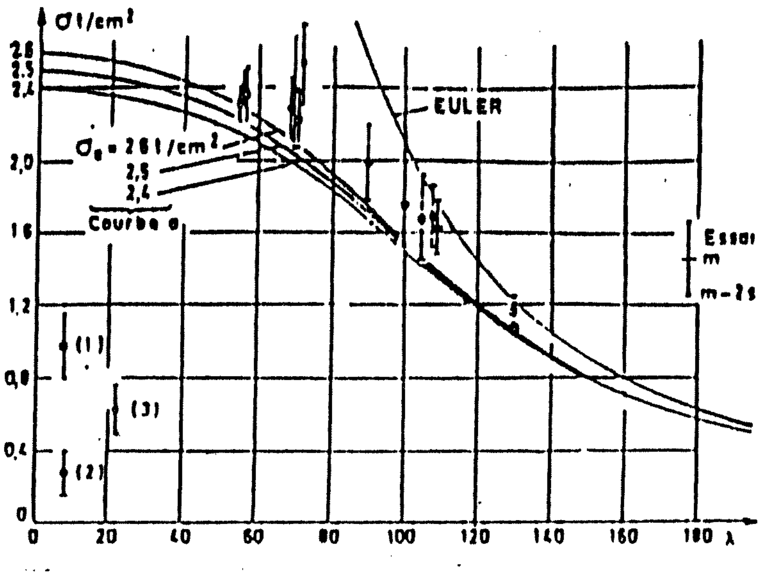


Fig.19 – Comparación entre la curva teórica a (tubos fig.14), determinada para 3 tensiones de fluencia: 2.400, 2.500, 2.600 Kg/cm² y la experimentación estática en tubos laminados soldados.

Fig. 19

El efecto de esta excentricidad sobre la carga de pandeo, puede ser tomada en cuenta de manera apropiada, con una baja ficticia dei límite de fluencia. Es interesante remarcar a este efecto que, los ensayos no permiten descubrir ninguna diferencia significativa entre los tubos circulares y los tubos rectangulares fabricados según el mismo procedimiento.-

En la Tabla III puede verse los valores de la tensión de fluencia características en tubos soldados, los mismos son siempre calculados con la fórmula (57)

$$(57)\quad \sigma_F = \sigma_{Fm} - 2S$$

TABLA III

Tubos mm	λ	$\sigma_{Fm} - 2s$ t/cm²
(1) 76.2 × 76.2 × 4.88	55	2.72 (*)
	70	2.71 (*)
	70	2.77 (*)
	90	2.66
	100	2.69
	105	2.66
	130	2.69
(2) 88.9 × 88.9 × 6,35	55	2.74
	70	2.57
	109	2.75
(3) ø 114,3 × 6.35	55	2.83
	70	2.84 (*)
	108	2.52

*) Valor aproximado

Los ensayos sobre perfiles cajón soldados, fueron ejecutados solamente para una sola esbeltez $\lambda = 90$, debido a que en este dominio la influencia de las tensiones residuales es máxima. La Figura 20 muestra una muy buena correspondencia entre los valores experimentales y los valores calculados sobre la base de un límite de fluencia de 2.760 kg/cm², determinados sobre los ensayos sobre barras cortas.-

La curva para secciones cajones (b), elaboradas para σ = 2.550 kg/cm², con un espesor de paredes de la barra experimental t ≤ 20 mm, cubre de manera satisfactoria los resultados de los ensayos.-

Fueron numerosos los ensayos ejecutados con los perfiles I y más particularmente el perfil IPE 160, siendo los resultados expuestos en la Figura 21. Se recuerda que el límite de fluencia utilizado es la tensión de fluencia característica, que resulta de los ensayos compresión global sobre retazos de las mismas barras. Una fuerte dispersión de los resultados experimentales es visible en el dominio de esbelteces entre 50 y 100; sin embargo la curva límite inferior puede ser representada con una presición sorprendente por la curva de cajones (b)de la Figura 15. En consecuencia, aquí es igualmente representativo para los perfiles IPE, solicitados a pandeo respecto del eje de menor momento de inercia.-

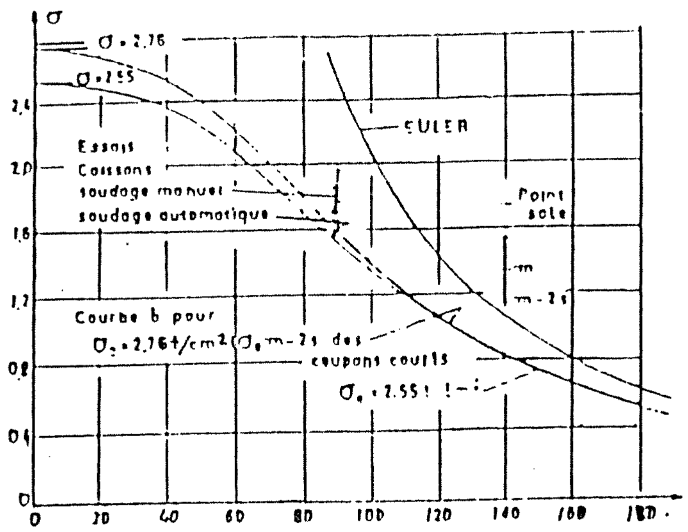


Fig. 20

Fig.2.0 - Comparación entre la curva teórica b (fig.15) y la experimentación estática en cajones soldados.

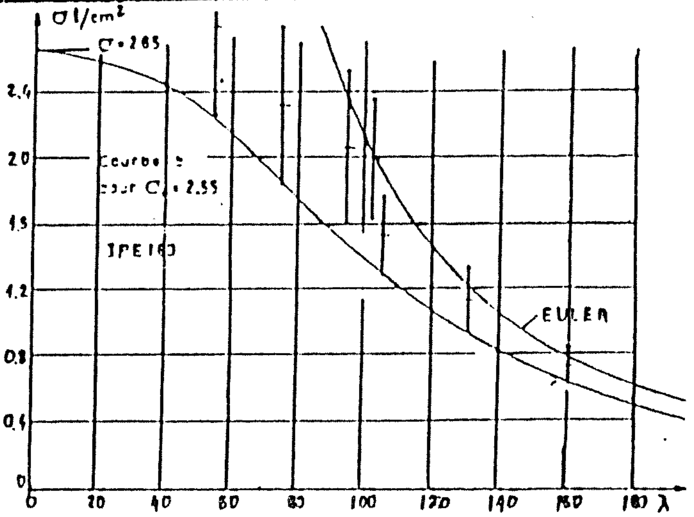


Fig. 21

Fig.21 - Comparación entre la curva teórica b (fig.14) y la de los ensayos IPE 160 para una tensión de fluencia de 2.650 Kg/cm².

Un escalonamiento de otras formas de perfiles ha sido hecho y teniendo en cuenta los fundamentos dados, referente a la hipótesis de las imperfecciones probables de producirse. En todo caso, el cálculo ha constituido aquí un medio auxiliar y los ensayos una confirmación necesaria para señalar a cada perfil su correspondiente curva de pandeo. Los autores piensan haber logrado englobar prácticamente todos los tipos de barras que usualmente se utilizan. Si alguna duda existiese en cuanto a la elección de una de las curvas, adyacentes, para algún perfil en especial, se adoptará una actitud prudente y escoger de las dos, la de valor más bajo.-

Se han ejecutado una multitud de ensayos a fin de determinar la poca influencia que ejerce la tensión de fluencia en la determinación de los diagramas ($\bar{N}$; $\bar{\lambda}$). Es por todos conocido que la tensión de fluencia depende de la calidad del acero, y en intervalos determinados el error que se comete es pequeño al utilizar diagramas construidos con tensiones de fluencia de 2550 kg/cm², quedando en consecuencia del lado de la seguridad. Se puede dcir entonces que existe una relativa independencia de la tensión de fluencia y lógicamente de la calidad del acero, como puede verse en la Figura 22.-

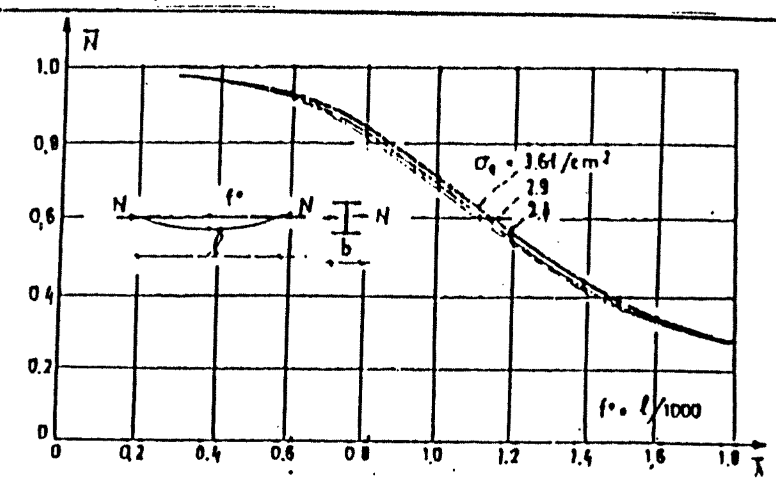


Fig.22 - Influencia de la tensión de fluencia, en un perfil I-DIE-20, respecto del eje menor de inercia.

Fig. 22

Es bueno establecer una comparación , con las casos de cargas HZ entre la DIN 4114 y el reglamento francés CM 66. Las nuevas curvas de pandeo de la CECM han sido divididas por el coeficiente de seguridad, cuyo valor para este caso es de 1,33. La Figura 23 nos muestra esta comparación para los aceros de construción E 24 y de espesor de pared t ≤ 20mm y la Figura 24 para espesores de paredes de 20 < t ≤ 30mm.-

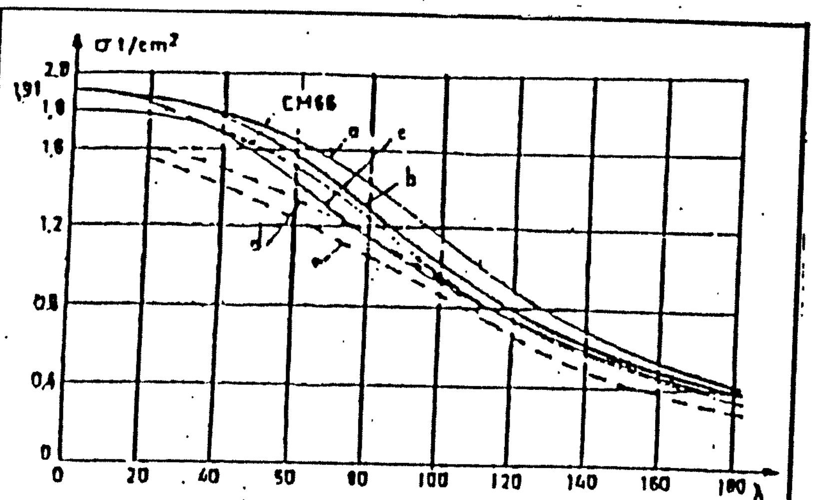


Fig.23- Curvas teóricas a-b-c determinadas con σ_F= 2.550 Kg/cm², afectadas de un coeficiente de seguridad de 1,33 y con espesores t≤ 20mm. Comparación con la norma alemana DIN 4114 - tubos 1961 (d), y perfiles 1952 (e), y con la reglamentación francesa CM66.

Fig. 23

La comparación entre curvas de la DIN 4114, las francesas CM 66 y las nuevas curvas de pandeo de la CECM muestran a primeras luces que estas últimas nos conducen à importantes economias de material.-

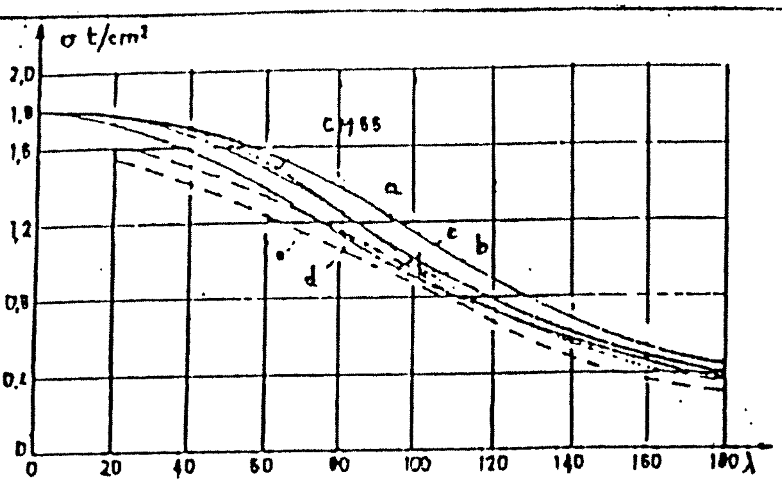


Fig. 24

Fig.24.- La misma comparación anterior, pero con σ_F = 2.400 Kg/cm² y con espesores 20 < t ≤ 30mm.

