

**I
N
P
R
E
S**

PODER EJECUTIVO NACIONAL
MINISTERIO DE OBRAS Y SERVICIOS PUBLICOS
SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS

INSTITUTO NACIONAL DE PREVENCION SISMICA

Métodos para el Análisis de
Estructuras Sujetas a Fuerzas
Sísmicas Laterales

PUBLICACION
TECNICA N°. 13

Junio de 1987

REPUBLICA ARGENTINA

**MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS SUJETAS A FUERZAS
SÍSMICAS LATERALES**

Por: Ing. Julio Casal*

* Profesional especializado, Departamento de Ingeniería Sismorresistente,
Instituto Nacional de Prevención Sísmica (IMPRES)

INDICE

1.	Introducción	1
2.	Métodos aproximados para el análisis de estructuras constituidas por pórticos	1
2.1.	Método de Bowman	1
2.1.1.	Ejemplo de aplicación	3
2.2.	Método del factor	3
2.2.1.	Ejemplo de aplicación	4
2.3.	Método de Muto	5
2.3.1.	Rigidez de piso	5
2.3.2.	Momentos flectores en el pórtico	9
2.3.2.1.	Altura del punto de inflexión de la columna	9
2.3.2.2.	Momentos flectores en columnas y vigas	10
2.3.3.	Ejemplo de aplicación	11
2.4.	Fórmulas de Wilbur	11
2.4.1.	Ejemplo de aplicación	14
3.	Métodos aproximados para analizar estructuras constituidas por sistemas pórtico-tabique	15
3.1.	Método de Khan-Sbarounis	15
3.1.1.	Ejemplo de aplicación	17
4.	Métodos exactos	18
4.1.	Método de las rigideces	18
4.1.1.	Descripción del procedimiento	19
5.	Grado de precisión de los métodos aproximados	21
	REFERENCIAS	22
	RECONOCIMIENTO	22
	FIGURAS Y TABLAS	23

MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS SUJETAS A FUERZAS SÍSMICAS LATERALES

1. Introducción

En este trabajo se describen e ilustran con ejemplos, métodos aproximados para analizar tanto estructuras aporticadas como aquellas constituidas por sistemas pórtico-tabique.

Estos procedimientos son de utilidad en las etapas preliminares de análisis y dimensionamiento. Además permiten verificar si se han cometido errores de significación en el uso de programas de computadora para el análisis estructural de edificios.

Cabe destacar que en los métodos que aquí se presentan, se desprecian los efectos de las deformaciones axiales de los elementos verticales de la estructura.

Finalmente, con el propósito de estimar el grado de precisión de los métodos aproximados, se comparan los resultados del análisis de los ejemplos propuestos con aquéllos obtenidos mediante un método matricial que puede considerarse como exacto, el cual se describe brevemente en este trabajo.

2. Métodos aproximados para analizar estructuras constituidas por pórticos

2.1. Método de Bowman

A partir del estudio de numerosos pórticos resueltos por métodos exactos se deriva un método aproximado (ref. 2) basado en las siguientes hipótesis:

1. Los puntos de inflexión en las vigas exteriores se encuentran a 0,55 de su luz, a partir de su extremo. En vigas interiores, el punto de inflexión se encuentra en el centro del tramo, excepto en el tramo central cuando el número de tramos es impar, o en los dos centrales si es par. En estos tramos la posición de los puntos de inflexión en las vigas se determina por condiciones de simetría y equilibrio.

2. Los puntos de inflexión en las columnas del primer piso se encuentran a 0,60 de su altura, a partir de la base.

Para pórticos con dos o más niveles, los puntos de inflexión en columnas de los pisos último, penúltimo y antepenúltimo, respectivamente se encuentran a 0,65; 0,60 y 0,55 de la correspondiente altura, a partir del extremo superior. En edificios de cinco o más niveles, los puntos de inflexión en aquellas columnas situadas en pisos no especificados se encuentran en el centro de su altura.

3. El esfuerzo de corte en cada piso se distribuye del siguiente modo:

a) Primer piso

$$V_c = \frac{N - 0,5}{N + 1} V \quad (1)$$

donde:

V esfuerzo de corte total en el piso considerado

N número de vanos del pórtico en el piso considerado

Este esfuerzo de corte se distribuye en las distintas columnas de determinado piso en forma proporcional a sus rigideces. A su vez, el esfuerzo de corte $V_v = V - V_c$ se distribuye entre los distintos vanos del piso, proporcionalmente a la rigidez de cada viga que los limita en parte superior. Luego, el esfuerzo de corte que toma cada vano se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que lo limitan.

b) Pisos superiores

$$V_c = \frac{N - 2}{N + 1} V \quad (2)$$

Este esfuerzo de corte se distribuye directamente en las columnas del piso determinado. Mientras que el esfuerzo de corte $V_v = V - V_c$ se distribuye entre los distintos vanos en la forma que se explicó anteriormente.

Una variante de este método consiste en respetar los puntos 2 y 3; mientras que para determinar los momentos en las vigas se equilibrará en cada nudo la suma de los momentos en los extremos de las columnas con los momentos proporcionales a la rigidez angular natural de cada viga.

2.1.1. Ejemplo de aplicación

En la figura 2 se presentan los resultados obtenidos al analizar el pórtico propuesto de la figura 1 por el método de Bowman.

Finalmente, se muestran en la figura 3 los cálculos intermedios necesarios para obtener las solicitaciones en algunos miembros estructurales del pórtico propuesto.

2.2. Método del factor

Este método se basa en la aplicación de las ecuaciones de pendiente-deformación; además se hacen las siguientes hipótesis simplificadoras que se detallan a continuación:

1. Para el cálculo de los desplazamientos lineales y angulares en un piso se considera que son iguales los valores del ángulo ψ en dos niveles consecutivos. El ángulo ψ es la diferencia de desplazamientos laterales de dos niveles consecutivos dividida por la altura del piso considerado.
2. El desplazamiento angular de un nudo y el de los extremos opuestos de todas las barras que concurren al mismo son iguales.

Lo antedicho conduce al siguiente procedimiento:

1. En cada nudo se calcula el factor de viga, G_n , según la expresión:

$$G_n = \frac{\sum K_{cn}}{\sum K_n} \quad (3)$$

donde:

ΣK_{cn} suma de las rigideces de las columnas que concurren al nudo considerado

ΣK_n suma de las rigideces de todos los elementos que concurren al nudo

2. Se calcula en cada nudo el factor de columna, C_n , a partir de la siguiente expresión:

$$C_n = 1 - G_n \quad (4)$$

3. Se obtiene para cada elemento estructural, viga o columna, en cada extremo, el valor de la suma de su factor más la mitad del factor correspondiente al extremo opuesto del mismo elemento. Luego, los momentos en los extremos de columnas del mismo piso, son proporcionales a los valores de $K_n = (G_n + G'_n / 2)$ para cada extremo de cada columna. A su vez, los momentos en los extremos de vigas que concurren a un mismo nudo son proporcionales a los valores de $K_n = (G_n + G'_n / 2)$ correspondientes.

2.2.1. Ejemplo de aplicación

En la figura 4 se muestra una aplicación del método del factor al pórtico propuesto. En ella puede observarse que en cada extremo de los distintos miembros estructurales, aparece una serie de valores numéricos que en forma sucesiva representan el factor C_n o G_n para el elemento correspondiente, la mitad del valor del factor para el extremo opuesto del mismo, C'_n o G'_n , y la suma de los dos valores anteriores. A partir de esta última cantidad, se obtienen los valores de $K_n (G_n + G'_n / 2)$ y $K_n (C_n + C'_n / 2)$.

A continuación se calcula la $\Sigma K_n (C_n + C'_n / 2)$ para cada piso y se distribuye el momento de piso, $V \times h$, en los extremos de las columnas correspondientes. Para ejemplificar estas operaciones, se toma el extremo superior de la columna central izquierda del segundo entrepiso, donde:

$$K_n (C_n + C'_n / 2) = 3,365$$

$$V \times h = 54$$

$$\Sigma K_n (C_n + C'_n / 2) = 19,257$$

luego el momento en el extremo de la columna vale:

$$M = \frac{54}{19,257} \times 3,365 = 9,44$$

Finalmente, los momentos en las vigas se calculan a partir de la distribución de la suma de momentos de los extremos de las columnas en cada nudo, en forma proporcional al valor de $K_n (G_n + G_n'/2)$ de cada viga.

2.3. Método de Muto

Muto (ref. 3) ha desarrollado un método aproximado para analizar estructuras aporticadas planas constituidas por miembros estructurales esbeltos, vigas y columnas, con nudos rígidos. En este método se considera que las vigas son axialmente indeformables, a su vez, existe un desplazamiento idéntico para todos los nudos de un determinado nivel.

Los dos principales factores a determinar por el método de Muto son la rigidez de piso y la altura del punto de inflexión de la columna, necesaria para obtener los momentos flectores en vigas y columnas.