Quedaba sin embargo, un punto que parece criticable y que debe ser resuelto: el valor adoptado de la tensión de fluencia, para el punto de partida de estas curvas de esbeltez cero. En efecto, los ensayos de compresión realizados sobre probetas cortas arrojan valores tales que tendremos que adoptar un valor de σ_F = 25,5 kg/mm² para la categoría de los perfiles en cuestión; no obstante siempre se ha tomado el valor oficialmente admitido de 24 kg/mm², que por otra parte es el valor representativo de una población de secciones utilizadas en la construcción, y si usamos este último nos colocamos en las condiciones de cálculo en tracción, siendo nuestras condiciones diferentes pues tenemos compresión.-

Las curvas de la CECM no son en su integridad, la curva experimental pura, sinó curvas modificadas en sus puntos de partida (σ, λ). Esta particularidad no trae consecuencia alguna en el dimensionamiento de barras con cualquier valor de esbeltez en una estructura. Si quisiéramos aplicar esto a calidades de acero diferente, tendríamos que tener curvas correspondientes a estos aceros, lo que nos obligaría a trabajar con compilaciones de tablas y curvas.-

Para generalizar la aplicación de los resultados, se recurre al trazado de curvas adimensionales, las cuales sirven para una gran variedad de calidades de acero de construcción. Trazando la curva dimensional matemática o verdadera curva experiemntal en función de (σ_K, λ),partiendo de 25,5 kg/mm² para esbeltez cero y a continuación se traza otra, con punto de partida de 24 kg/mm², ésta se situará en todo su trazado a un nivel inferior de los valores experimentales, dando como resultado una pérdida sensible en la economía si se utiliza este último valor, pero gracias al ingenio volcado para la búsqueda de resultados esto no se produce. Fig. 24.1 - 24.2 - 24.3 - 24.4

Existe una realidad bien conocida, y es que a partir de un mismo acero (en productos laminados), la forma de la sección se realiza con un cierto martilleo, a fin de obtener los espesores deseados y lógicamente esto debe gravitar en el valor límite de fluencia.-

Hacia falta rendirse a la evidencia (antes de entregarse a un conformismo reglamentario) y adoptar límites de fluencia diferentes según los espesores. Una explicación de esta anomalía (o contradicción), que los ensayos muestran bien como real, a sido realizado por A. Cárpena en sus fundamentos sobre los

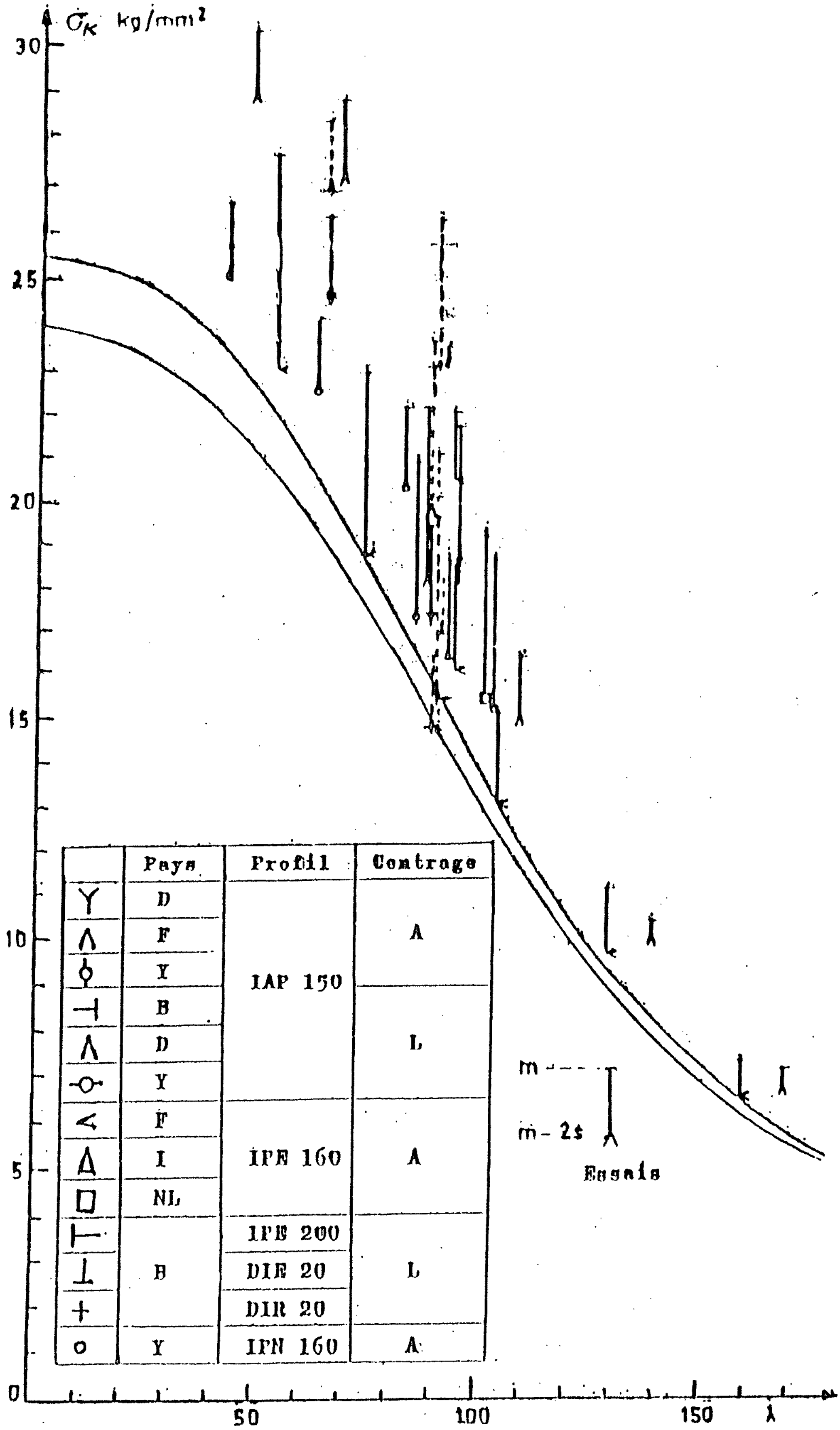


Fig 24.1 Courbes experimentales de flambement des profiles en I. Contraintes d'affaissement calculées avec les aires reelles des sections. A = ame (alma), L = ailes (alas).

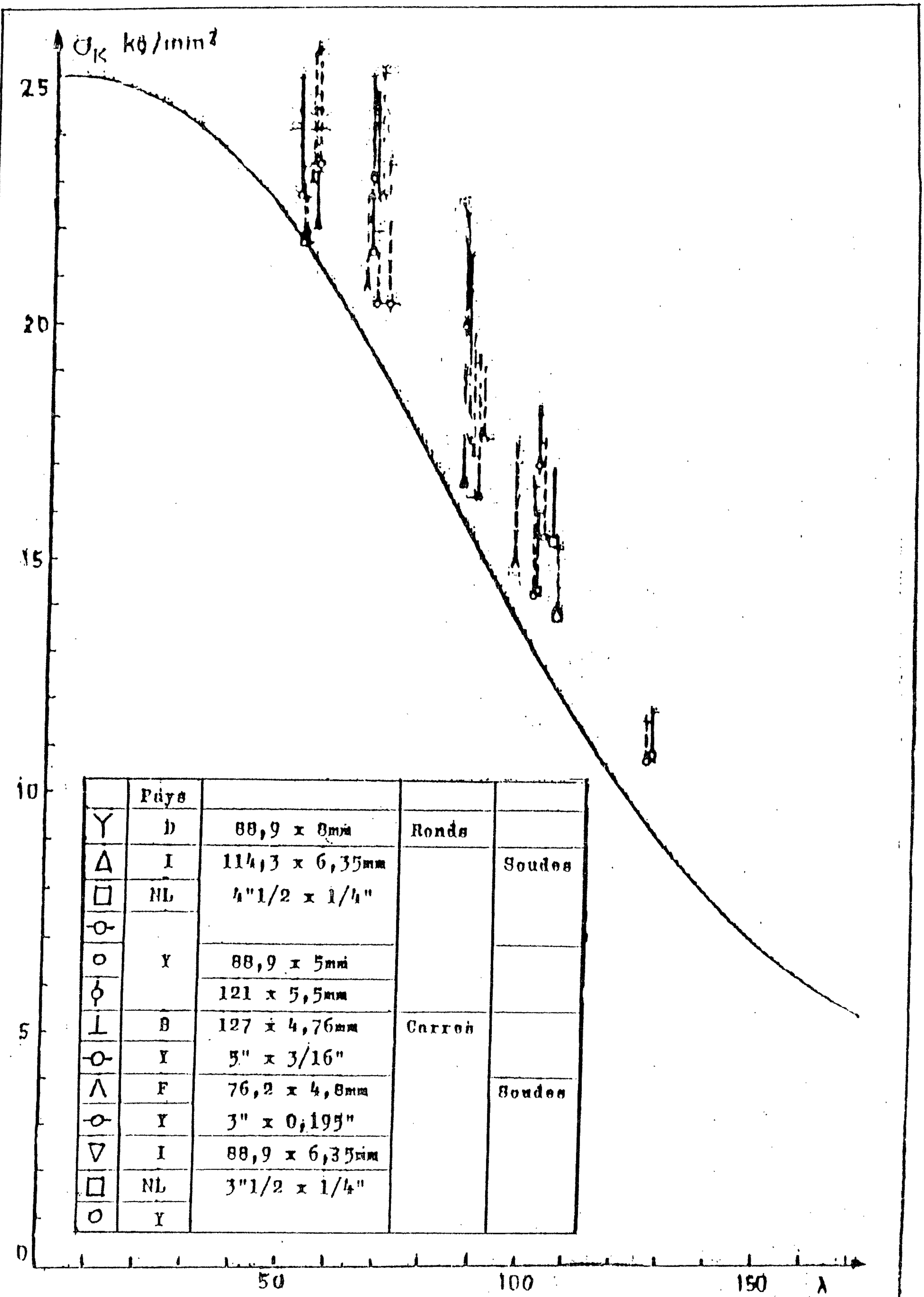
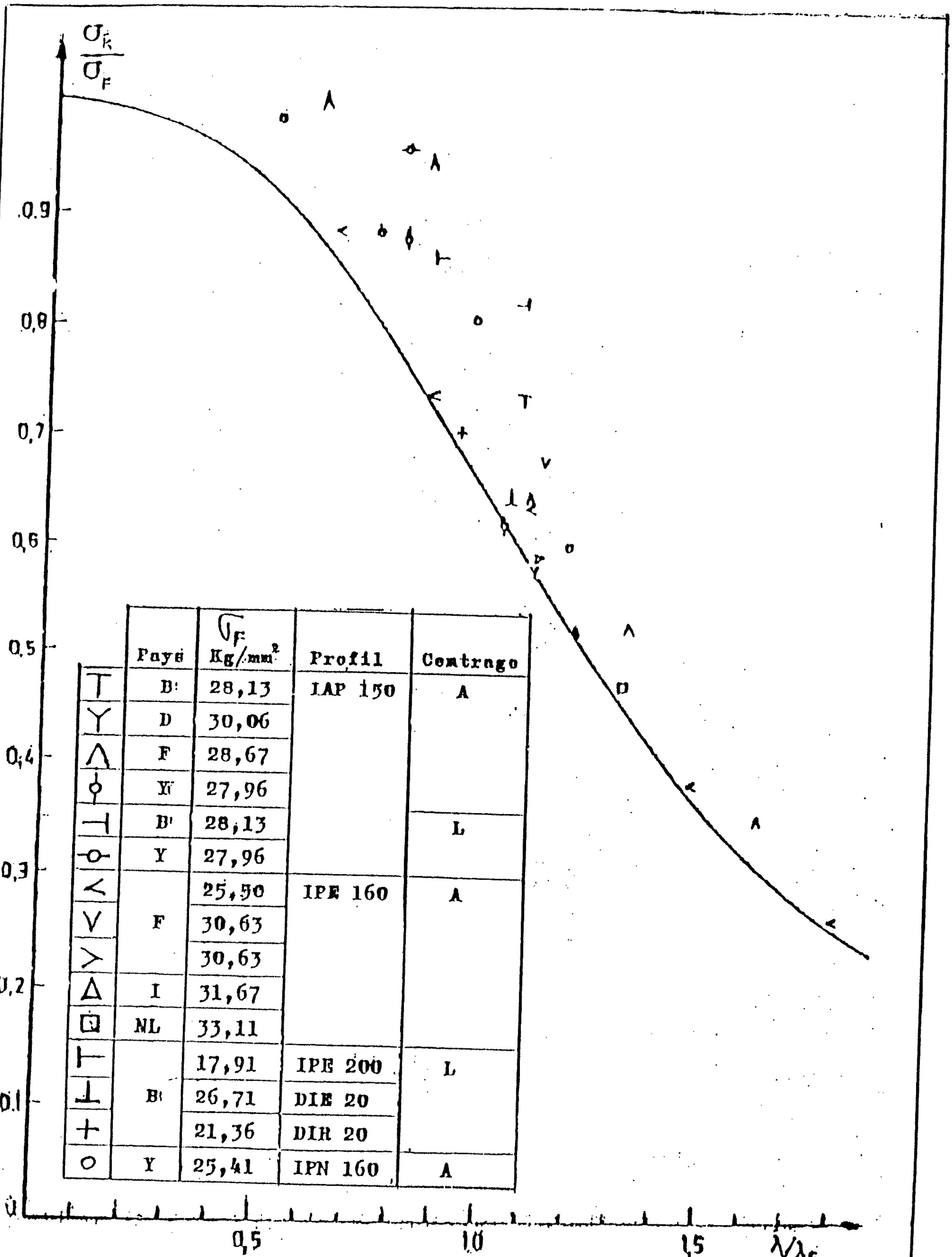