2.3.1. Rigidez de piso

La rigidez de piso, K , se obtiene a partir de la expresión $K = V/\Delta$; donde V es el esfuerzo de corte del piso considerado y Δ el desplazamiento relativo (fig. 5). Si V_c es el corte que toma cada columna de un piso, la rigidez (o coeficiente de distribución por corte) de la misma está dada por $K_c = V_c/\Delta$; luego si se tienen en cuenta la ecuación de equilibrio $V = \sum V_c$ se llega a $K = \sum K_c$. Cuando la altura de los pisos es constante, la rigidez al corte de una columna que sufre un desplazamiento horizontal sin giro en los nudos y que se deforma sólo por flexión se calcula a partir de:

$$K_c = \frac{12 E I_c}{h^3} = \frac{12 E k_c}{h^2} \quad (5)$$

donde:

k_c es la rigidez relativa de la columna

Con el propósito de considerar el posible giro en el nudo, cuando no se cumple la hipótesis de rigidez infinita de las vigas respecto de las columnas concurrentes al mismo, Muto introduce un factor correctivo, $a < 1$, en la expresión anterior, de modo que:

$$K_c = a k_c \frac{12 E}{h^2} \quad (6)$$

Según el método aproximado, para determinar los coeficientes de rigidez, se analiza el modelo de un pórtico simétrico de un vano, con pisos de igual altura, y con columnas y vigas de rigideces relativas k_c y k_v constantes. Luego, a partir de la ecuación de las tres deformaciones, se obtiene para los pisos intermedios del pórtico (fig. 6):

$$a = \frac{\bar{k}}{2 + \bar{k}} \quad (7)$$

donde:

$$\bar{k} = k_v / k_c$$

En el caso de tratarse de pórticos de varios vanos con variación en las rigideces relativas de las vigas, se mantiene la validez de la fórmula anterior para el cálculo del coeficiente a , aunque se modifica la expresión para evaluar \bar{k} . Así, para el caso de una columna interior (fig. 7.a) y de una columna exterior (fig. 7.b), el valor de \bar{k} se obtiene, respectivamente, como:

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \frac{k_{v1} + k_{v2} + k_{v3} + k_{v4}}{k_c} \quad \bar{k} = \frac{1}{2} \frac{k_{v1} + k_{v2}}{k_c}$$

En general, para pórticos de varios vanos con elementos estructurales no uniformes y para los pisos intermedios se obtiene \bar{k} a partir de:

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \frac{\sum k_{vi}}{k_c} \quad (8)$$

En el caso de tratarse de una columna exterior, dos de las vigas tendrán $k_{vi} = 0$. Para el piso inferior, la forma de evaluar el coeficiente de rigidez a , es distinta que para los pisos intermedios. Además, el mismo difiere si la columna se encuentra empotrada o articulada en su base (fig. 8). Muto propone para ambos casos las siguientes expresiones:

$$\text{a) Columna empotrada - } \bar{k} = \frac{\sum k_{vi}}{k_c}, \quad a = \frac{0,5 + \bar{k}}{2 + \bar{k}} \quad (9)$$

$$\text{b) Columna articulada - } \bar{k} = \frac{\sum k_{vi}}{k_c}, \quad a = \frac{0,5 + \bar{k}}{1 + 2\bar{k}} \quad (10)$$

Como se dijo anteriormente, debe hacerse $k_{vi} = 0$ para la viga que corresponda cuando se trata de una columna exterior.

Si se considera rigidez al giro de la fundación, $k_g \cdot I_f$, y además se supone vigas de fundación de rigideces k_{f1} , k_{f2} (fig. 9.a), el coeficiente de rigidez a , se calcula como si se tratara de un piso intermedio, pero el mismo no puede ser mayor que el obtenido a partir de la expresión 9.

Debe tenerse presente que los k_{vi} de las vigas no son rigideces al giro (momentos por unidad de ángulo), por lo tanto la rigidez al giro debe transformarse en rigidez al desplazamiento, k_g , mediante la expresión:

$$k_g = \frac{k_g \cdot I_f}{6E} \quad (11)$$

Con cierta frecuencia, pueden presentarse en la práctica, estructuras que cuenten con columnas de distinta altura en su planta baja (fig. 10) o pórticos con columnas divididas (fig. 11). Para considerar estos casos se deben modificar los procedimientos seguidos anteriormente para la determinación de los coeficientes de rigidez.

a) Caso de pórticos con columnas de diferente altura en planta baja- La columna B (fig. 10) tiene una altura, h' , distinta al resto de las columnas de la planta baja, con un coeficiente de rigidez a y una rigidez relativa k'_c ; el esfuerzo de corte que toma la misma es:

$$V' = a k'_c \frac{12 E \Delta}{h'^2} = a \left(\frac{h}{h'} \right)^2 k'_c \left[\frac{12 E \Delta}{h^2} \right] \quad (12)$$

Se observa en la expresión que la parte entre paréntesis es común con las demás columnas, sólo se presenta diferencia en el coeficiente de rigidez, el cual se evalúa con la expresión:

$$a' = a \left(\frac{h}{h'} \right)^2 \quad (13)$$

b) Caso de pórticos con columnas divididas- Esta situación se representa en la figura 11, caso de un entrepiso, donde aparece la columna B dividida por una viga intermedia. Si la fuerza lateral que actúa sobre esta viga es pequeña, entonces los esfuerzos de corte V en los pisos situados por encima y por debajo de aquella se pueden considerar iguales. El desplazamiento Δ de la columna B será igual a la suma, $\Delta_1 + \Delta_2$, de los desplazamientos con que contribuyen ambas partes de la misma (fig. 11). Luego se tiene:

$$\Delta_1 = \frac{h_1^2}{K_{c1}} \frac{V}{12 E}$$

$$\Delta_2 = \frac{h_2^2}{K_{c2}} \frac{V}{12 E}$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \left(\frac{h_1^2}{K_{c1}} + \frac{h_2^2}{K_{c2}} \right) \frac{V}{12 E}$$

A partir de esta última expresión se obtiene:

$$V = \frac{1}{\frac{1}{K_{c1}} \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 + \frac{1}{K_{c2}} \left(\frac{h_2}{h} \right)^2} \left[\frac{12 E}{h^2} \right] \Delta$$

De este modo, el coeficiente de distribución por corte se expresa como:

$$K'_c = \frac{1}{\frac{1}{K_{c1}} \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 + \frac{1}{K_{c2}} \left(\frac{h_2}{h} \right)^2} \left[\frac{12 E}{h^2} \right]$$

cuando $h_1 = h_2$

$$K_c' = \frac{4}{\frac{1}{K_{c1}} + \frac{1}{K_{c2}}} \left[\frac{12E}{h^2} \right]$$

Si la diferencia entre K_{c1} y K_{c2} es pequeña, se puede utilizar una expresión más simple dada por:

$$K_c' = (K_{c1} + K_{c2}) \left[\frac{12E}{h^2} \right]$$

Finalmente, cuando fuerzas laterales importantes actúan en la viga intermedia, será necesario realizar los cálculos distribuyendo la fuerza lateral en los pisos superior e inferior.

2.3.2. Momentos flectores en el pórtico

2.3.2.1. Altura del punto de inflexión de la columna

Una vez conocido el esfuerzo de corte que absorbe cada columna, es necesario conocer la posición del punto de inflexión para poder determinar la distribución de momentos flectores en la misma.

El método de Muto tiene en cuenta varios factores que influyen en la localización del punto de inflexión; éstos son la ubicación del piso en la estructura, las relaciones de rigidez de las vigas superior e inferior y las alturas de los pisos superior e inferior que limitan la columna en estudio.

a) Determinación de la relación de altura estándar del punto de inflexión- Esta relación, denominada y_0 , del punto de inflexión estándar se obtiene mediante la utilización de la tabla 1 para el caso de fuerza lateral triangular inversa. En las mismas los valores de y_0 se obtienen en función de la relación de rigidez promedio \bar{k} .

Por ejemplo, la columna del tercer piso ($n=3$) del pórtico de la figura 12 ($m=4$) solicitado por una carga triangular inversa tiene un valor de $y_0 = 0,40$ cuando $\bar{k} = 0,5$.

b) Corrección por variación en la relación de rigidez- Cuando las relaciones de rigidez superior e inferior son diferentes (fig. 13) se produce un corrimiento del punto de inflexión en la columna. Para determinar esta desviación se calcula un coeficiente α_1 dado por:

$$\alpha_1 = \frac{k_{v1} + k_{v3}}{k_{v2} + k_{v4}} \quad (14)$$

Una vez calculado α_1 y con el valor de \bar{k} se obtiene a partir de la tabla 2 el corrimiento, en función de la altura del piso, y_1 .

Por ejemplo, con $\bar{k} = 0,5$ y $\alpha_1 = 0,6$ se tiene $y_1 = 0,10$.

c) Corrección por variación en la altura del piso- Existe un movimiento del punto de inflexión cuando la altura del piso varía. Para considerar este efecto se debe realizar una corrección de la ubicación del punto de inflexión del piso en estudio; éste es el caso que se esquematiza en las figuras 14 y 15, donde el piso superior y el inferior, respectivamente, tienen una altura diferente al resto de los pisos, que presentan una altura constante. De este modo, en función de \bar{k} y de los coeficientes $\alpha_2 = h_{sup}/h$ y $\alpha_3 = h_{inf}/h$ se encuentran en la tabla 3 los valores de los corrimientos y_2 e y_3 respectivamente. Por ejemplo, cuando $\bar{k} = 0,5$; si $\alpha_2 = 1,8$ en el piso superior, el valor de la corrección es $y_2 = 0,10$; mientras que si $\alpha_3 = 1,6$ en el piso inferior, el punto de inflexión sufre un corrimiento hacia abajo $y_3 = -0,05$.

d) Determinación de la altura relativa del punto de inflexión- La altura relativa final del punto de inflexión de la columna se calcula a partir de la expresión siguiente:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \quad (15)$$

2.3.2.2. Momentos flectores en columnas y vigas

El valor del momento en la base de la columna se obtiene multiplicando el esfuerzo de corte por la distancia al punto de inflexión (ec. 16.a); mientras que para hallar el valor en el extremo superior se utiliza la ecuación 17.a.