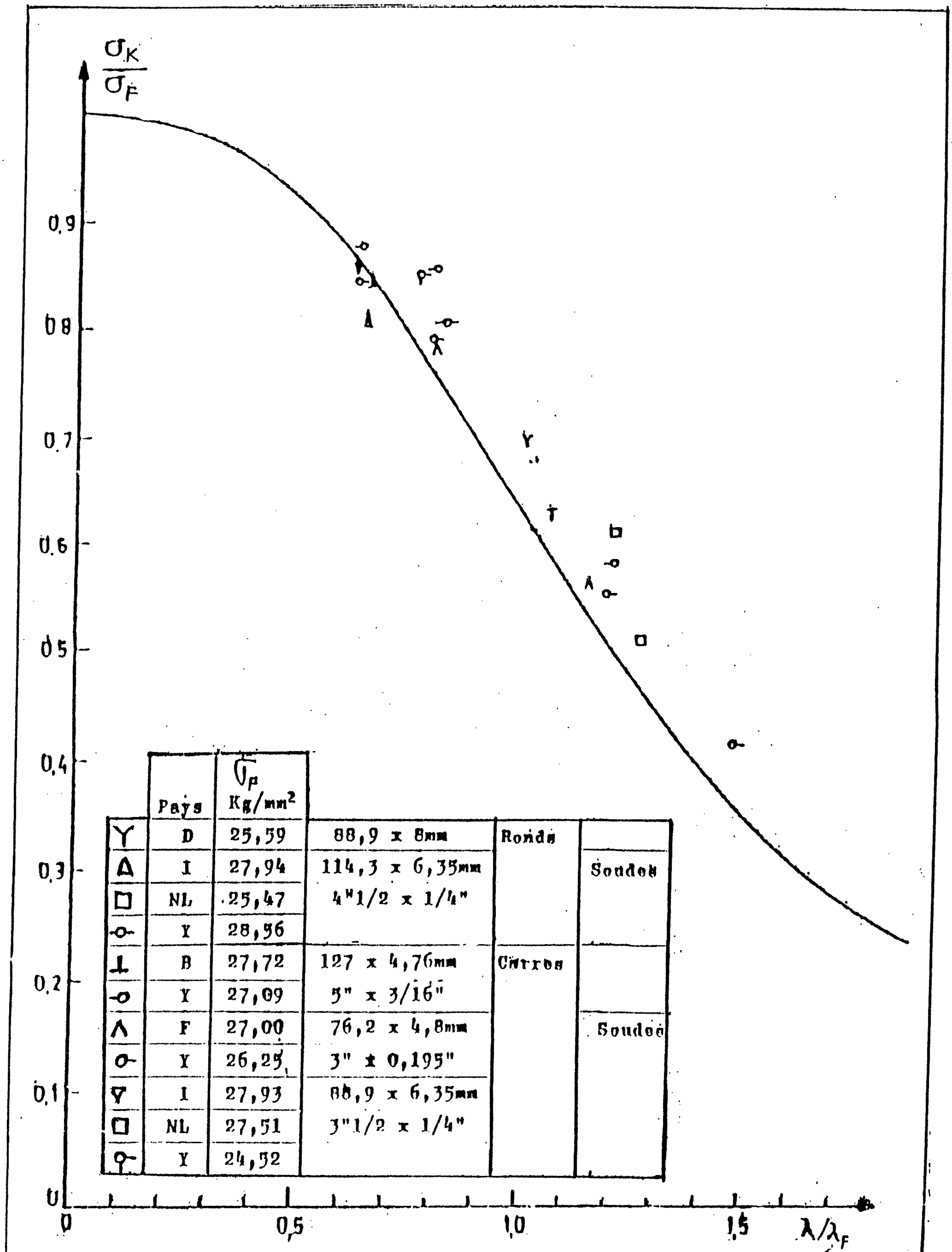
Fig 24.2 Courbe experimentale de flambement des profiles tubulaires. Contraintes d'affaissement calculees avec les aires reelles des sections.



	Pays	σ_F Kg/mm^2	Profil	Centrage
⊤	D'	28,13	IAP 150	A
Y	D	30,06		
Λ	F	28,67		
ϕ	Y	27,96		
⊣	D'	28,13		L
-o-	Y	27,96		
<		25,50	IPE 160	A
V	F	30,63		
>		30,63		
Δ	I	31,67		
⊡	NL	33,11		
⊢		17,91	IPE 200	L
⊥	B'	26,71	DIE 20	
+		21,36	DIR 20	
o	Y	25,41	IPN 160	A

Fig 24.3 Courbe experimentale de flambement des profiles en I. Diagramme non dimensionnel.

A = ame (alma) L = ailes (alas)



	Pays	σ_p Kg/mm²			
Y	D	25,59	88,9 x 8mm	Ronds	
Δ	I	27,94	114,3 x 6,35mm		Soudés
□	NL	25,47	4"1/2 x 1/4"		
-o-	Y	28,56			
⊥	B	27,72	127 x 4,76mm	Carrés	
-o	Y	27,09	5" x 3/16"		
Λ	F	27,00	76,2 x 4,8mm		Soudés
o-	Y	26,25	3" x 0,195"		
∀	I	27,93	88,9 x 6,35mm		
□	NL	27,51	3"1/2 x 1/4"		
♀-	Y	24,52			

Fig 24.4 Courbe experimentale de flambement des profiles tubulaires. Diagramme non dimensionnel.

métodos de la estadística matemática, respetando así los principios mismos que hacen a la base de la búsqueda, y establecer el límite de fluencia a tener en cuenta en las curvas de pandeo, siendo la fluencia una de las variables aleatorias estadísticamente independientes, que actúan sobre la carga crítica, y es por ello que la fluencia debía ser diferente y superior a los resultados de ensayos de tracción. Este problema de probabilidad compuesta, ha permitido conservar así el principio de seguridad homogénea.-

Es así que se ha podido establecer las curvas experimentales representativas de pandeo y los límites de fluencia que se tomaron responden a la evidencia experimental, y éstos no deben ser sobrepasados, y conviene mantenerse muy próximos a ellos a fin de realizar una seguridad coherente y un dimensionamiento económico.-

En la Tabla IV puede verse las características de los perfiles ensayados:

Tabla IV

Type de profils	$h \times r_a$ ou $\phi \times e$ mm	$b \times e$ mm	Section nominale S_0 mm²	i_y mm	nombre d'essais 1061
1. Profilés I :					316
IAP 150	150 × 5.3	75 × 8.5	2012	17.1	238
IPE 160	160 × 5	82 × 7.4	2010	18.4	231
IPE 200	200 × 5.6	100 × 8.5	2850	22.4	11
IPN 160	160 × 9.5	11 × 9.5	2280	15.5	36
2. Profilés I et H :					54
RSJ 5" 3"	127 × 4.5	76,2 × 7.6	1706	17.2	10
DIE 20	190 × 7	197 × 11	5703	19.6	11
DIR 20	220 × 16	206 × 26	13594	52.8	11
I reconstitué soudé	190 × 7	197 × 11	5703	49.6	22
3. Profilés tubes ronds :					137
Tube sans soudure	121 × 5.5		1976	40.9	29
BS 15 soudé	114.3 × 6.35		2154	38.1	40
Tube sans soudure	88.9 × 5		1320	29.1	60
Tube sans soudure	88.9 × 8		2028	28.7	10
4. Profilés tubes carrés :					188
BS 15 sans soudure	127 × 4.76		2370	47.8	67
BS 15 soudé	88.9 × 6.35		1990	32.0	40
BS 15 soudé	76.2 × 4.88		1329	28.7	81
5. Profilés en T :					94
1/2 IPN 200	100 × 7.5	90 × 11.3	1572	18.8	40
T 4" · 3"	76.2 × 12.7	101.6 × 12.7	2102	21.6	10
TB 60	60 × 10	120 × 10	1700	14.8	30
cornières L rivées	70 × 12 × 71	12 701 × 7	1872	21.2	14
6. Profilés en caisson :					76
caisson carré soudé	150 · 10	150 × 10	5600	32.1	22
2 cornières soudées	50 · 5	50 × 5	987	20	54

A continuación pueden verse las tablas: A_1, B_1, A_2, A_3, B_2, B_3, A_4, A_5, Λ, B_4, B_5, A_6, B_6, de ensayos realizados por los diferentes paises en el cual constan el número de ensayos, el país, tipo de perfil, N= Nro. de ensayos realizados, esbeltez λ, $m = \sigma_m$ = tensión media, s= desvición standard y $\sigma_K = m - 2s$ = tensión crítica.

TABLEAU A 1. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section nominale*

Profil en I

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m — 2 s kgf/mm²
1	D	IAP 150	4	90	19,430	1,047	17,336
2	B		2	90	21,745	0,417	20,911
3	F		20	50	30,335	0,773	28,790
4			19	70	28,894	0,703	27,489
5			20	90	22,085	1,845	18.395
6			20	110	16,339	0,588	15,163
7			20	140	10,482	0,199	10,083
8			20	170	7,175	0,103	6,969
9	F		26	170	6,209	0,336	5,536
10	Y		15	66,7	26,551	0,885	24.781
11			8	86,7	20,850	1,757	17,340
12	F		20	90	19.347	2,033	15.281
13			19	170	5,925	0,298	5,329
14	B*		6	90	26,198	1,647	22,905
15	D*		8	90	23,629	1,898	19,832
16	Y*		3	66,7	28,693	0,964	26,765
17	F	IPE 160	30	55	27.902	2,733	22.435
18			30	75	23.150	2,430	18.290
19			31	95	18.696	1,457	15.783
20			30	105	15,271	1,225	12.820
21			22	130	11.350	1,003	9.344
22			17	160	7,444	0,561	6,322
23	F		10	95	22,703	0,818	21,066
24	F		10	95	22,387	1,652	19,083
25	GB		6	95	20,670	1,083	18,504
26	I		9	95	19,396	0,924	17,548
27	NL		10	102	19,033	1,815	15,401

* Centrage sur l'aile

D= Alemania
B= Bélgica
F= Francia
Y= Yugoslavia
GB= Gran Bretaña
I= Italia
NL= Paises Bajos

EXPLOITATION DES RÉSULTATS D'ESSAIS DE FLAMBEMENT

TABLEAU B 1. *Contraintes d'affaissement calculées sur la section réelle*

Profil en I

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m — 2 s kgf/mm²
1	D	IAP 150	4	90	19,327	1,038	17,251
2	B		2	90	21,550	0,509	20,532
3	F		20	50	30,205	0,659	28,886
4			19	70	28,640	0,746	27,149
5			20	90	21,965	1,873	18,219
6			20	110	16,283	0,640	15,004
7			20	140	10,403	0,188	10,027
8			20	170	7,124	0,117	6,889
9	F		26	170	6,342	0,380	5,580
10	Y		15	66,7	26,192	0,834	24,525
11			8	86,7	20,729	1,765	17,199
12	F		20	90	19,256	2,015	15,152
13			19	170	5,966	0,329	5,307
14	B		6	90	26,108	1,542	23,024
15	D		8	90	23,489	1,905	19,678
16	Y		3	66,7	28,213	0,720	26,772
17	F	IPE 160	30	55	27,480	2,477	22,525
18			30	75	22,810	2,050	18,710
19			31	95	18,446	1,207	16,032
20			30	105	15,056	0,997	13,062
21			22	130	11,140	0,727	9,686
22			17	160	7,342	0,359	6,623
23	F		10	95	21,928	0,776	20,376
24	F		10	95	21,616	1,855	17,905
25	GB		6	95			
26	I		9	95	18,550	1,087	16,377
27	NL		10	102	19,033	1,816	15,402

TABLEAU A2. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section nominale*

Profil en I

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	$m - 2s$ kgf/mm²	
1	B	IPE 200	8	90	20,255	2,500	15,255	
2		DIE 20	7	90	17,647	0,617	16,413	
3		DIR 20	8	90	17,590	0,779	16,031	
4		I soudé	8	90	15,220	0,716	13,788	
5		I soudé	8	90	15,758	1,588	12,582	
6	GB	RSJ 5" × 3"	10	70	27,168	2,312	22,545	
7	Y	IPN 160	9	44,2	26,032	0,656	24,719	
8			9	64,2	23,550	0,821	21,905	
9			9	84,3	21,750	0,893	19,963	
10			9	104,2	18,160	1,655	14,853	
11	B	IPE 200	3	90	19,767	4,125	11,516	Barres recuites
12		DIE 20	2	90	19,315	0,091	19,133	
13		DIR 20	3	90	21,673	2,424	16,825	
14		I soudé	3	90	20,247	0,901	18,445	
15		I soudé	3	90	18,557	1,275	16,007	

4 et 14 soudage manuel
5 et 15 soudage automatique

TABLEAU A 3. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section nominale*

Profil en T

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	$m - 2s$ kgf/mm²
1	D	2 cornières rivées	14	90	15,94	1,226	13,482
2	D	TB 60	17	90	20,86	1,632	17,604
3	NL		11	114	16,89	1,667	16,893
4	GB	4" × 3"	10	70	19,76	1,138	17,481
5	Y	½ IPN 200	7	38,7	25,28	0,449	24,387
6			9	48,7	22,57	1,510	19,554
7			8	68,7	21,59	0,877	19,835
8			9	88,8	18,90	2,069	14,767
9			7	108,7	16,81	1,592	13,631

TABLEAU B 2. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section réelle*

Profil en I

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m — 2 s kgf/mm²
1	B	IPE 200	8	90	19,545	2,074	15,398
2		DIE 20	7	90	18,166	0,613	16,939
3		DIR 20	8	90	16,36	0,792	14,774
4		I soudé	8	90	14,989	0,552	13,884
5		I soudé	8	90	15.709	1,684	12,341
6	GB	RSJ 5" X 3"	10	70			
7	Y	IPN 160	9	44.2	26.54	0.753	25.038
8			9	64.2	24.12	0.843	22.434
9			9	84.3	22,26	0,919	20.425
10			9	104,2	18,50	1,703	15,082
11	B	IPE 200	3	90	19,45	4,016	11,419
12		DIE 20	2	90	19,98	0,184	19,612
13		DIR 20	3	90	20,66	2,379	15,902
14		I soudé	3	90	20,35	0,905	18,538
15		I soudé	3	90	18,43	1,477	15,476

TABLEAU B 3. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section réelle*

Profil en T

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m —2 s kgf/mm²
1	D	2 cornières rivées	14	90	15,53	0,930	13,670
2	D	TB 60	17	90	20,71	1,610	17,490
3	NL		11	114	16,32	1,581	13,161
4	GB	4" x 3"	10	70			
5	Y	½ IPN 200	7	38,7	25,48	0,463	25,554
6			9	48.7	22,98	1,451	20,075
7			8	68,7	21,89	0,938	20,019
8			9	88,8	19,24	2,009	15,225
9			7	108,7	16,89	1,577	13,738

TABLEAU A 4. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section nominale*

Profil en tube rond

n°	Pays	Profil Ø × e	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m — 2 s kgf/mm²	
1	GB	114,3 × 6,35	10	70	25,11	1,190	22,727	Tube soudé
2	I	4 1/2" × 1/4"	10	55	22,86	0,490	21,884	Tube soudé
3	NL		10	108	16,77	0,782	15,203	Tube soudé
4	Y		10	70	24,80	1,438	21,914	Tube soudé
5	D	88,9 × 8	10	90	22,39	2,277	17,835	Tube sans soudure
6	Y	88,9 × 5	12	55	25,12	1,364	22,390	Tube sans soudure
7			12	70	22,81	0,933	20,941	Tube sans soudure
8			12	90	18,66	1,250	16,160	Tube sans soudure
9			12	105	15,70	0,825	14,048	Tube sans soudure
10			12	130	11,58	0,452	10,679	Tube sans soudure
11	Y	121 × 5,5	12	70	26,11	1,136	23,846	Tube sans soudure
12			7	90	24,46	2,124	20,215	Tube sans soudure
13			10	105	19,27	1,361	16,552	Tube sans soudure

TABLEAU A 5. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section nominale*

Profil en tube carré

n°	Pays	Profil b × e	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m — 2 s kgf/mm²	
1	B	127 × 4,76	12	56,3	26,82	1,376	24,066	Tube sans soudure
2			12	91,2	21,69	1,521	18,646	Tube sans soudure
3	Y	5" × 3/16"	11	55	26,88	1,270	24,342	Tube sans soudure
4			10	70	26,80	2,099	22,605	Tube sans soudure
5			10	90	19,99	1,514	16,964	Tube sans soudure
6			12	105	18,11	1,058	15,981	Tube sans soudure
7	F	76,2 × 4,8	11	70	23,32	0,896	21,527	Tube soudé
8			12	100	17,80	1,189	15,425	Tube soudé
9	Y	3" × 0,195"	12	55	24,23	0,884	22,462	Tube soudé
10			10	70	22,81	0,796	21,218	Tube soudé
11			11	90	20,29	1,099	18,091	Tube soudé
12			12	105	17,07	1,211	14,645	Tube soudé
13			12	130	11,96	0,374	11,216	Tube soudé
14	GB	88,9 × 6,35	10	70	27,59	0,651	26,293	Tube soudé
15	I	3 1/2" × 1/4"	10	55	23,75	0,520	22,714	Tube soudé
16	NL		10	109	16,17	0,656	14,856	Tube soudé
17	Y		10	70	24,14	1,401	21,338	Tube soudé

TABLEAU B 4. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section réelle*

Profil en tube rond

n°	Pays	Profil Ø × e	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m — 2 s kgf/mm²
1	GB	114,3 × 6,35	10	70			
2	I	4 1/2" × 1/4"	10	55	23,43	0,538	22,354
3	NL		10	108	16,98	0,779	15,420
4	Y		10	70	25,09	1,115	22,859
5	D	88,9 × 8	10	90	21,60	1,964	17,676
6	Y	88,9 × 5	12	55	25,42	1,250	22,924
7			12	70	23,23	0,780	21,671
8			12	90	19,04	1,150	16,742
9			12	105	16,13	0,835	14,464
10			12	130	11,85	0,444	10,966
11	Y	121 × 5,5	12	70	25,42	0,879	23,663
12			7	90	22,45	1,162	20,131
13			10	105	18,17	0,579	17,011

TABLEAU B 5. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section réelle*

Profil en tube carré

n°	Pays	Profil b × e	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m — 2 s kgf/mm²
1	B	127 × 4,76	12	56,3	25,96	1,362	23,232
2			12	91,2	20,85	1,767	17,312
3	Y	5" × 3/16"	11	55	26,02	1,226	23,572
4			10	70	25,55	1,355	22,839
5			10	90	19,29	1,410	16,471
6			12	105	17,61	1,018	15,570
7	F	76,2 × 4,8	11	70	22,79	0,867	21,055
8			12	100	17,47	1,179	15,110
9	Y	3" × 0,195"	12	55	23,51	0,781	21,954
10			10	70	22,12	0,771	20,580
11			11	90	19,75	1,033	17,683
12			12	105	16,69	1,169	14,352
13			12	130	11,63	0,403	10,821
14	GB	88,9 × 6,35	10	70			
15	I	3 1/2" × 1/4"	10	55	22,79	0,359	22,069
16	NL		10	109	15,35	0,746	13,861
17	Y		10	70	23,56	1,478	20,607

TABLEAU A 6. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section nominale*

Profil en caisson

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m − 2 s kgf/mm²
1	B	4 tôles soudées	8	90	17,13	0,724	15,684
2			8	90	17,26	1,682	13,891
3	Y	2 cornières soudées	17	39,5	26,83	1,177	24,483
4			15	58,5	23,83	0,825	22,179
5			9	77,5	21,11	1,262	18,589
6			8	96,5	18,32	0,438	17,441
7	B	4 tôles soudées	3	90	19,96	0,275	19,406
8			3	90	20,54	0,319	19,899

1 et 7 soudées manuellement · 2 et 8 soudées automatiquement

TABLEAU B 6. — *Contraintes d'affaissement calculées sur la section réelle*

Profil en caisson

n°	Pays	Profil	N	λ	m kgf/mm²	s kgf/mm²	m − 2 s kgf/mm²
1	B	4 tôles soudées	8	90	17,19	0,938	15,312
2			8	90	17,02	1,717	13,586
3	Y	2 cornières soudées	17	39,5	26,59	1,064	24,462
4			15	58,5	24,11	0,961	22,191
5			9	77,5	21,00	1,060	18,883
6			8	96,5	18,32	0,580	17,158
7	B	4 tôles soudées	3	90	19,85	0,520	18,811
8			3	90	20,49	0,536	19,421

Cada ensayo de laboratorio, está debidamente documentado en un ficha, una de las cuales puede observarse en la Figura 25.-

CONVENTION EUROPÉENNE DE LA CONSTRUCTION MÉTALLIQUE

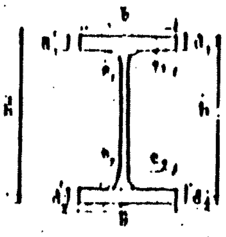
Commission n° 8 : Stabilité de forme

SOUS-COMMISSION POUR L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU FLAMBEMENT

ESSAIS DE FLAMBEMENT

CENTRE EXPÉRIMENTAL DE RECHERCHES ET D'ÉTUDES DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

12, Rue Brancion - PARIS 15e



Section : IPE 160
Élancement : 160
Barre n°
Éprouvette n° 84
Essai n°
Date de l'essai :

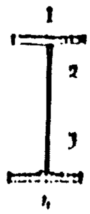
1° Relevé géométrique :

	h'	h	b_1	b_2	d'_1	d_1	d'_2	d_2	e_1	e_2	e_3	e_4	f_1	f_2
G														
F														
E	159,9	159,1	81,5	82	7,71	7,68	7,79	7,65	5,10	5,55	38,6	38,8		
D	159,9	159,2	81,7	82	7,74	7,68	7,85	7,65	5,11	5,52	39	38,5	-1,34	-1,55
C	160	159	81,0	82,1	7,78	7,71	7,56	7,70	5,17	5,54	39,1	38,7	-2,70	-2,31
B	160	159,1	81,3	82,2	7,75	7,88	7,87	7,65	5,18	5,50	39,1	38,9	-2,02	-1,16
A	159,6	159,2	81,3	82,8	7,77	7,70	7,88	7,78	5,13	5,46	39	38,9	-0,61	-0,41

2° Aire de la section (déterminée par pesée) : 2.010 mm²

3° Caractéristiques mécaniques du matériau : Acier doux

Compression centrée	Limite élastique kg/mm²	32,4			
Traction	Section intéressée	2	3	1	4
	Limite élastique kg/mm²	34	33	27,5	27,1
	Charge de rupture kg/mm²	44,0	45,3	33,2	37,0
	Allongement rupture	28	28,4	31,9	26,3



4 Essai de flambement

charge d'affaissement : 15.300 kg

5 Observations Deuxième série d'essais.
France

Fig. 25

Fig. 25.- Reproducción de la ficha establecida para cada ensayo de pandeo.

Hasta 1969, la cantidad de ensayos realizados fué de 1067, y se efectuaron en los siguientes laboratorios:

Les essais de flambement ont été effectués dans les laboratoires suivants :

Pays	Laboratoire	Nombre d'essais de flambement
Allemagne	Bundesanstalt für Materialprüfung (B.A.M.) Berlin.	57
Belgique	Laboratoire d'essais de l'Institut du Génie Civil de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège.	111
France..............	Centre Expérimental de Recherches et d'Etudes du Bâtiment et des Travaux Publics (C.E.B.T.P.) Paris.	414
Grande-Bretagne	Harry Stranger's Testing Laboratories, Summerfield House.	46
Italie	Laboratorio Prove Materiali, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Milano.	29
Pays-Bas	Stevin Laboratorium Technische Hogeschool, Delft.	41
Yougoslavie	Institut za Ispitivanja Matérijala, Faculté du Génie Civil de l'Université de Béograd.	369

CAPITULO 3: LAS CURVAS EUROPEAS DE PANDEO Y SUS LIMITES:

3.1.- Origen de las Curvas:

En una primera etapa, la Comisión Número 8 de la CECM consideró en 1970, que no se podía adoptar una sola curva de pandeo, pero tampoco una curva para cada tipo o gama de perfil, pues en este caso se debían publicar verdaderas enciclopedias de tablas y cifras. Se debia entonces definir un número finito de curvas y relacionar a ellas los distintos grupos de perfiles estudiados, pensando originariamente en cuatro y finalmente se adoptaron tres curvas de pandeo de tal forma de no perjudicar a ciertos perfiles utilizados corrientemente, denominándolas curvas "a", "b", y "c", relacionando con ellas los principales perfiles utilizados en la realidad, como puede verse en la Figura 26, permitiendo un escalonamiento racional de los perfiles, basado en los resultados de laboratorio y de los modelos matemáticos.-