Alternativamente, cuando las alturas de todas las columnas son iguales es más conveniente calcular los momentos por las ecuaciones 16.b y 17.b.

$$M_{inf} = V \cdot y h \quad (16.a)$$

$$= V h \cdot y \quad (16.b)$$

$$M_{sup} = V h - M_{inf} \quad (17.a)$$

$$= V h (1 - y) \quad (17.b)$$

Para determinar el momento en las vigas, en el caso de tratarse de una columna interior, se reparte el momento de la misma en las vigas izquierda y derecha en forma proporcional a las rigideces relativas de ambas.

2.3.3. Ejemplo de aplicación

En las figuras 16 a 19 se esquematiza el desarrollo del método aproximado de Muto cuando se analiza la estructura propuesta.

2.4. Fórmulas de Wilbur

Si se asume el modelo matemático de un edificio como una serie de masas unidas por resortes, y se entiende por "rigidez de piso" la relación entre el esfuerzo de corte absorbido por un pórtico en un piso determinado y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles que lo limitan, se pueden definir dos tipos de estructuras. Primeramente la "estructura de corte" o "sistema estrechamente acoplado" donde la rigidez de piso es independiente de la distribución de cargas laterales (fig. 20.a), y en segundo lugar la "estructura de flexión" o "sistema remotamente acoplado" donde no existe independencia entre la rigidez de piso y la distribución de cargas aplicadas (fig. 20.b). En este último caso, no tiene significado hablar de rigidez de piso, ya que la misma será diferente para cada una de las posibles configuraciones de fuerzas aplicadas. Para analizar este tipo de estructuras se hace necesario el empleo de métodos matriciales.

En general, cualquier edificio en la práctica se encontrará en una posición intermedia con respecto de los dos casos citados. En la figura 21 se observa la forma en que varían los momentos flectores en las columnas de un pórtico para los casos extremos y para uno intermedio. Aquí cabe destacar, que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en vigas y columnas sin verificar cuál es la situación real del pórtico, puede conducir a errores importantes de subestimación de momentos flectores en las columnas y de desplazamientos horizontales de la estructura.

Para conocer la situación en que se encuentra la estructura en cada caso particular, J. Blume (ref. 4) propone el empleo de un parámetro p , denominado índice de rotación, el cual se puede evaluar en cualquier piso y se define por la relación:

$$\rho = \frac{\sum I_v / l}{\sum I_c / h} \quad (18)$$

donde:

$\sum I_v / l$ suma de las rigideces relativas de las vigas de un cierto nivel

$\sum I_c / h$ suma de las rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las vigas antes mencionadas

Si $\rho > 0,10$ hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los pisos, por lo tanto es aceptable suponer que la estructura en cuestión es de corte. Para valores de ρ menores de 0,01 la estructura se asemeja más a un voladizo, estructura de flexión. Por último, para valores de ρ entre 0,01 y 0,10 la situación es intermedia y habrá pisos donde las columnas no tienen puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a apreciables errores del lado de la inseguridad.

Las fórmulas de Wilbur para calcular las rigideces de piso sólo son aplicables al caso de estructuras de corte, es decir pórticos regulares constituidos por elementos estructurales de momento de inercia constante. Estas fórmulas se basan en las siguientes hipótesis:

1. Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales, excepto en el nivel de fundación, en donde puede suponerse empotramiento o articulación según el caso.
2. El esfuerzo de corte en los dos pisos adyacentes al que se estudia son iguales al de éste.

A partir de estas hipótesis resultan las siguientes expresiones.

Primer Piso

- a) Columnas empotradas en la fundación

$$K_1 = \frac{48 E}{h_1 \left[\frac{4 h_1}{\sum k_{c1}} + \frac{h_1 + h_2}{\sum k_{v1} + \frac{\sum k_{c1}}{12}} \right]} \quad (19)$$

b) Columnas articuladas en la fundación

$$K_1 = \frac{24 E}{h_1 \left[\frac{8 h_1}{\sum k_{c1}} + \frac{2 h_1 + h_2}{\sum k_{v1}} \right]} \quad (20)$$

Segundo Piso

a) Columnas empotradas en la fundación

$$K_2 = \frac{48 E}{h_2 \left[\frac{4 h_2}{\sum k_{c2}} + \frac{h_1 + h_2}{\sum k_{v1} + \frac{\sum k_{c1}}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{\sum k_{v2}} \right]} \quad (21)$$

b) Columnas articuladas en la fundación

$$K_2 = \frac{48 E}{h_2 \left[\frac{4 h_2}{\sum k_{c2}} + \frac{2 h_1 + h_2}{\sum k_{v1}} + \frac{h_2 + h_3}{\sum k_{v1}} \right]} \quad (22)$$

Pisos Intermedios

$$K_n = \frac{48 E}{h_n \left[\frac{4 h_n}{\sum k_{cn}} + \frac{h_m + h_n}{\sum k_{vm}} + \frac{h_n + h_{n+1}}{\sum k_{vn}} \right]} \quad (23)$$

donde:

- K_n rigidez del piso n
- k_{vn} rigidez relativa (I_v/l) de las vigas del nivel sobre el piso n
- k_{cn} rigidez relativa (I_c/l) de las columnas del piso n

m, n, σ = índices que identifican tres niveles consecutivos desde
 abajo hacia arriba
 h_n = altura del piso n

Para el piso superior, si se acepta que el esfuerzo de corte del penúltimo nivel es el doble que el del último, es posible aplicar la expresión dada para los pisos intermedios, mientras se sustituya $2 h_m$ por h_m y se haga $h_\sigma = 0$.

2.4.1. Ejemplo de aplicación

A continuación, se calculan los índices de rotación y se aplican las fórmulas de Wilbur para obtener las rigideces de piso al pórtico propuesto (fig. 1).

$$p_1 = p_2 = 0,66 \quad , \quad p_3 = p_4 = 0,78$$

Dado que los índices de rotación p son mayores que 0,10 en todos los pisos, el pórtico propuesto es efectivamente una estructura de corte.

$$K_1 = \frac{48 \times 2\,400\,000}{3 \left[\frac{4 \times 3}{0,00225} + \frac{3 + 3}{0,00150 + \frac{0,00225}{12}} \right]} = 4320 \text{ t/m}$$

$$K_2 = \frac{48 \times 2\,400\,000}{3 \left[\frac{4 \times 3}{0,00225} + \frac{3 + 3}{0,00150 + \frac{0,00225}{12}} + \frac{3 + 3}{0,00150} \right]} = 2980 \text{ t/m}$$

$$K_3 = \frac{48 \times 2\,400\,000}{3 \left[\frac{4 \times 3}{0,00135} + \frac{3 + 3}{0,00150} + \frac{3 + 3}{0,00105} \right]} = 2064 \text{ t/m}$$

$$K_4 = \frac{48 \times 2\,400\,000}{3 \left[\frac{4 \times 3}{0,00135} + \frac{2 \times 3 + 3}{0,00105} + \frac{3}{0,00105} \right]} = 1890 \text{ t/m}$$

3. Métodos aproximados para analizar estructuras constituidas por sistemas pórtico-tabique

3.1. Método de Khan-Sbarounis

Este método (ref. 5) permite analizar estructuras como la representada en la figura 22, donde los tabiques o muros de rigidez se encuentran acoplados con los pórticos.

Básicamente, el método de Khan-Sbarounis consiste en sustituir una estructura como la esquematizada en la figura 22 por otra equivalente reducida (fig. 23). Como se aprecia en la figura, la estructura equivalente está compuesta por el sistema M que representa al muro o muros de rigidez, y el sistema P que incluye a las columnas, las vigas y aquellas losas que contribuyan a la rigidez lateral.

El momento de inercia del sistema M en cualquier piso, se determina mediante la suma de los momentos de inercia de todos los muros de rigidez existentes en el mismo. A su vez, en el sistema P, las rigideces, definidas como la inercia dividida en la longitud, de las columnas, K_c , y vigas, K_v , se obtienen sumando las rigideces de todos los elementos situados en un determinado piso.

Los sistemas M y P se consideran ligados por bielas horizontales de rigidez axial infinita y de rigidez a flexión nula, de este modo los desplazamientos laterales de ambos sistemas son iguales, mientras que los giros son distintos.

El método, en su versión más simple, propuesto por Khan y Sbarounis, se sintetiza en los siguientes pasos:

1. Se asume inicialmente que las cargas externas se aplican, en su totalidad, al sistema M como si se encontrara aislado, y a continuación se calculan los desplazamientos laterales generados por las mismas. Se pueden incluir en este cálculo las deformaciones debidas al corte.
2. Para el sistema P se suponen desplazamientos laterales iguales a los calculados para el sistema M, a menos que se cuente con una mejor aproximación.
3. En el sistema P, mediante las fórmulas de Wilbur, se pueden conocer las solicitaciones producidas por los desplazamientos supuestos y las reacciones sobre el sistema M.

4. Se calculan las modificaciones que sufren los desplazamientos cuando las reacciones encontradas en el paso anterior se aplican al sistema considerándolo nuevamente aislado.
5. Se comparan los desplazamientos para ambos sistemas. Si no se obtienen resultados satisfactorios, se repite el procedimiento hasta que dichos desplazamientos sean coincidentes dentro de la tolerancia asumida. Los esfuerzos de corte finales absorbidos por los distintos muros de rigidez que constituyen el sistema M son proporcionales a los momentos de inercia de cada uno de ellos. A su vez, conocidos los desplazamientos en cada uno de los pórticos del sistema P, se pueden determinar las solicitaciones en los mismos mediante los métodos expuestos en las secciones precedentes.

En el caso en que los pórticos tomen una parte significativa de las cargas totales, el método propuesto puede requerir de varios ciclos. Para simplificar el trabajo de iteración, Khan y Sbarounis presentan gráficas que permiten obtener los valores de los desplazamientos del conjunto M-P en función del desplazamiento del muro en su extremo superior. Estas gráficas aparecen en las figuras 24 a 30. Para entrar en las mismas debe calcularse el valor de K_m/K_c mediante la siguiente expresión:

$$\frac{K_m}{K_c} = \frac{\sum E_m I_m}{\sum E_c I_c} \left(\frac{10}{N} \right)^2 \quad (24)$$

donde E_m e I_m son, respectivamente, el módulo de elasticidad y el momento de inercia del sistema M, a su vez E_c e I_c son los valores correspondientes del módulo de elasticidad y el momento de inercia de las columnas del sistema P, y N es el número de niveles de la estructura.

Finalmente, para lograr una convergencia más rápida del procedimiento los autores proponen una corrección que consiste en adoptar como valor inicial del desplazamiento $\delta_{ji}(n+1)$ en el nivel i , para el ciclo $n+1$, el dado por la expresión:

$$\delta_{ji}(n+1) = \delta_{ji}(n) + \frac{\delta_{ei}(n) - \delta_{ji}(n)}{1 + \left[\frac{\delta_i - \delta_{ei}(n)}{\delta_{ji}(n)} \right]} \quad (25)$$

donde $\delta_{ji}(n)$ es el desplazamiento inicial del nivel i en el ciclo n , $\delta_{ei}(n)$ es el correspondiente desplazamiento al final de dicho ciclo, y δ_i es el desplazamiento del sistema M en el mismo nivel i cuando se lo somete a las cargas totales considerándolo aislado.

3.1.1. Ejemplo de aplicación

Como ejemplo de aplicación, se analiza la estructura propuesta en la figura 22 con el método de Khan-Sbarounis. Además, en la tabla 4 aparecen algunos datos adicionales sobre la estructura.

A continuación, se describen brevemente las operaciones efectuadas, las cuales se resumen en la tabla 4. Primeramente se calculan, como si se tratase de una viga en voladizo, los desplazamientos del tabique sujeto a las cargas totales; en este caso particular el desplazamiento del piso superior resulta 0,0176 m. Posteriormente se obtienen las rigideces, K_i , de piso mediante las fórmulas de Wilbur; se incluyen en el cálculo todas las vigas y columnas existentes en los tres planos.

En el primer ciclo, para estimar los valores de δ_{ii} se utilizan las gráficas de las figuras 24 a 30. Como δ_4 es conocido, se calculan los δ_{ii} con los cuales se determinan los desplazamientos de piso Δ_i . Luego, multiplicando éstos por las rigideces de piso correspondientes se obtienen los esfuerzos de corte en el sistema P, V_{pi} . Los esfuerzos de corte que actúan sobre el muro, V_{mi} , son iguales a los esfuerzos de corte totales, V_{ii} , menos los respectivos V_{pi} . Conocidos los valores de V_{mi} , se determinan los desplazamientos δ_{ei} que los mismos provocan en el muro. Posteriormente, se comparan los δ_{ei} con los δ_{ii} para comprobar si la aproximación entre ambos valores es la deseada. Si no se obtienen resultados satisfactorios, como ocurre en el primer ciclo de este ejemplo, se continúa con la iteración.

Para iniciar el segundo ciclo, se usa el criterio de convergencia dado por la expresión 25 para obtener los nuevos valores de δ_{ii} . Conocidos éstos, se repiten los pasos descritos para el primer ciclo. Tampoco se consiguen resultados aceptables para este segundo ciclo, por lo tanto se debe iterar nuevamente aplicando otra vez el criterio de convergencia mencionado. Finalmente se encuentra una aceptable convergencia en el tercer ciclo, dado que los desplazamientos iniciales y finales en los distintos niveles difieren en menos de un 3,1 por ciento. Se consideran como valores finales δ_i a los que resultan de aplicar el criterio de convergencia a los desplazamientos iniciales y finales del último ciclo, de este modo se obtiene:

$$\delta_4 = 0,0099 \text{ m} \quad , \quad \delta_3 = 0,0065 \text{ m} \quad , \quad \delta_2 = 0,0034 \text{ m} \quad , \quad \delta_1 = 0,0010 \text{ m}$$

Con base en estos resultados se obtienen los siguientes esfuerzos de corte para los sistemas P, V_{p1} , y sistema M, V_{m1} :

$$V_{p4} = 8323 (0,0099 - 0,0065) = 28,3 \text{ t} \quad , \quad V_{m4} = 40 - 28,3 = 11,7 \text{ t}$$

$$V_{p3} = 9397 (0,0065 - 0,0034) = 29,1 \text{ t} \quad , \quad V_{m3} = 70 - 29,1 = 40,9 \text{ t}$$

$$V_{p2} = 14194 (0,0034 - 0,0010) = 34,1 \text{ t} \quad , \quad V_{m2} = 90 - 34,1 = 55,9 \text{ t}$$

$$V_{p1} = 19387 (0,0010) = 19,4 \text{ t} \quad , \quad V_{m1} = 100 - 19,4 = 80,6 \text{ t}$$

En este ejemplo no se incluyen las deformaciones por corte en el cálculo de los desplazamientos, dado que en la mayoría de los casos, las mismas no influyen significativamente en los resultados finales.

4. Métodos Exactos

4.1. Método de las rigideces

Los reglamentos actuales, entre ellos el INPRES-CIRSOC 103 (ref. 1), aceptan que las solicitaciones en las estructuras se determinen mediante análisis elásticos, con fuerzas sísmicas convenientemente reducidas para considerar la influencia de la disipación de energía provocada por deformaciones anelásticas. Para estos casos los análisis matriciales basados en el método de las rigideces pueden considerarse como exactos.

Cuando se trate de edificios convencionales constituidos por pórticos o por combinación de pórticos y tabiques, es usual utilizar un método de análisis tridimensional (ref. 6) basado en idealizar la construcción como un conjunto de subestructuras (pórticos y/o tabiques) planas verticales, ligadas por losas rígidas que se consideran indeformables en su plano. Al asumir las losas como diafragmas infinitamente rígidos en planta, se pueden expresar los desplazamientos laterales de cualquier punto, en los distintos niveles de la construcción, en función de dos desplazamientos traslacionales y un giro alrededor de un eje vertical situado en un punto cualquiera de cada entrepiso. De este modo, el problema se reduce a uno de sólo tres grados de libertad por cada nivel.

4.1.1. Descripción del procedimiento

El análisis tridimensional de estructuras se realiza como se describe a continuación:

1. Determinación de la matriz de rigidez lateral del sistema plano vertical.- El cálculo de la matriz de rigidez lateral de un sistema plano j se realiza mediante el método directo de las rigideces.

Básicamente, este método consiste en construir, en primer lugar, la matriz de rigidez, \underline{k} , y los vectores de desplazamientos, \underline{u} , y de fuerzas, \underline{f} , en coordenadas locales para cada elemento estructural del sistema plano. La expresión que representa la ecuación de equilibrio del elemento estructural (barra) es:

$$\underline{f} = \underline{k} \underline{u} \quad (26)$$

Luego, mediante matrices de transformación de coordenadas, $\underline{\bar{a}}$, se expresan la matriz y los vectores anteriores en coordenadas globales $\underline{\bar{k}}$, $\underline{\bar{u}}$, $\underline{\bar{f}}$, para cada barra; de este modo se tiene:

$$\underline{\bar{k}} = \underline{\bar{a}}^T \underline{k} \underline{\bar{a}} \quad (27)$$

$$\underline{\bar{u}} = \underline{\bar{a}}^T \underline{u} \quad (28)$$

$$\underline{\bar{f}} = \underline{\bar{a}}^T \underline{f} \quad (29)$$

La matriz de rigidez global del sistema plano j , \underline{K}_j , se construye sumando el aporte de las matrices de rigidez de cada una de las barras contenidas en el mismo. Para esto se asignan al sistema dos grados de libertad para cada nudo, un desplazamiento vertical y un giro en el plano del sistema, y un desplazamiento horizontal traslacional por nivel (fig. 31). Por ejemplo, una estructura plana con N nudos y L niveles posee una matriz de rigidez global, \underline{K}_j , de orden $2N+L$.