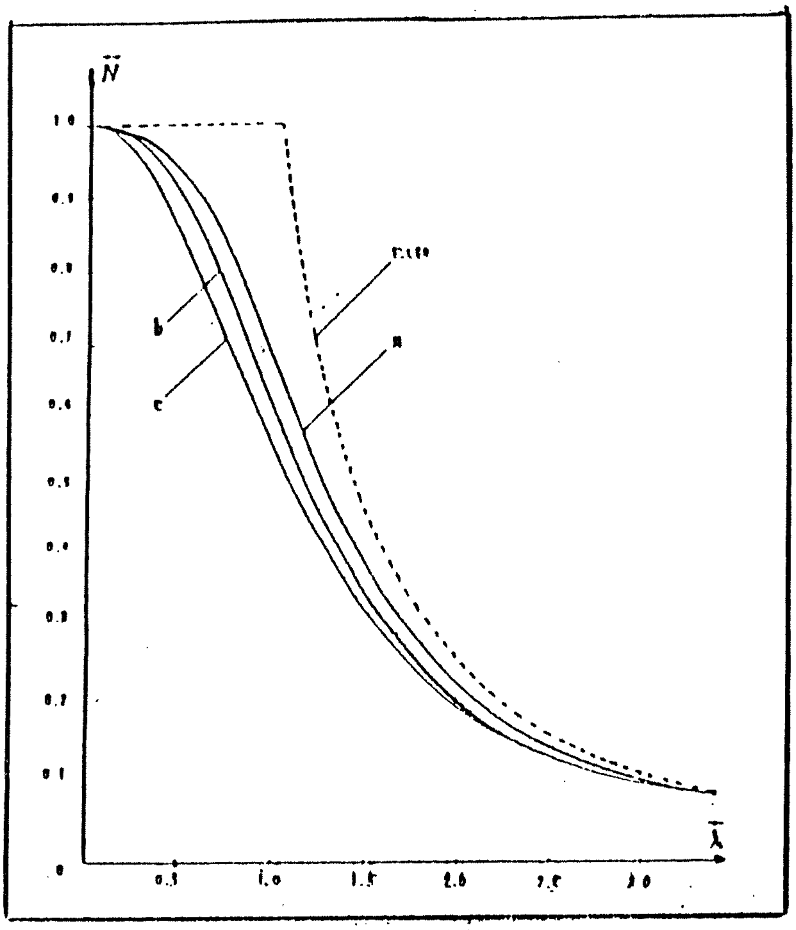


Fig. 26

Estas curvas están dadas en forma adimensional, pues se comprobó que variaciones moderadas del limita de fluencia no modifican su comportamiento en una forma sensible. En el eje de las abcisas figuran los valores de $\bar{\lambda}$ y en el de las ordenadas $\bar{N}$, siendo ámbos adimensionales; pues $\bar{N}$ es la relación entre la tensión critica de pandeo y la tensión de fluencia del material, siendo además estas curvas tangentes a la horizontal que pasa por el valor $\bar{N}=1$ en el eje de las ordenadas. En la figura se observa, además de las tres curvas la ideal de Euler, que responde a la ecuación $\bar{N} = 1/\bar{\lambda}^2$.-

La tensión límite de fluencia del acero, depende del espesor de la chapa, y el espesor a tener en cuenta en el perfil es el de la pared que juege un papel preponderante, por ejemplo en un perfil I serán las alas. Puede verse en la Tabla N°V, la tensión de fluencia para tres calidades de acero distintas.-

En la Tabla VI, puede observarse la clasificación de secciones y las curvas que a cada una de ellas corresponde, como asimismo en la última columna, las tensiones de fluencia en función de los espesores de las chapas que intervienen en la

Tabla V.

Acero		σ_F Kg/cm^2	λ_F
S T 37	1	2.550	90,155
	2	2.400	92,929
	3	2.250	95,977
	4	2.100	99,346
S T 44	1	2.800	86,036
	2	2.650	88,437
	3	2.500	91,052
	4	2.350	93,913
S T 52	1	3.800	73,853
	2	3.600	75,877
	3	3.400	78,077
	4	3.200	80,479

sección, cuyo número deberá confrontarse con el de la Tabla V, para determinar el valor de la misma, y con ello calcular la carga crítica característica o tensión característica de pandeo.-

Esta propuesta o proyecto de adoptar tres curvas de pandeo, presentado por la Comisión N°8 tuvo principalmente dos grandes críticas, que prácticamente obligaron a reveer algunos puntos y son:

Tabla VI

C.E.C.M. CLASIFICACION DE SECCIONES			Curva	$t \leq 20$ mm	$20 < t \leq 30$	$30 < t \leq 40$
Tubos laminados terminados en caliente			a	1	2	3
Tubos soldados terminados en caliente			a	2	3	4
Sección cajón soldada			b	2	3	4
Perfiles I o H laminados	Pandeo segun eje y-y	$h/b > 1.2$	b	1	2	3
		$h/b < 1.2$	c	1	2	3
	Pandeo segun eje x-x	$h/b > 1.2$	a	1	2	3
		$h/b < 1.2$	b	1	2	3
Perfiles I o H soldados	Pandeo segun eje y-y	alas oxicortadas	b	2	3	4
		alas de chapas laminadas	c	2	3	4
	Pandeo segun eje x-x	alas oxicortadas	b	2	3	4
		alas de chapas laminadas	b	2	3	4
Perfiles I o H laminados con platabandas adicionales soldadas	Pandeo segun eje y-y		a	2	3	4
	Pandeo segun eje x-x		b	2	3	4
Viga de sección cajón recocida			a	1	2	3
Perfiles I o H recocidos	Pandeo segun eje y-y		b	1	2	3
	Pandeo segun eje x-x		a	1	2	3
Perfiles T, U, L			c	1	2	3

1°) En el campo de las pequeñas esbelteces, habia una pérdida de la capacidad portante, con relación a la carga de deformación plástica $\bar{N}=1$, mientras que los ensayos realizados sobres barras cortas demostraban que era palpablemente posible sobrepasar el mencionado valor. Existe en consecuencia un campo de esbelteces en el cual prevalece la tensión de fluencia sobre cualquier forma de inestabilidad del perfil. La comisión N°8 de la CECM, concilió estos puntos de vista, modificando las curvas "a", "b" y "c" de 1970, que se unian en forma tangencial en $\bar{N}=1$ para $\bar{\lambda}=0$, introduciendo en 1976 en los diagramas de de $(\bar{N},\bar{\lambda})$, una parte horizontal de $\bar{N}=1$ hasta $\bar{\lambda}=0{,}2$ es decir, que en estas pequeñas esbelteces es posible desarrollar la carga de aplastamiento plástico, quedan entonces modificadas las curvas en el campo de las pequeñas esbelteces (Figura 27).-

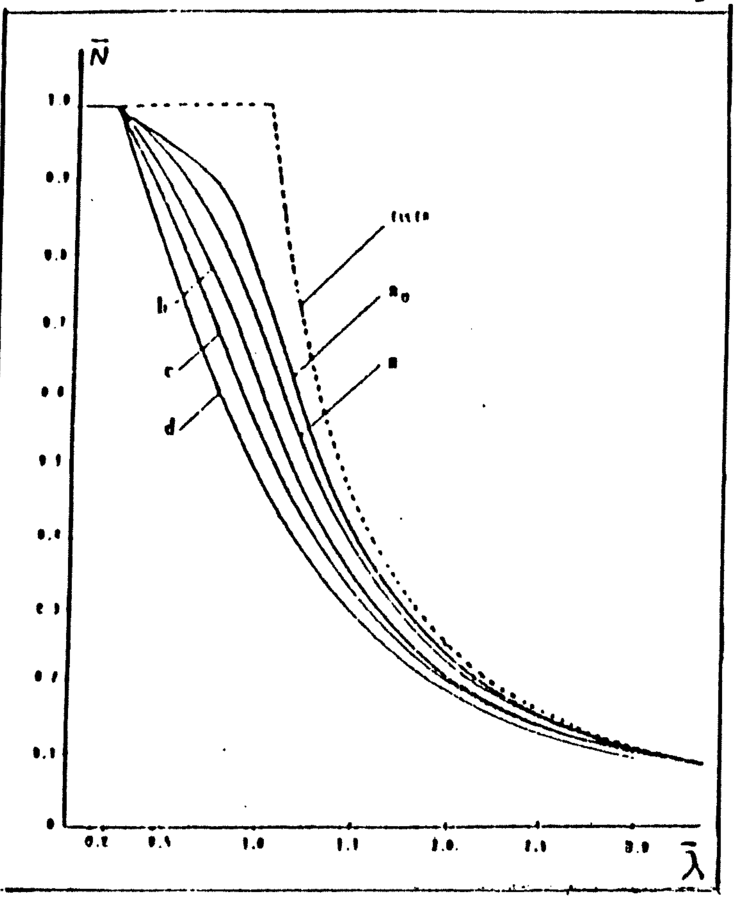


Fig. 27

2°) La segunda critica fue con respecto a que las curvas "a", "b" y "c" fueron establecidas para aceros cuyo limite de fluencia está muy cerca de las calidades más utilizadas St37 y St52 y para perfiles corrientes cuyos espesores de sus componentes no superan los 40mm. Actualmente, se utilizan aceros de alta calidad y perfiles, cuyos espesores de alas son superiores a los 40mmy una concepción moderna del fenómeno del pandeo debia atender estos factores.-

La CECM concilió también estos puntos de vista y establece que, cuando más elevado es el limite de fluencia de un perfil determinado, menos nefasto será el efecto de las tensiones residuales, con respecto al valor de la tensión critica. Las curvas "a", "b" y "c" se usarán para aceros cuyo limite de fluencia es inferior a 4300 kg/cm² y cuando los aceros posean un tensión de fluencia ≥ 4300 kg/cm² se deben sustituir las tres curvas anteriores por una nueva "a₀", "a" y "b". (Figura 27).-

Con respecto a los perfiles en los que sus componentes tienen espesores superiores a los 40mm, se establece que las tensiones residuales son más perjudiciales que las que sirvieron de base para establecer las curvas "a", "b" y "c" razón por la cual aparece una curva suplementaria "d" situada por debajo de la "c" y a esta curva se deben referir los perfiles laminados I o H, cualquiera sea el plano de pandeo, y para los perfiles I o H soldados si pandean con respecto al eje y-y, pero si éstos pandean con respecto al eje x- x se debe utilizar la curva "c". En la Figura 27 puede verse las tres curvas anteriores "a", "b" y "c" modificadas y las dos definidas recientemente "a_0" y "d".-

También se confecciona una tabla con el valor de las tensiones de fluencia, en función de los espesores de las chapas, y ahora si aparecen espesores mayores de 40 mm.-

Tabla VII:

Acero	espesor mm	σ_F Kg/cm^2	λ_F
S T 37	$e \leq 20$	2.550	90,155
	$20 < e \leq 30$	2.400	92,929
	$30 < e \leq 40$	2.250	95,977
	$40 < e$	2.100	99,346
S T 44	$e \leq 20$	2.800	86,036
	$20 < e \leq 30$	2.650	88,437
	$30 < e \leq 40$	2.500	91,052
	$40 < e$	2.350	93,913
S T 52	$e \leq 20$	3.800	73,853
	$20 < e \leq 30$	3.600	75,877
	$30 < e \leq 40$	3.400	78,077
	$40 < e$	3.200	80,479

Es mucho más fácil trabajar con tablas, por eso se han confeccionado tabulaciones de las curvas que a continuación se transcribe.-

Tabla VIII:

Valores de $\overline{N}$ para la curva "a" del C.E.C.M.

λ/λ_r	0.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.2	1.0000	0.9981	0.9962	0.9942	0.9922	0.9900	0.9877	0.9854	0.9829	0.9805
.3	0.9780	0.9756	0.9731	0.9706	0.9682	0.9657	0.9632	0.9607	0.9582	0.9556
.4	0.9530	0.9504	0.9477	0.9449	0.9421	0.9392	0.9362	0.9330	0.9298	0.9265
.5	0.9230	0.9193	0.9156	0.9117	0.9078	0.9039	0.9000	0.8961	0.8923	0.8885
.6	0.8848	0.8810	0.8772	0.8733	0.8693	0.8652	0.8611	0.8570	0.8530	0.8489
.7	0.8447	0.8404	0.8359	0.8312	0.8264	0.8214	0.8164	0.8115	0.8055	0.8015
.8	0.7965	0.7914	0.7860	0.7806	0.7749	0.7692	0.7634	0.7575	0.7515	0.7455
.9	0.7394	0.7333	0.7270	0.7207	0.7143	0.7078	0.7013	0.6947	0.6880	0.6813
1.0	0.6746	0.6678	0.6610	0.6541	0.6473	0.6404	0.6336	0.6267	0.6198	0.6130
1.1	0.6061	0.5993	0.5925	0.5858	0.5791	0.5725	0.5660	0.5595	0.5530	0.5466
1.2	0.5403	0.5339	0.5276	0.5213	0.5151	0.5090	0.5029	0.4970	0.4911	0.4854
1.3	0.4798	0.4742	0.4687	0.4633	0.4580	0.4527	0.4475	0.4423	0.4372	0.4321
1.4	0.4271	0.4221	0.4172	0.4124	0.4077	0.4030	0.3984	0.3939	0.3894	0.3850
1.5	0.3807	0.3764	0.3722	0.3681	0.3640	0.3600	0.3560	0.3521	0.3482	0.3444
1.6	0.3406	0.3369	0.3333	0.3297	0.3262	0.3227	0.3193	0.3159	0.3126	0.3094
1.7	0.3062	0.3031	0.3000	0.2970	0.2940	0.2910	0.2881	0.2852	0.2824	0.2796
1.8	0.2768	0.2741	0.2714	0.2687	0.2661	0.2635	0.2609	0.2583	0.2557	0.2532
1.9	0.2507	0.2482	0.2458	0.2434	0.2410	0.2387	0.2364	0.2342	0.2320	0.2298
2.0	0.2277	0.2256	0.2235	0.2215	0.2194	0.2174	0.2153	0.2133	0.2113	0.2094
2.1	0.2076	0.2056	0.2041	0.2024	0.2007	0.1990	0.1973	0.1956	0.1939	0.1923
2.2	0.1906	0.1890	0.1873	0.1857	0.1842	0.1826	0.1811	0.1795	0.1780	0.1766
2.3	0.1751	0.1737	0.1723	0.1709	0.1696	0.1682	0.1668	0.1655	0.1642	0.1628
2.4	0.1615	0.1602	0.1589	0.1576	0.1563	0.1551	0.1539	0.1527	0.1515	0.1503
2.5	0.1492	0.1482	0.1471	0.1461	0.1449	0.1437	0.1425	0.1414	0.1404	0.1394
2.6	0.1384	0.1373	0.1362	0.1351	0.1341	0.1332	0.1323	0.1313	0.1303	0.1294
2.7	0.1285	0.1275	0.1266	0.1256	0.1247	0.1238	0.1229	0.1220	0.1212	0.1203
2.8	0.1195	0.1187	0.1179	0.1171	0.1163	0.1155	0.1147	0.1140	0.1132	0.1124
2.9	0.1117	0.1110	0.1103	0.1096	0.1089	0.1082	0.1075	0.1068	0.1061	0.1055
3.0	0.1048	0.1041	0.1035	0.1028	0.1022	0.1015	0.1008	0.1002	0.0995	0.0988
3.1	0.0982	0.0976	0.0970	0.0964	0.0958	0.0952	0.0945	0.0940	0.0935	0.0929
3.2	0.0923	0.0917	0.0912	0.0906	0.0901	0.0895	0.0889	0.0884	0.0878	0.0873
3.3	0.0868	0.0863	0.0858	0.0854	0.0849	0.0844	0.0839	0.0834	0.0829	0.0824
3.4	0.0819	0.0814	0.0810	0.0806	0.0801	0.0797	0.0793	0.0788	0.0784	0.0779
3.5	0.0775	0.0771	0.0766	0.0762	0.0758	0.0754	0.0750	0.0746	0.0742	0.0738
3.6	0.0734									

Tabla IX:

Valores de $\overline{N}$ para la curva "b" del C.E.C.M.

λ/λ_r	0.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.2	1.0000	0.9967	0.9933	0.9899	0.9865	0.9830	0.9795	0.9760	0.9724	0.9687
.3	0.9650	0.9612	0.9573	0.9533	0.9493	0.9453	0.9412	0.9372	0.9331	0.9291
.4	0.9250	0.9211	0.9171	0.9132	0.9093	0.9054	0.9014	0.8974	0.8933	0.8892
.5	0.8850	0.8807	0.8762	0.8717	0.8671	0.8624	0.8577	0.8529	0.8480	0.8430
.6	0.8380	0.8329	0.8278	0.8227	0.8174	0.8122	0.8068	0.8015	0.7960	0.7905
.7	0.7850	0.7794	0.7738	0.7681	0.7624	0.7566	0.7508	0.7449	0.7390	0.7330
.8	0.7270	0.7210	0.7148	0.7087	0.7024	0.6961	0.6897	0.6832	0.6766	0.6700
.9	0.6633	0.6566	0.6500	0.6434	0.6369	0.6305	0.6241	0.6177	0.6114	0.6051
1.0	0.5987	0.5924	0.5861	0.5799	0.5737	0.5676	0.5615	0.5554	0.5495	0.5435
1.1	0.5376	0.5318	0.5260	0.5202	0.5145	0.5088	0.5031	0.4975	0.4919	0.4864
1.2	0.4809	0.4754	0.4700	0.4647	0.4593	0.4541	0.4489	0.4438	0.4387	0.4337
1.3	0.4288	0.4240	0.4192	0.4145	0.4098	0.4052	0.4007	0.3962	0.3918	0.3874
1.4	0.3831	0.3788	0.3746	0.3704	0.3663	0.3622	0.3582	0.3542	0.3503	0.3464
1.5	0.3426	0.3389	0.3352	0.3317	0.3281	0.3246	0.3212	0.3178	0.3144	0.3111
1.6	0.3078	0.3046	0.3014	0.2982	0.2950	0.2919	0.2888	0.2857	0.2826	0.2796
1.7	0.2766	0.2737	0.2709	0.2681	0.2654	0.2617	0.2601	0.2576	0.2551	0.2526
1.8	0.2503	0.2478	0.2455	0.2431	0.2408	0.2385	0.2362	0.2340	0.2317	0.2295
1.9	0.2273	0.2251	0.2230	0.2208	0.2188	0.2167	0.2147	0.2127	0.2108	0.2089
2.0	0.2070	0.2052	0.2034	0.2016	0.1999	0.1982	0.1965	0.1948	0.1931	0.1914
2.1	0.1897	0.1880	0.1864	0.1848	0.1833	0.1818	0.1804	0.1790	0.1776	0.1761
2.2	0.1746	0.1730	0.1715	0.1701	0.1688	0.1675	0.1662	0.1648	0.1635	0.1621
2.3	0.1607	0.1594	0.1580	0.1567	0.1555	0.1542	0.1530	0.1518	0.1506	0.1494
2.4	0.1483	0.1471	0.1460	0.1449	0.1438	0.1427	0.1417	0.1407	0.1397	0.1387
2.5	0.1377	0.1366	0.1356	0.1346	0.1336	0.1327	0.1319	0.1311	0.1303	0.1293
2.6	0.1283	0.1273	0.1263	0.1253	0.1244	0.1237	0.1230	0.1222	0.1214	0.1206
2.7	0.1198	0.1190	0.1182	0.1174	0.1166	0.1158	0.1150	0.1142	0.1134	0.1127
2.8	0.1119	0.1111	0.1104	0.1096	0.1088	0.1081	0.1074	0.1066	0.1059	0.1052
2.9	0.1045	0.1038	0.1031	0.1024	0.1017	0.1010	0.1003	0.0997	0.0990	0.0983
3.0	0.0977	0.0971	0.0964	0.0958	0.0951	0.0945	0.0939	0.0932	0.0926	0.0920
3.1	0.0914	0.0908	0.0902	0.0896	0.0891	0.0885	0.0879	0.0874	0.0868	0.0863
3.2	0.0857	0.0852	0.0846	0.0841	0.0835	0.0830	0.0825	0.0819	0.0814	0.0809
3.3	0.0804	0.0799	0.0794	0.0789	0.0784	0.0779	0.0774	0.0769	0.0764	0.0760
3.4	0.0755	0.0750	0.0746	0.0742	0.0737	0.0733	0.0729	0.0724	0.0720	0.0716
3.5	0.0712	0.0708	0.0704	0.0700	0.0697	0.0693	0.0689	0.0686	0.0682	0.0679
3.6	0.0675									

Tabla X:

Valores de $\overline{N}$ para la curva "c" del C.E.C.M.

λ/λ_r	0.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.2	1.0000	0.9949	0.9899	0.9849	0.9799	0.9750	0.9702	0.9654	0.9606	0.9558
.3	0.9510	0.9461	0.9412	0.9362	0.9312	0.9261	0.9210	0.9158	0.9106	0.9053
.4	0.9000	0.8947	0.8893	0.8838	0.8783	0.8727	0.8671	0.8613	0.8555	0.8495
.5	0.8436	0.8376	0.8316	0.8256	0.8196	0.8136	0.8076	0.8015	0.7954	0.7892
.6	0.7829	0.7766	0.7701	0.7636	0.7571	0.7506	0.7441	0.7377	0.7314	0.7250
.7	0.7187	0.7124	0.7060	0.6997	0.6933	0.6869	0.6804	0.6738	0.6673	0.6608
.8	0.6543	0.6478	0.6416	0.6353	0.6292	0.6232	0.6171	0.6111	0.6051	0.5991
.9	0.5931	0.5871	0.5812	0.5754	0.5696	0.5640	0.5584	0.5529	0.5474	0.5421
1.0	0.5368	0.5315	0.5263	0.5211	0.5159	0.5108	0.5057	0.5006	0.4956	0.4906
1.1	0.4856	0.4807	0.4758	0.4710	0.4662	0.4614	0.4567	0.4521	0.4474	0.4428
1.2	0.4383	0.4338	0.4293	0.4249	0.4205	0.4162	0.4119	0.4076	0.4034	0.3993
1.3	0.3952	0.3911	0.3871	0.3832	0.3792	0.3754	0.3715	0.3678	0.3640	0.3604
1.4	0.3567	0.3532	0.3496	0.3462	0.3427	0.3393	0.3360	0.3328	0.3295	0.3263
1.5	0.3232	0.3211	0.3170	0.3139	0.3109	0.3078	0.3048	0.3018	0.2989	0.2959
1.6	0.2930	0.2900	0.2871	0.2842	0.2813	0.2785	0.2758	0.2731	0.2704	0.2678
1.7	0.2652	0.2626	0.2600	0.2575	0.2550	0.2525	0.2501	0.2478	0.2455	0.2432
1.8	0.2410	0.2388	0.2366	0.2345	0.2324	0.2303	0.2282	0.2262	0.2242	0.2222
1.9	0.2203	0.2184	0.2165	0.2146	0.2128	0.2110	0.2092	0.2075	0.2058	0.2041
2.0	0.2024	0.2007	0.1991	0.1974	0.1958	0.1942	0.1926	0.1910	0.1895	0.1879
2.1	0.1864	0.1850	0.1837	0.1823	0.1807	0.1790	0.1774	0.1759	0.1745	0.1731
2.2	0.1718	0.1703	0.1688	0.1674	0.1662	0.1650	0.1637	0.1624	0.1011	0.1598
2.3	0.1585	0.1572	0.1560	0.1548	0.1536	0.1524	0.1512	0.1501	0.1489	0.1478
2.4	0.1467	0.1456	0.1445	0.1435	0.1424	0.1414	0.1404	0.1394	0.1385	0.1375
2.5	0.1366	0.1357	0.1347	0.1337	0.1328	0.1318	0.1308	0.1300	0.1292	0.1283
2.6	0.1273	0.1261	0.1250	0.1244	0.1237	0.1230	0.1222	0.1214	0.1205	0.1196
2.7	0.1188	0.1181	0.1173	0.1165	0.1158	0.1150	0.1142	0.1135	0.1128	0.1120
2.8	0.1113	0.1106	0.1098	0.1091	0.1084	0.1077	0.1070	0.1063	0.1056	0.1050
2.9	0.1043	0.1036	0.1030	0.1023	0.1017	0.1010	0.1003	0.0997	0.0990	0.0984
3.0	0.0977	0.0971	0.0964	0.0958	0.0951	0.0945	0.0939	0.0932	0.0926	0.0920
3.1	0.0914	0.0908	0.0902	0.0896	0.0891	0.0885	0.0879	0.0874	0.0868	0.0863
3.2	0.0857	0.0852	0.0846	0.0841	0.0835	0.0830	0.0825	0.0819	0.0814	0.0809
3.3	0.0804	0.0799	0.0794	0.0789	0.0784	0.0779	0.0774	0.0769	0.0764	0.0760
3.4	0.0755	0.0750	0.0746	0.0742	0.0737	0.0733	0.0729	0.0724	0.0720	0.0716
3.5	0.0712	0.0708	0.0704	0.0700	0.0697	0.0693	0.0689	0.0686	0.0682	0.0679
3.6	0.0675									

Llevando los valores de las tablas VIII, IX, X y XI a un sistema de ejes coordenados ($\overline{N}$, $\overline{\lambda}$), se obtienen las curvas a, b, c y d (Figura 28).-

Tabla XI: Valores de $\bar{N}$ para la curva "d" del C.E.C.M.

λ/λ_r	0.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.2	1.0000	0.9916	0.9829	0.9742	0.9656	0.9570	0.9487	0.9405	0.9325	0.9247
.3	0.9170	0.9093	0.9017	0.8941	0.8866	0.8790	0.8713	0.8637	0.8560	0.8483
.4	0.8407	0.8332	0.8259	0.8187	0.8115	0.8044	0.7974	0.7903	0.7833	0.7762
.5	0.7691	0.7620	0.7549	0.7478	0.7407	0.7336	0.7266	0.7196	0.7126	0.7057
.6	0.6989	0.6921	0.6853	0.6786	0.6719	0.6653	0.6587	0.6522	0.6457	0.6393
.7	0.6329	0.6265	0.6202	0.6140	0.6078	0.6017	0.5957	0.5897	0.5837	0.5776
.8	0.5720	0.5662	0.5605	0.5549	0.5493	0.5438	0.5383	0.5329	0.5276	0.5223
.9	0.5171	0.5119	0.5067	0.5018	0.4988	0.4916	0.4870	0.4821	0.4774	0.4727
1.0	0.4681	0.4635	0.4589	0.4544	0.4500	0.4456	0.4413	0.4370	0.4328	0.4286
1.1	0.4244	0.4204	0.4163	0.4123	0.4084	0.4045	0.4006	0.3968	0.3930	0.3892
1.2	0.3855	0.3819	0.3782	0.3746	0.3711	0.3676	0.3641	0.3606	0.3572	0.3538
1.3	0.3505	0.3472	0.3439	0.3407	0.3375	0.3343	0.3312	0.3281	0.3250	0.3219
1.4	0.3189	0.3159	0.3130	0.3101	0.3072	0.3043	0.3016	0.2987	0.2959	0.2932
1.5	0.2905	0.2878	0.2862	0.2826	0.2800	0.2774	0.2749	0.2724	0.2700	0.2675
1.6	0.2651	0.2627	0.2603	0.2580	0.2557	0.2534	0.2511	0.2489	0.2467	0.2445
1.7	0.2423	0.2402	0.2381	0.2360	0.2339	0.2319	0.2299	0.2279	0.2259	0.2239
1.8	0.2220	0.2201	0.2182	0.2163	0.2145	0.2126	0.2100	0.2090	0.2073	0.2055
1.9	0.2038	0.2021	0.2004	0.1988	0.1971	0.1955	0.1939	0.1923	0.1907	0.1891
2.0	0.1876	0.1861	0.1846	0.1831	0.1816	0.1802	0.1787	0.1773	0.1759	0.1745
2.1	0.1731	0.1717	0.1704	0.1691	0.1677	0.1664	0.1651	0.1639	0.1626	0.1614
2.2	0.1601	0.1589	0.1577	0.1565	0.1553	0.1543	0.1530	0.1519	0.1507	0.1496
2.3	0.1485	0.1474	0.1463	0.1452	0.1442	0.1431	0.1421	0.1410	0.1400	0.1390
2.4	0.1380	0.1370	0.1361	0.1351	0.1341	0.1332	0.1322	0.1313	0.1304	0.1295
2.5	0.1286	0.1277	0.1268	0.1259	0.1251	0.1242	0.1234	0.1225	0.1217	0.1209
2.6	0.1201	0.1193	0.1185	0.1177	0.1169	0.1161	0.1153	0.1146	0.1138	0.1131
2.7	0.1123	0.1116	0.1109	0.1101	0.1094	0.1087	0.1080	0.1073	0.1066	0.1059
2.8	0.1052	0.1045	0.1038	0.1031	0.1024	0.1018	0.1011	0.1004	0.0998	0.0991
2.9	0.0985	0.0978	0.0972	0.0965	0.0959	0.0952	0.0946	0.0940	0.0934	0.0927
3.0	0.0921									