A continuación, mediante un proceso de eliminación Gaussiana, se expresa la matriz \underline{K}_j en función solamente de los desplazamientos horizontales

laterales de cada nivel, obteniéndose la matriz de rigidez lateral del sistema plano, \underline{K}_{Lj} . Esta matriz es de orden L. Ahora, para cada sistema plano j de la estructura, se tiene la ecuación:

$$\underline{F}_{Lj} = \underline{K}_{Lj} \cdot \underline{U}_{Lj} \quad (30)$$

2. Determinación de la matriz de rigidez de la estructura- Para construir la matriz de rigidez de la estructura, \underline{K} , se deben expresar primeramente las matrices \underline{K}_{Lj} en términos de los grados de libertad del edificio completo, o sea dos traslaciones ortogonales y una rotación por nivel, obteniéndose la matriz, \underline{K}_{Ej} . Finalmente, la matriz de rigidez \underline{K} del edificio se obtiene sumando la contribución de las matrices \underline{K}_{Ej} dado que éstas están referidas a los mismos grados de libertad que la matriz \underline{K} . Por ejemplo, si la estructura tiene L niveles, la matriz \underline{K} es cuadrada de orden 3 L. La ecuación de equilibrio global de la estructura se expresa como:

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{U} \quad (31)$$

3. Determinación de los desplazamientos y solicitaciones en los elementos estructurales - Para determinar los desplazamientos y las solicitaciones en la estructura, cuando actúa un sistema de fuerzas laterales \underline{F} aplicado en los distintos niveles de la misma, se requiere conocer, primeramente, el vector de desplazamientos \underline{U} de la estructura, el cual se obtiene al resolver el modelo matemático definido por la ecuación 31.

Cabe destacar que las fuerzas \underline{F} son en realidad dos fuerzas propiamente dichas y un momento torsionante por cada nivel, en correspondencia con los grados de libertad del mismo.

Una vez conocidos los desplazamientos \underline{U} , se pueden calcular los desplazamientos laterales \underline{U}_{Lj} de cada sistema plano mediante las transformaciones matriciales necesarias. Por último, para obtener las solicitaciones y los desplazamientos en los distintos elementos estructurales de cada sistema plano, se requiere resolver la ecuación de equilibrio en coordenadas locales dada por la expresión 26.

Finalmente, con el propósito de determinar la precisión de los métodos aproximados, se analizan el pórtico de la figura 1 (fig. 32) y el sistema

pórtico-tabique (fig. 22) propuestos, con un programa de computadora denominado TABS (ref. 6) basado en los lineamientos descritos anteriormente en esta sección. El programa TABS resuelve ambas estructuras, considerándolas como sistemas planos individuales; es decir que, en cada caso, la matriz de rigidez lateral del sistema plano coincide con la matriz de rigidez de la estructura. En ambos análisis no se consideran los efectos de las deformaciones axiales en los elementos estructurales, para que los resultados sean comparables con los obtenidos mediante los métodos aproximados.

5. Grado de precisión de los métodos aproximados

Para el caso de las estructuras aporticadas, si se comparan los resultados obtenidos por los métodos aproximados con el procedimiento matricial (fig. 32) considerado como exacto, se comprueba que el método de Bowman es el que conduce a mayores errores, mientras que el método de Muto es el de mayor precisión. El método del factor conduce a resultados de precisión intermedia con respecto de los dos métodos citados.

Finalmente, para las estructuras constituidas por sistemas pórtico-tabique se comparan (tabla 5) los desplazamientos δ_i y los esfuerzos de corte V_m en cada nivel obtenidos al aplicar los métodos de Khan-Sbarounis y matricial "exacto" respectivamente. Se observa que los desplazamientos resultantes son prácticamente coincidentes; mientras que los esfuerzos de corte son bastantes similares, excepto en el nivel superior, aunque debe tenerse en cuenta que en este nivel el valor del esfuerzo de corte es pequeño. Se concluye que el método de Khan-Sbarounis tiene una precisión aceptable y es recomendable su utilización para fines prácticos.

REFERENCIAS

1. Reglamento INPRES - CIRSOC 103 - NORMAS ARGENTINAS PARA CONSTRUCCIONES SISMORRESISTENTES, noviembre 1983.
2. Bazán, E. y Meli, R., "Manual de diseño sísmico de edificios", Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, D-18, México, D.F., septiembre 1983.
3. Muto, K., "Aseismic Design Analysis of Buildings", Maruzen, 1974.
4. Blume, J.A., "Dynamic characteristics of multistory buildings", Journal of the Structural Division, Procs, ASCE, 94, ST2, 1968.
5. Khan, F.R. y Sbarounis, J.A., "Interaction of shear walls and frames", Journal of the Structural Division, ASCE, 90 ST3, junio 1964.
6. Wilson, E., Hollings, J.P. y Dovey, H.H., "Three dimensional analysis of building systems - TABS", Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, EERC 72-8, Berkeley, diciembre 1972.

RECONOCIMIENTO

El autor desea agradecer a las Srtas. Beatriz Camacho y Dora Cortez operadoras de la procesadora de palabras, y al Sr. Oscar Escudero por la preparación de las tablas y dibujos.