3.2.- Mecanismo de verificación de secciones:

Estas curvas están relacionadas con las diferentes secciones de los perfiles, y el ordenamiento concreto descansa sobre consideraciones teóricas y resultados experimentales, como puede verse en la Tabla XV del CECM, en la que figura también la tensión límite de fluencia a utilizar, estando ésta en función de los espesores de chapa que lo componen.-

Con la ayuda de estas tablas, la verificación se realiza de la siguiente manera: en función de $\bar{\lambda}$ y con la curva correspondiente al caso que se está tratando, se extrae el valor $\bar{N}$, y con éste se calcula la carga critica o la tensión crítica caracteristica:

(58) $\bar{N}_K = \bar{N}\, A\, \sigma_F$

(59) $\sigma_K = \bar{N}\, \sigma_F$

Esta carga critica debe estar afectada por un coeficiente de seguridad, y que poseen los siguientes valores:

γ = 1,50 cuando la barra está solicitada por cargas principales (Estado H).-

γ = 1,33 cuando la barra está solicitada por cargas principales y adicionales (accidentales) (Estado HZ).-

Entonces en la verificación a realizar, se debe utilizar la carga de dimensionamiento, siendo esta la carga de servicio multiplicada por el coeficiente de seguridad γ , obteniéndose:

$$(60) \quad \gamma N \leqq \bar{N} A \sigma_F = N_K$$

y con esta comprobación, se puede asegurar que el coeficiente de seguridad dela barra, es igual o mayor que el requerido.-

También en este caso se puede obtener el método ω, pero en este caso tiene otro concepto (Tablas XII, XIII y XIV).-

$$(61) \quad \frac{\gamma N}{A \bar{N}} \leqslant \sigma_F$$

$$(62) \quad \frac{\gamma N}{A} \omega \leqslant \sigma_F$$

$$(63) \quad \omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_K} = \frac{1}{\bar{N}}$$

CONVENCION EUROPEA DE LA CONSTRUCCION METALICA / DIN 18800

Figura 28 : Curvas de Tensión Pandeo;

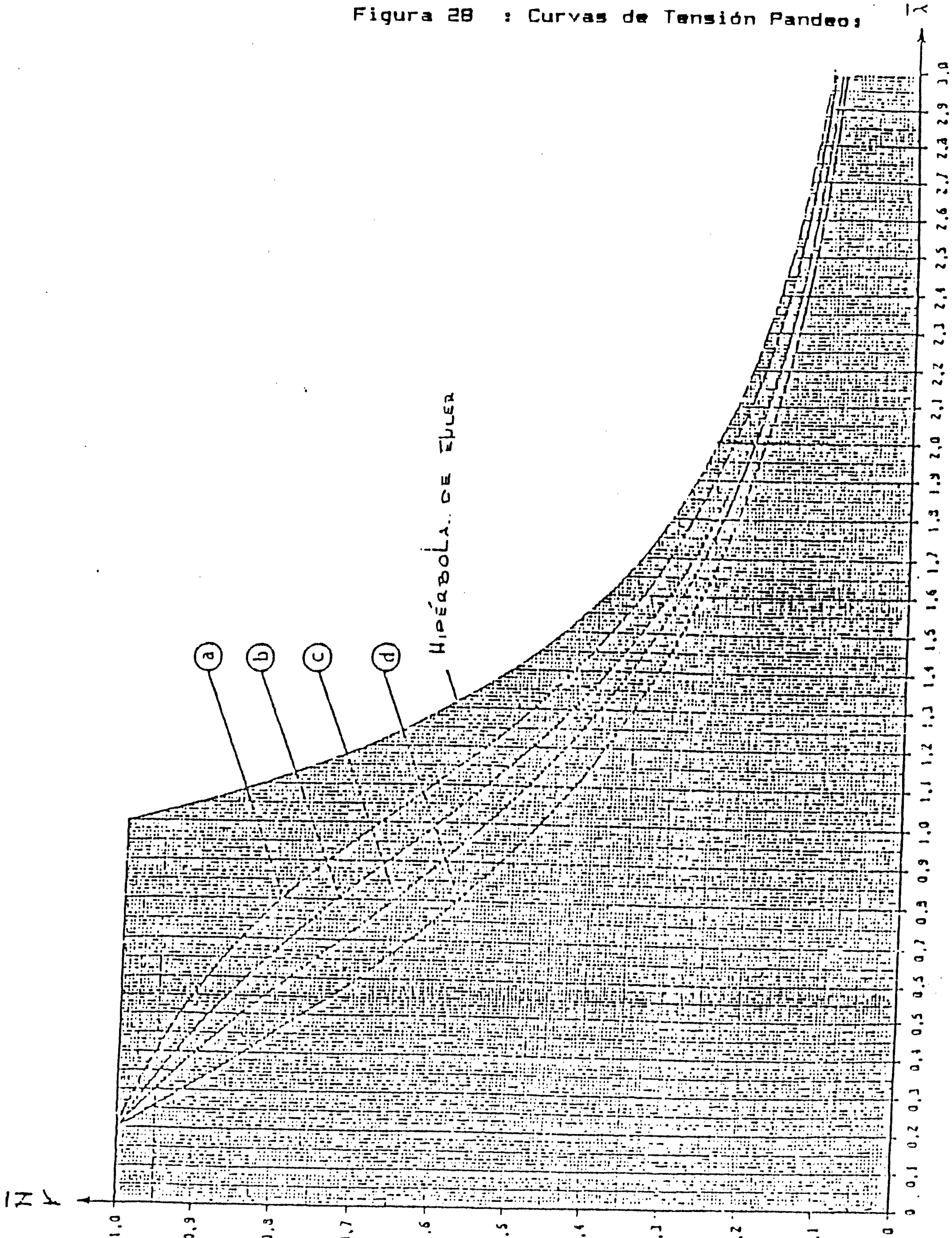


Tabla XII:

COEFICIENTES DE PANDEO ω PARA CURVA "a"

$\bar{\lambda}$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,000	1,002	1,004	1,006	1,008	1,010	1,012	1,015	1,017	1,020
0,3	1,022	1,025	1,028	1,030	1,033	1,036	1,038	1,041	1,044	1,046
0,4	1,049	1,052	1,055	1,058	1,061	1,065	1,068	1,072	1,076	1,079
0,5	1,083	1,088	1,092	1,097	1,102	1,106	1,111	1,116	1,121	1,125
0,6	1,130	1,135	1,140	1,145	1,150	1,156	1,161	1,167	1,172	1,178
0,7	1,184	1,190	1,196	1,203	1,210	1,217	1,226	1,232	1,241	1,248
0,8	1,255	1,264	1,272	1,281	1,290	1,300	1,310	1,320	1,331	1,341
0,9	1,352	1,364	1,376	1,388	1,400	1,413	1,426	1,439	1,453	1,468
1,0	1,482	1,497	1,513	1,529	1,545	1,562	1,578	1,596	1,613	1,631
1,1	1,650	1,669	1,688	1,707	1,727	1,747	1,767	1,787	1,808	1,829
1,2	1,851	1,873	1,895	1,918	1,941	1,965	1,988	2,012	2,036	2,060
1,3	2,084	2,109	2,134	2,158	2,183	2,209	2,235	2,261	2,287	2,314
1,4	2,341	2,369	2,400	2,425	2,453	2,481	2,510	2,539	2,568	2,597
1,5	2,627	2,657	2,687	2,717	2,747	2,778	2,809	2,840	2,872	2,904
1,6	2,936	2,968	3,000	3,033	3,066	3,099	3,132	3,166	3,199	3,232
1,7	3,266	3,299	3,333	3,367	3,401	3,436	3,471	3,506	3,541	3,577
1,8	3,613	3,648	3,685	3,722	3,758	3,795	3,833	3,871	3,911	3,949
1,9	3,989	4,029	4,068	4,108	4,149	4,189	4,230	4,270	4,310	4,352
2,0	4,392	4,433	4,474	4,515	4,558	4,600	4,645	4,688	4,733	4,776
2,1	4,817	4,864	4,900	4,941	4,983	5,025	5,068	5,112	5,157	5,200
2,2	5,247	5,291	5,339	5,385	5,429	5,476	5,522	5,571	5,618	5,663
2,3	5,713	5,757	5,804	5,851	5,896	5,945	5,995	6,042	6,090	6,143
2,4	6,192	6,242	6,293	6,345	6,398	6,447	6,498	6,549	6,600	6,653
2,5	6,702	6,748	6,798	6,845	6,901	6,959	7,012	7,072	7,123	7,174
2,6	7,225	7,283	7,342	7,402	7,457	7,508	7,559	7,616	7,675	7,728
2,7	7,782	7,843	7,899	7,962	8,019	8,078	8,137	8,197	8,251	8,313
2,8	8,368	8,425	8,482	8,540	8,598	8,658	8,718	8,772	8,834	8,897
2,9	8,953	9,009	9,066	9,124	9,183	9,242	9,302	9,362	9,425	9,479
3,0	9,542	9,606	9,662	9,728	9,785	9,852	9,921	9,980	10,050	10,121
3,1	10,183	10,246	10,309	10,373	10,438	10,504	10,582	10,638	10,695	10,764
3,2	10,834	10,905	10,965	11,038	11,099	11,173	11,249	11,312	11,390	11,455
3,3	11,521	11,588	11,655	11,710	11,779	11,848	11,919	11,990	12,063	12,136
3,4	12,210	12,285	12,346	12,407	12,484	12,547	12,610	12,690	12,755	12,837
3,5	12,903	12,970	13,055	13,123	13,193	13,263	13,333	13,405	13,477	13,550
3,6	13,624									

CONVENCION EUROPEA DE LA CONSTRUCCION METALICA / DIN 18800

Tabla XIII:

COEFICIENTES DE PANDEO ω PARA CURVA "b"

$\bar{\lambda}$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,000	1,003	1,007	1,010	1,014	1,017	1,021	1,025	1,028	1,032
0,3	1,036	1,040	1,045	1,049	1,053	1,058	1,062	1,067	1,072	1,076
0,4	1,081	1,086	1,090	1,095	1,100	1,104	1,109	1,114	1,119	1,125
0,5	1,130	1,135	1,141	1,147	1,153	1,160	1,166	1,172	1,179	1,186
0,6	1,193	1,201	1,208	1,216	1,223	1,231	1,239	1,248	1,256	1,265
0,7	1,274	1,283	1,292	1,302	1,312	1,322	1,332	1,342	1,353	1,364
0,8	1,376	1,387	1,399	1,411	1,424	1,437	1,450	1,464	1,478	1,493
0,9	1,508	1,523	1,538	1,554	1,570	1,586	1,602	1,619	1,636	1,653
1,0	1,670	1,688	1,706	1,724	1,743	1,762	1,781	1,801	1,820	1,840
1,1	1,860	1,880	1,901	1,922	1,944	1,965	1,988	2,010	2,033	2,056
1,2	2,079	2,103	2,128	2,152	2,177	2,202	2,228	2,253	2,279	2,306
1,3	2,332	2,358	2,385	2,413	2,440	2,468	2,496	2,524	2,552	2,581
1,4	2,610	2,640	2,670	2,700	2,730	2,761	2,792	2,823	2,855	2,887
1,5	2,919	2,951	2,983	3,015	3,048	3,081	3,113	3,147	3,181	3,214
1,6	3,249	3,283	3,318	3,353	3,390	3,426	3,463	3,500	3,539	3,577
1,7	3,615	3,654	3,691	3,730	3,768	3,821	3,844	3,882	3,920	3,959
1,8	3,997	4,036	4,073	4,114	4,153	4,193	4,234	4,274	4,316	4,357
1,9	4,399	4,442	4,484	4,529	4,570	4,615	4,658	4,701	4,744	4,787
2,0	4,831	4,873	4,916	4,960	5,003	5,045	5,089	5,133	5,179	5,225
2,1	5,271	5,319	5,365	5,411	5,456	5,501	5,543	5,587	5,631	5,679
2,2	5,727	5,780	5,831	5,879	5,924	5,970	6,017	6,068	6,116	6,169
2,3	6,223	6,274	6,329	6,382	6,431	6,485	6,536	6,588	6,640	6,693
2,4	6,743	6,798	6,849	6,901	6,954	7,008	7,057	7,107	7,158	7,210
2,5	7,262	7,321	7,375	7,429	7,485	7,536	7,582	7,628	7,675	7,734
2,6	7,794	7,855	7,918	7,981	8,039	8,084	8,130	8,183	8,237	8,292
2,7	8,347	8,403	8,460	8,518	8,576	8,636	8,696	8,757	8,818	8,873
2,8	8,937	9,000	9,058	9,124	9,191	9,251	9,311	9,381	9,448	9,506
2,9	9,569	9,634	9,699	9,766	9,833	9,900	9,970	10,030	10,101	10,173
3,0	10,235	10,299	10,373	10,438	10,515	10,582	10,650	10,730	10,799	10,870
3,1	10,941	11,013	11,086	11,161	11,223	11,299	11,377	11,442	11,520	11,587
3,2	11,669	11,737	11,820	11,891	11,976	12,048	12,121	12,210	12,285	12,361
3,3	12,438	12,516	12,594	12,674	12,755	12,837	12,920	13,004	13,089	13,158
3,4	13,245	13,333	13,405	13,477	13,569	13,643	13,717	13,812	13,889	13,966
3,5	14,045	14,124	14,205	14,286	14,347	14,430	14,514	14,577	14,663	14,728
3,6	14,815									