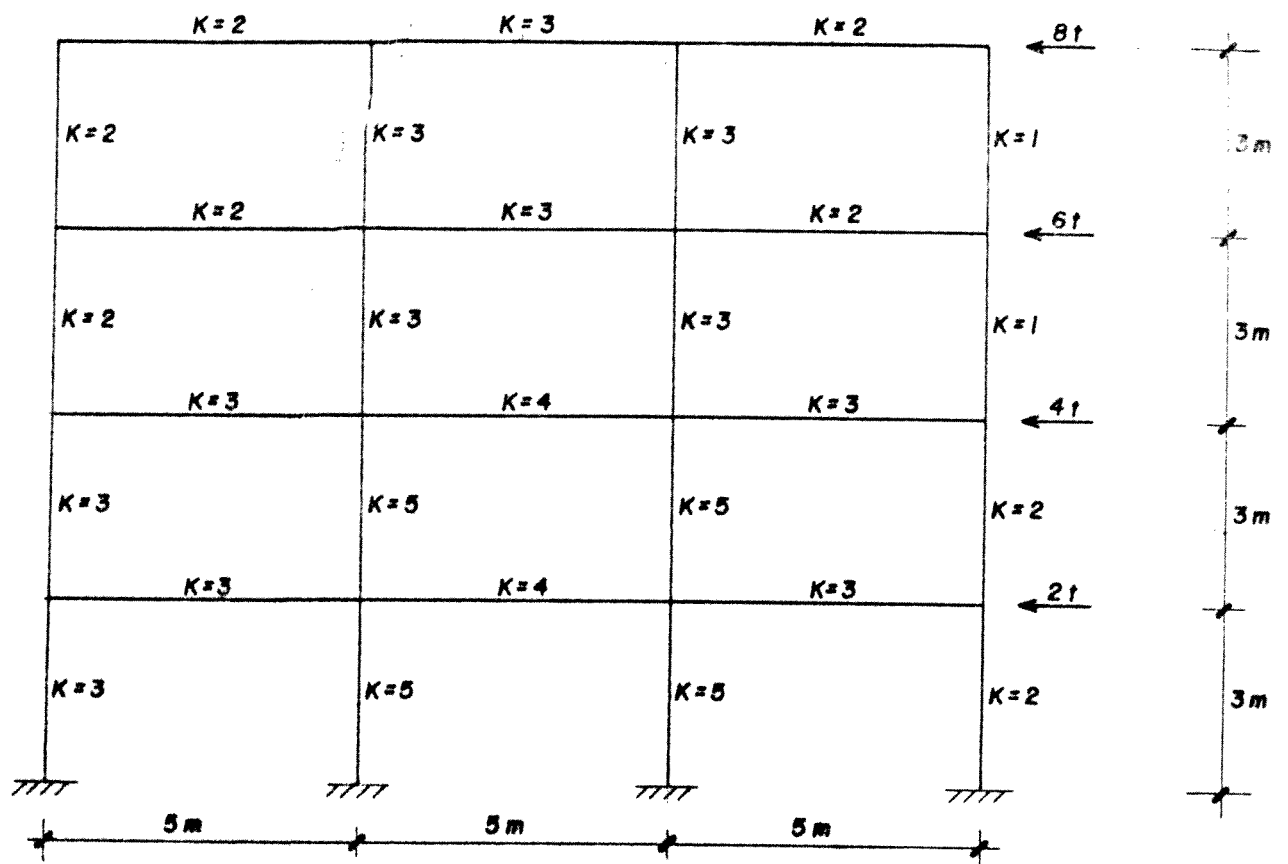


Fig.1 ESTRUCTURA PROPUESTA PARA ILUSTRAR EJEMPLOS

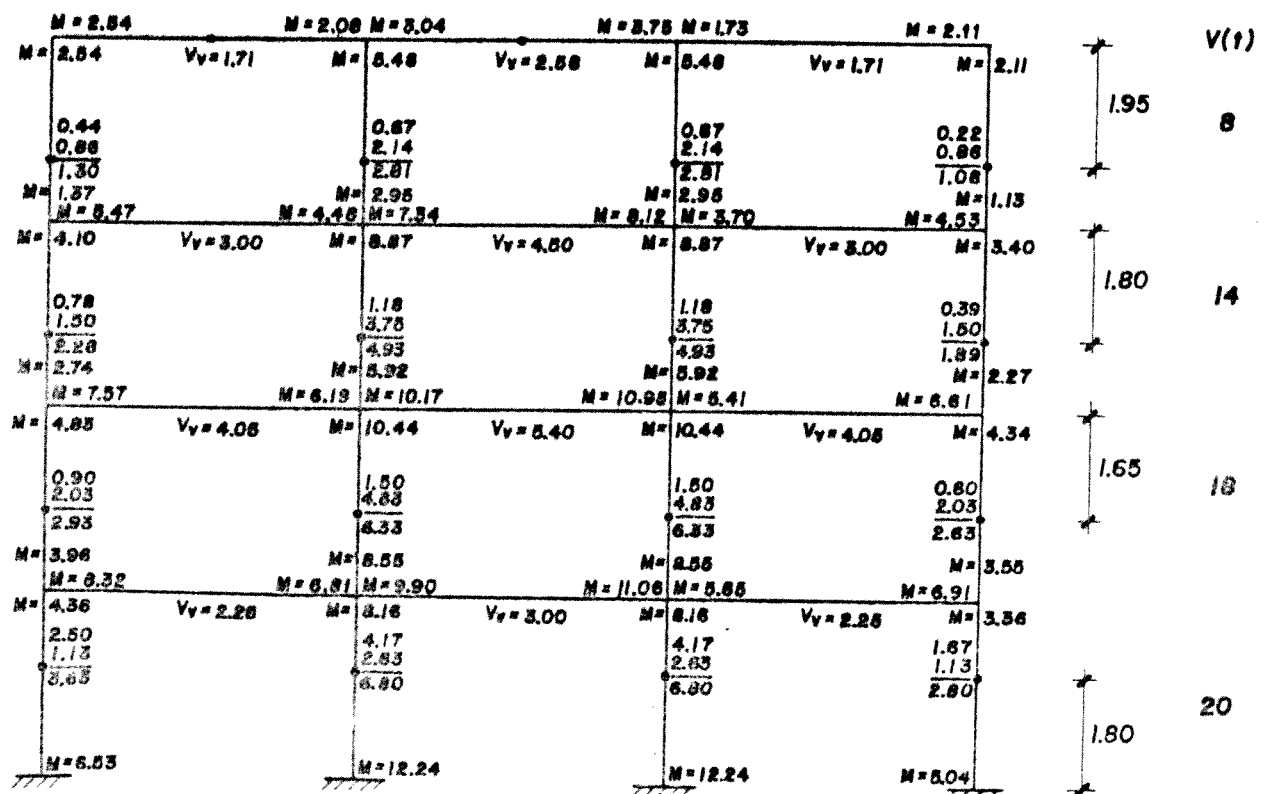


Fig.2 APLICACION DEL METODO DE BOWMAN

Distribución de esfuerzos de corte

Primer piso

$$V = 20 \text{ ton}$$

$$V_c = \frac{3 - 0.5}{3 + 1} \times 20 = 12.5 \text{ t}$$

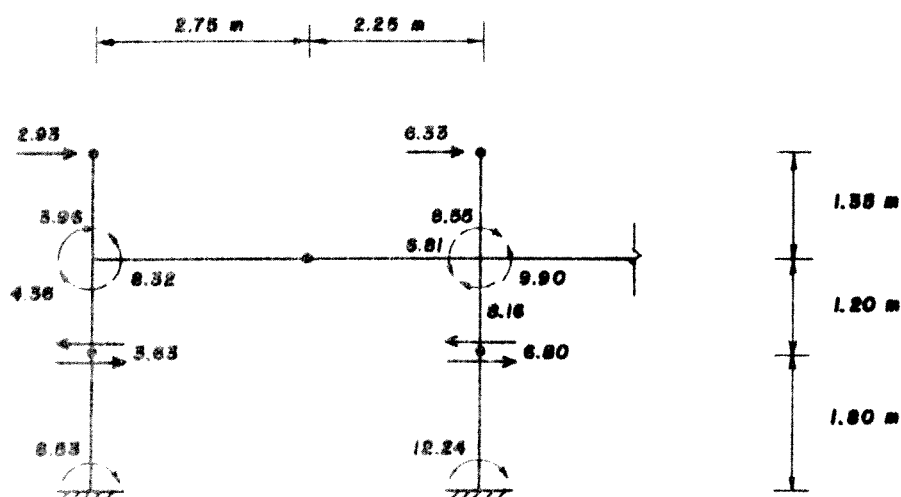
$$V_v = 20 - 12.5 = 7.5 \text{ t}$$

Segundo piso

$$V = 18 \text{ ton}$$

$$V_c = \frac{3 - 2}{3 + 1} \times 18 = 4.5 \text{ t}$$

$$V_v = 18 - 4.5 = 13.5 \text{ t}$$



Esquema de cálculo de los momentos flectores (en ton x m)

$$\begin{aligned}
 & 3.63 \times 1.80 = 6.53 \longrightarrow 3.63 \times 1.2 = 4.36 \longrightarrow 2.93 \times 1.35 = 3.96 \longrightarrow \\
 & \longrightarrow 4.36 + 3.96 = 8.32 \longrightarrow \frac{8.32 \times 2.25}{2.75} = 6.81 \longrightarrow 6.80 \times 1.80 = 12.24 \longrightarrow \\
 & \longrightarrow 6.80 \times 1.20 = 8.16 \longrightarrow 6.33 \times 1.35 = 8.55 \longrightarrow 8.16 + 8.55 - 6.81 = 9.90
 \end{aligned}$$

Fig. 3 ALGUNOS PASOS INTERMEDIOS EN LA APLICACION DEL METODO DE BOWMAN

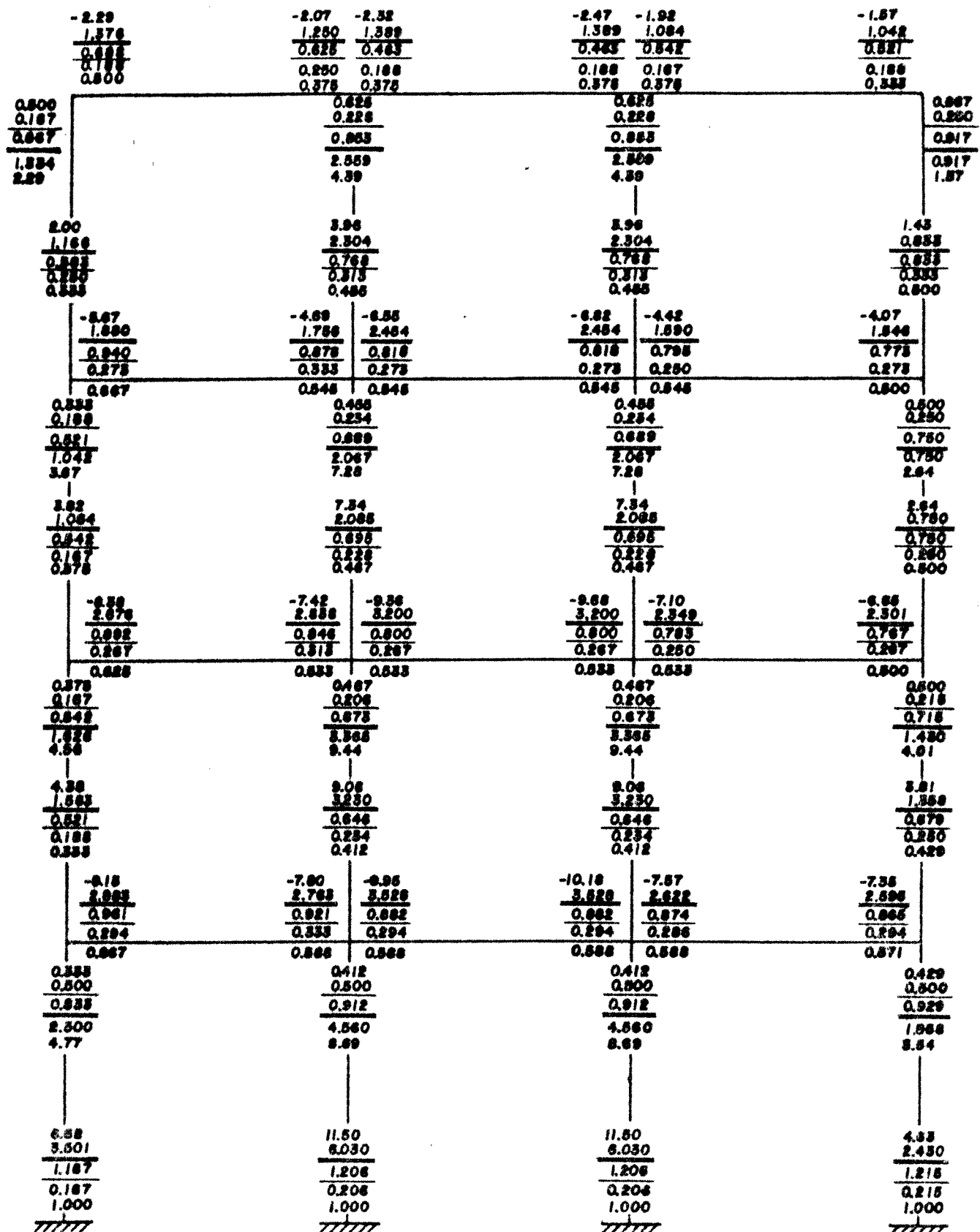


Fig. 4 APLICACION DEL METODO DEL FACTOR

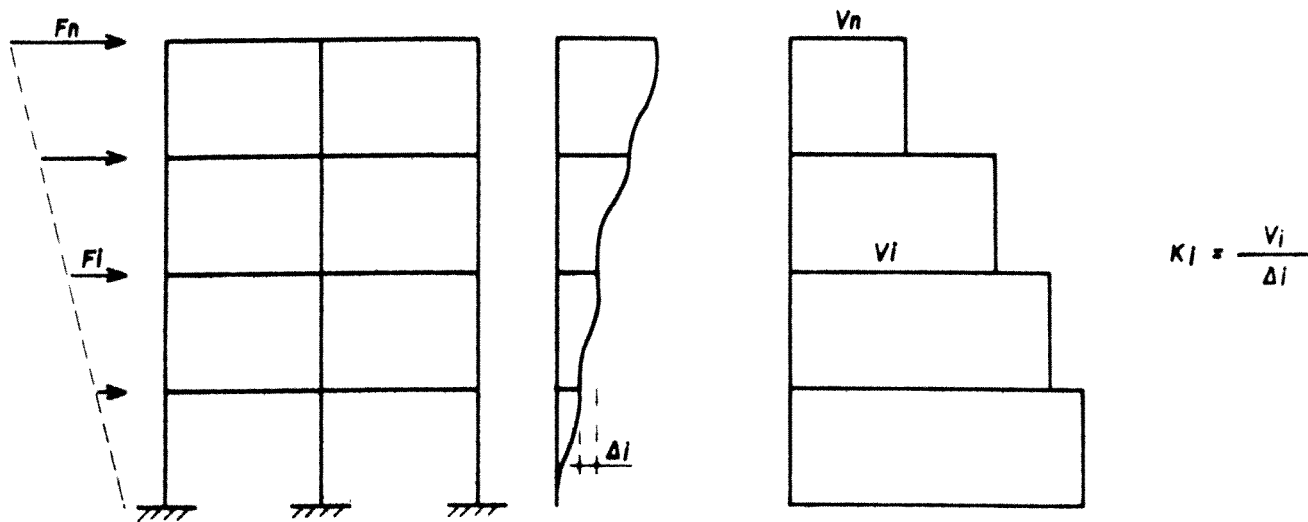


Fig. 5 DETERMINACION DE LA RIGIDEZ DE PISO "K"

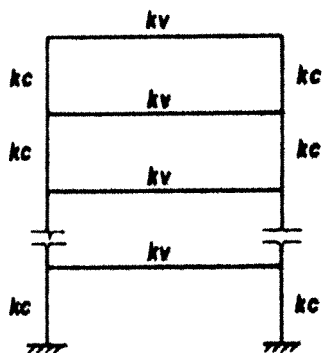
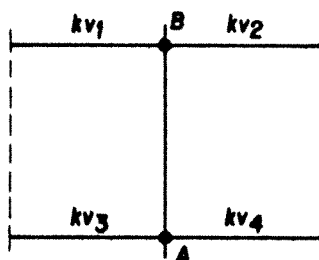
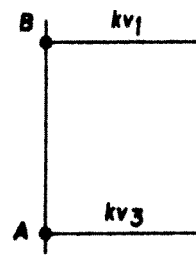


Fig. 6 DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE RIGIDEZ "a"

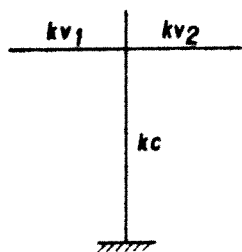


(a)

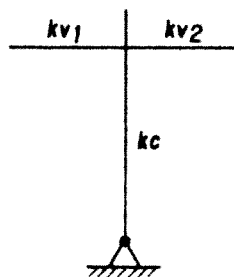


(b)

Fig. 7 DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE RIGIDEZ "a"

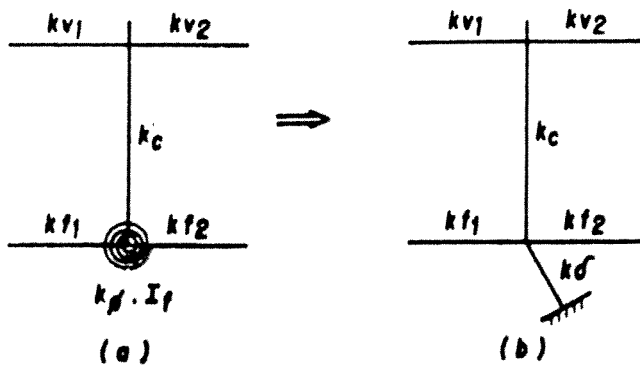


a) Columna empotrada



b) Columna articulada

Fig. 8 DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE RIGIDEZ "a" PARA EL PISO INFERIOR