Tabla XIV:

COEFICIENTES DE PANDEO ω PARA CURVA "c"

$\bar{\lambda}$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	1,000	1,005	1,010	1,015	1,021	1,026	1,031	1,036	1,041	1,046
0,3	1,051	1,057	1,062	1,068	1,074	1,080	1,086	1,092	1,098	1,105
0,4	1,111	1,118	1,124	1,132	1,139	1,146	1,153	1,161	1,169	1,177
095	1,185	1,194	1,203	1,211	1,220	1,229	1,238	1,248	1,257	1,267
0,6	1,277	1,287	1,299	1,310	1,321	1,332	1,344	1,356	1,367	1,379
0,7	1,391	1,404	1,416	1,429	1,442	1,456	1,470	1,484	1,499	1,513
0,8	1,528	1,544	1,559	1,574	1,589	1,605	1,620	1,636	1,653	1,669
0,9	1,686	1,703	1,721	1,738	1,756	1,773	1,791	1,809	1,827	1,845
1,0	1,863	1,881	1,900	1,919	1,938	1,958	1,977	1,998	2,018	2,038
1,1	2,068	2,080	2,102	2,123	2,145	2,167	2,190	2,212	2,235	2,258
1,2	2,282	2,305	2,329	2,353	2,378	2,403	2,428	2,453	2,479	2,504
1,3	2,530	2,557	2,583	2,610	2,637	2,664	2,692	2,719	2,747	2,775
1,4	2,803	2,831	2,860	2,889	2,918	2,947	2,976	3,005	3,035	3,065
1,5	3,094	3,114	3,155	3,186	3,216	3,249	3,281	3,313	3,346	3,380
1,6	3,413	3,448	3,483	3,519	3,555	3,591	3,626	3,662	3,698	3,734
1,7	3,771	3,808	3,846	3,883	3,992	3,960	3,998	4,036	4,073	4,112
1,8	4,149	4,188	4,227	4,264	4,303	4,342	4,382	4,421	4,460	4,500
1,9	4,539	4,579	4,619	4,662	4,699	4,739	4,780	4,819	4,859	4,900
2,0	4,941	4,983	5,023	5,066	5,107	5,149	5,192	5,236	5,277	5,322
2,1	5,365	5,405	5,445	5,485	5,534	5,587	5,637	5,685	5,731	5,777
2,2	5,821	5,872	5,924	5,974	6,017	6,061	6,109	6,158	6,207	6,258
2,3	6,309	6,361	6,410	6,460	6,510	6,562	6,614	6,662	6,716	6,775
2,4	6,817	6,868	6,920	6,969	7,022	7,072	7,123	7,174	7,220	7,233
2,5	7,321	7,369	7,424	7,479	7,530	7,587	7,645	7,692	7,740	7,794
2,6	7,855	7,930	7,000	8,039	8,084	8,130	8,183	8,237	8,299	8,361
2,7	8,418	8,467	8,525	8,584	8,636	8,696	8,757	8,811	8,865	8,929
2,8	8,985	9,042	9,107	9,166	9,225	9,285	9,346	9,407	9,470	9,524
2,9	9,588	9,653	9,709	9,775	9,833	9,900	9,970	10,030	10,101	10,163
3,0	10,235	10,299	10,373	10,493	10,515	10,582	10,650	10,730	10,799	10,870
3,1	10,941	11,013	11,086	11,161	11,223	11,299	11,377	11,442	11,521	11,587
3,2	11,669	11,737	11,820	11,891	11,976	12,048	12,121	12,210	12,285	12,361
3,3	12,438	12,516	12,594	12,674	12,755	12,837	12,920	13,004	13,089	13,158
3,4	13,245	13,333	13,405	13,477	13,569	13,643	13,717	13,812	13,889	13,966
3,5	14,045	14,124	14,205	14,286	14,347	13,430	14,514	14,577	14,663	14,728
3,6	14,815									

Indudablemente que estos resultados experimentales deben ajustarse al comportamiento de una estructura real: 1) Posibilidad de desviaciones aleatorias de las acciones y por lo tanto de sus valores representativos; 2) Inexactitud con respecto a la realidad física de los modelos usados para describir las acciones en los cálculos de diseño; 3) Inexactitud con respecto al modelo mecánico usado para la condición del estado límite; 4) Las aleatorias incertidumbres asociadas con la ecuación de estado límite (por ejemplo: Falta de consideración de la correlación entre variables básicas). Es por ello que la carga crítica o tensión crítica debe ser disminuida. A raíz de esto la reglamentación alemana toma un coeficiente $\gamma_M = 1{,}1$ que disminuye la tensión crítica quedando finalmente:

$$(58a)\quad N_K = \frac{N A \sigma_F}{\gamma_M}$$

$$(59a)\quad \sigma_K = \frac{N . \sigma_F}{\gamma_M}$$

y las restantes vendrán:

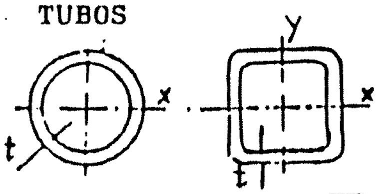
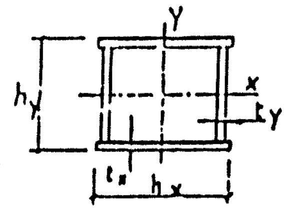
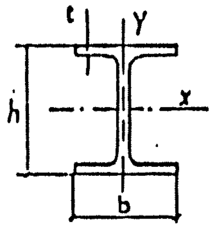
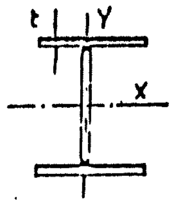
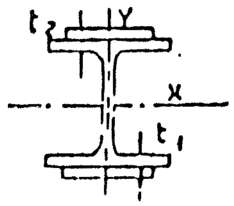
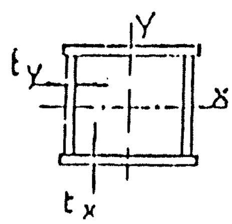
$$(60a)\quad \gamma N \leqslant \frac{\bar{N} A \sigma_F}{\gamma_M} = N_K$$

y en caso de seguir con el método ω :

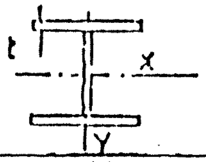
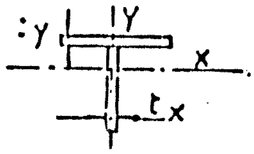
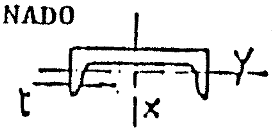
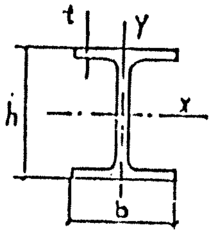
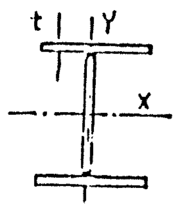
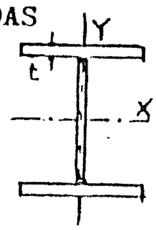
$$(61a)\quad \frac{\gamma . N \gamma_M}{A \bar{N}} \leqslant \sigma_F$$

$$(62a)\quad \frac{\gamma N \gamma_M}{A} \omega \leqslant \sigma_F$$

Tabla XV:

S e c c i ó n	P a n d e o	Curva	Tensión de fluencia
TUBOS 	segun eje x-x e y-y Tubos laminados	a	σ_F
	Tubos soldados (terminados en caliente)	a	$0,94\sigma_F$
CAJON SOLDADA 	segun eje: x-x : h_x, t_x y-y : h_y, t_y No válido para soldadura gruesa (penetración total) cuando $h/t < 30$	b	$0,94\sigma_F$
I y H LAMINADOS 	segun eje x-x $h/b > 1,2$	a	σ_F
	$h/b \leq 1,2$	b	σ_F
	segun eje y-y $h/b > 1,2$	b	σ_F
	$h/b \leq 1,2$	c	σ_F
I y H SOLDADOS 	segun eje x-x a) alas oxicortadas	b	$0,94\sigma_F$
	b) alas de chapa laminada	b	$0,94\sigma_F$
	segun eje y-y a) alas oxicortadas	b	$0,94\sigma_F$
	b) alas de chapa laminada	c	$0,94\sigma_F$
I y H CON SOLDADURA EN ANGULO DE ALAS Y PLACA 	segun eje y-y	a	$0,94\sigma_F$
	segun eje x-x $t = t_{i\ max}$	b	$0,94\sigma_F$
CAJON CON TRATAMIENTO TERMICO 	segun ejes x-x ; $t = t_x$ y-y ; $t = t_y$	a	σ_F

(continuación de Tabla XV)

Sección	Pandeo	Curva	Tensión de fluencia
I y H CON TRATAMIENTO TERMICO 	segun eje x-x segun eje y-y	a b	σ_F σ_F
T o MEDIO I 	segun ejes x-x ; $t = t_x$ y-y ; $t = t_y$	c	σ_F
U LAMINADO 	segun eje y-y segun eje x-x	c c	σ_F
I y H LAMINADOS 	segun eje x-x segun eje y-y $t > 40$mm	d d	σ_F σ_F
I y H CONSTRUIDOS CON CHAPAS LAMINADAS SOLDADAS 	segun eje x-x segun eje y-y $t > 40$mm	c d	σ_F σ_F
I y H CONSTRUIDOS CON CHAPAS OXICORTADAS Y SOLDADAS 	segun eje x-x segun eje y-y $t > 40$mm	c	σ_F

3.3.-Modificaciones recientes:

Actualmente la reglamentación europea, ha realizado algunos cambios con respecto a la de 1978, y es en lo concerniente a secciones laminadas I en los cuales el espesor de sus elementos componentes sobrepasan los 40mm. Los numerosos ensayos que continuaron realizándose desde 1976 a la fecha, demuestran que la carga crítica en este tipo de perfiles es mayor que la que se consigue con la curva "d" y por lo tanto deben tomarse otros escalones superiores, mientras no se sobrepasen los 80 mm quedando la curva "d" para espesores t> 80 mm, como se ve en la Figura 29.-

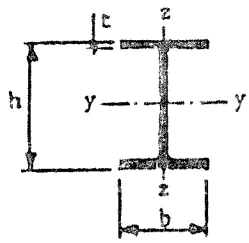
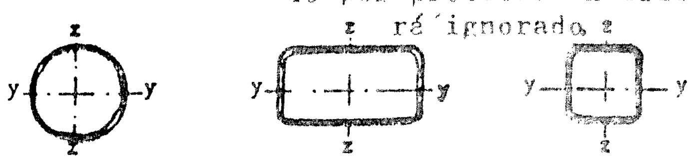
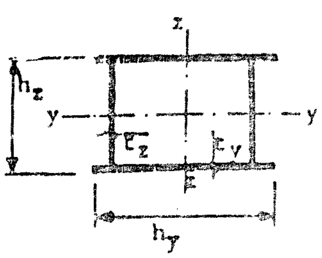
I y H laminados			
	$\frac{h}{b} > 1.2$; $t \le 40$mm	y - y z - z	a (a_0) b (a)
	$\frac{h}{b} > 1.2$; $40 < t \le 80$mm and $\frac{h}{b} \le 1.2$; $t \le 80$mm	y - y z - z	b (a) c (b)
	$t > 80$mm	y - y z - z	d d

Figura 29:Las letras con paréntesis corresponden a aceros con $\sigma_F \ge 4300$ kg/cm².-

Las secciones U, T, L y las que son sólidas pertenecen a la curva c, como puede verse en la Tabla XVI, según EUROCODE.-

Tabla XVI:Elección de las curvas de pandeo según las secciones:[EUROCODE 1984.-

Sección	Pandeo perpendicular al eje	Curva de Pandeo
Sección anular - Cualquier incremento de la tensión de fluencia, causado por procesos en frío, será ignorado. 	y - y z - z	a
Sección cajón soldada 	y - y z - z	b
Soldadura gruesa y $h_y/t_y < 30$, $h_z/t_z < 30$	y - y z - z	c