$$\bar{k} = \frac{k_{v1} + k_{v2} + k_{f1} + k_{f2} + k_{\phi}}{2k_c}$$

$$a = \frac{\bar{k}}{2 + \bar{k}}$$

Fig.9 DETERMINACION DEL COEFICIENTE DE RIGIDEZ "a" CUANDO EXISTE GIRO DE FUNDACION

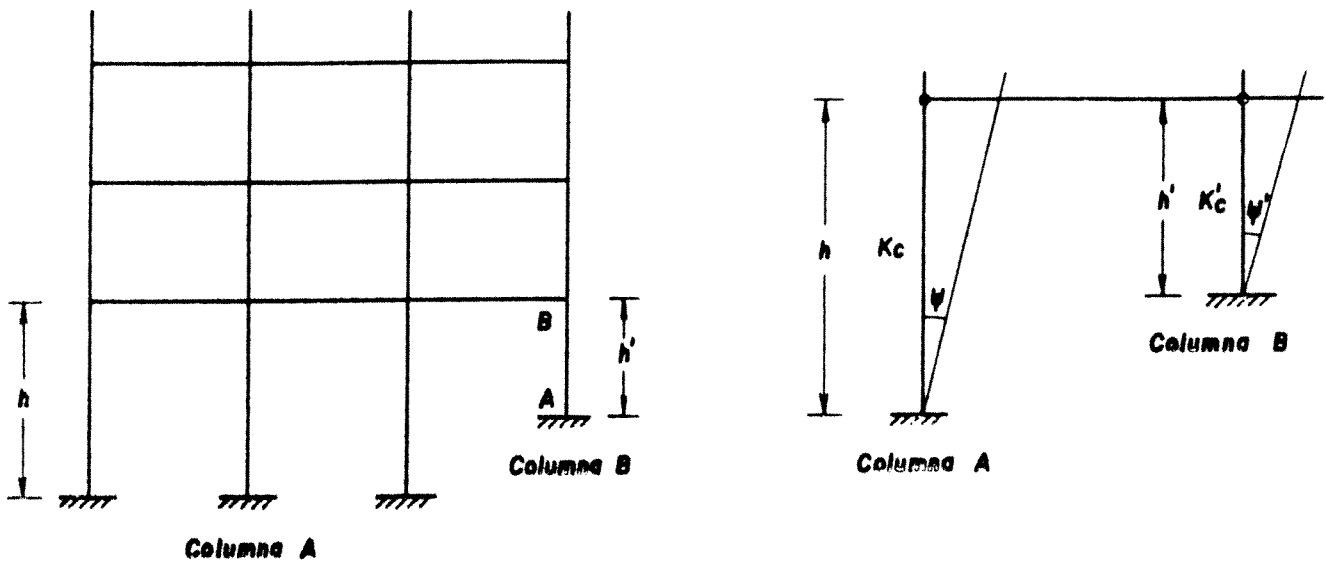


Fig.10 DETERMINACION DE "a" PARA EL CASO DE COLUMNAS DE DISTINTA ALTURA EN PLANTA BAJA

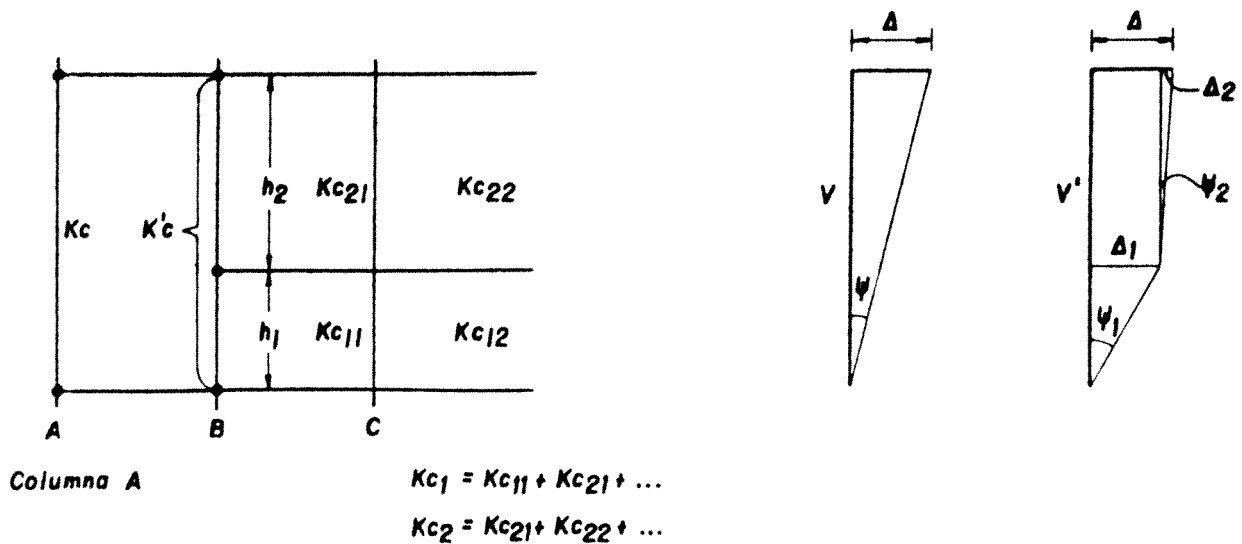


Fig.11 DETERMINACION DE "a" PARA EL CASO DE PORTICOS CON COLUMNAS DIVIDIDAS

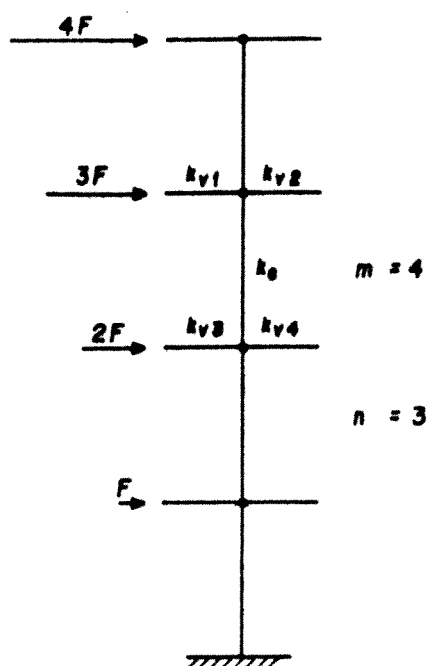


Fig. 12 ALTURA DEL PUNTO DE INFLEXION DE LA COLUMNA

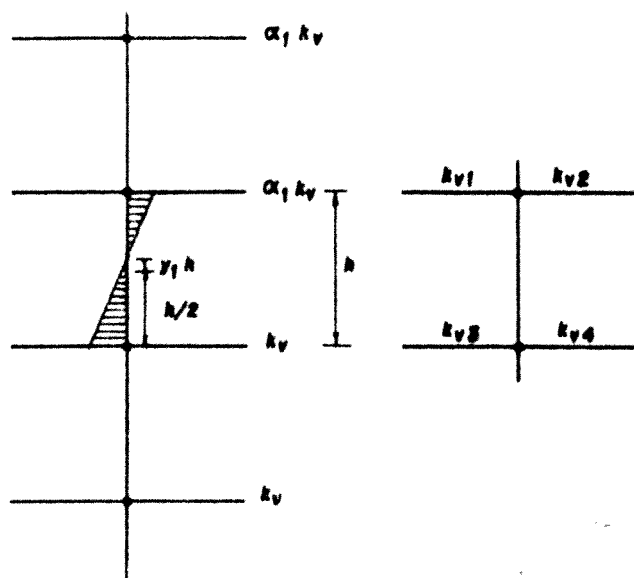


Fig. 13 CORRECCION POR VARIACION EN LA RELACION DE RIGIDEZ

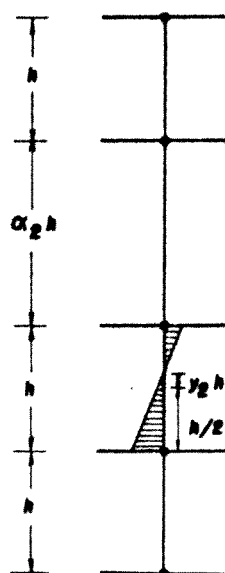


Fig. 14 CORRECCION POR VARIACION DE ALTURA DEL PISO SUPERIOR

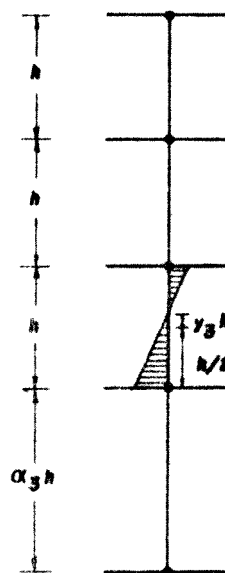


Fig. 15 CORRECCION POR VARIACION DE ALTURA DEL PISO INFERIOR

$V=8$	$\bar{K} = 1$ $a = 0.33$ $K_0 = 0.66$	$\bar{K} = 1.67$ $a = 0.46$ $K_0 = 1.58$	$\bar{K} = 1.67$ $a = 0.46$ $K_0 = 1.58$	$\bar{K} = 2$ $a = 0.80$ $K_0 = 0.80$	$\Sigma K_C = 3.92$
$V=14$	$\bar{K} = 1.25$ $a = 0.38$ $K_0 = 0.76$	$\bar{K} = 2$ $a = 0.60$ $K_0 = 1.50$	$\bar{K} = 2$ $a = 0.60$ $K_0 = 1.50$	$\bar{K} = 2.50$ $a = 0.66$ $K_0 = 0.66$	$\Sigma K_C = 4.32$
$V=18$	$\bar{K} = 1$ $a = 0.33$ $K_0 = 1$	$\bar{K} = 1.4$ $a = 0.41$ $K_0 = 2.08$	$\bar{K} = 1.4$ $a = 0.41$ $K_0 = 2.08$	$\bar{K} = 1.8$ $a = 0.48$ $K_0 = 0.83$	$\Sigma K_C = 5.93$
$V=20$	$\bar{K} = 1$ $a = 0.8$ $K_0 = 1.5$	$\bar{K} = 1.4$ $a = 0.56$ $K_0 = 2.80$	$\bar{K} = 1.4$ $a = 0.56$ $K_0 = 2.80$	$\bar{K} = 1.8$ $a = 0.87$ $K_0 = 1.14$	$\Sigma K_C = 8.24$

Fig. 16 CALCULO DEL COEFICIENTE DE DISTRIBUCION POR CORTE

$V = 1.88$ $V_h = 4.04$	$V = 2.82$ $V_h = 8.45$	$V = 2.82$ $V_h = 8.45$	$V = 1.02$ $V_h = 3.06$
$V = 2.48$ $V_h = 7.39$	$V = 4.86$ $V_h = 14.58$	$V = 4.86$ $V_h = 14.58$	$V = 1.81$ $V_h = 5.44$
$V = 3.04$ $V_h = 9.11$	$V = 6.22$ $V_h = 18.67$	$V = 6.22$ $V_h = 18.67$	$V = 2.52$ $V_h = 7.56$
$V = 3.84$ $V_h = 10.92$	$V = 6.80$ $V_h = 20.39$	$V = 6.80$ $V_h = 20.39$	$V = 2.77$ $V_h = 8.30$

Fig. 17 CALCULO DE LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS DE CORTE Y MOMENTOS

$\bar{h} = 1$ $y_0 = 0.40$ $y = 0.40$	$\bar{h} = 1.67$ $y_0 = 0.48$ $y = 0.48$	$\bar{h} = 1.67$ $y_0 = 0.48$ $y = 0.48$	$\bar{h} = 2$ $y_0 = 0.48$ $y = 0.48$
$\bar{h} = 1.25$ $y_0 = 0.48$, $y_1 = 0.08$ $y = 0.80$	$\bar{h} = 2$ $y_0 = 0.48$, $y_1 = 0.08$ $y = 0.80$	$\bar{h} = 2$ $y_0 = 0.48$, $y_1 = 0.08$ $y = 0.80$	$\bar{h} = 2.5$ $y_0 = 0.48$, $y_1 = 0$ $y = 0.48$
$\bar{h} = 1$ $y_0 = 0.80$ $y = 0.80$	$\bar{h} = 1.4$ $y_0 = 0.80$ $y = 0.80$	$\bar{h} = 1.4$ $y_0 = 0.80$ $y = 0.80$	$\bar{h} = 1.5$ $y_0 = 0.80$ $y = 0.80$
$\bar{h} = 1$ $y_0 = 0.88$ $y = 0.88$	$\bar{h} = 1.4$ $y_0 = 0.88$ $y = 0.88$	$\bar{h} = 1.4$ $y_0 = 0.88$ $y = 0.88$	$\bar{h} = 1.5$ $y_0 = 0.88$ $y = 0.88$

Fig.18 CALCULO DE LA ALTURA DEL PUNTO DE INFLEXION

	2.42	1.86	2.79	2.79	1.86	1.68	
2.42		4.68		4.68			1.68
1.62	6.32	3.80		3.80			1.33
3.70		4.44	6.65	6.65	4.44	4.30	2.99
3.70	8.26	7.29		7.29			2.45
4.56		7.13	9.50	9.50	7.13	6.23	3.78
4.56		9.34		9.34			3.78
3.82	6.38	7.06	9.42	9.42	7.06	6.68	2.90
		7.14		7.14			
	7.10		13.25		13.25		5.40

Fig.19 MOMENTOS FLECTORES OBTENIDOS AL APLICAR EL METODO DE MUTO

Tabla 1 ALTURA ESTANDAR DEL PUNTO DE INFLEXION, y_0
a) 1 piso a 7 pisos

m	$\frac{\bar{k}}{n}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
1	1	0.80	0.75	0.70	0.65	0.65	0.60	0.60	0.60	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55
2	2	0.50	0.45	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50
	1	1.00	0.85	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55
3	3	0.25	0.25	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50
	2	0.60	0.50	0.50	0.50	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.55	0.50
	1	1.15	0.90	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
4	4	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45
	3	0.35	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	2	0.70	0.60	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.20	0.95	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55
5	5	-0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	4	0.20	0.25	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	3	0.45	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.75	0.60	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.65	0.55	0.55	0.55
6	6	-0.15	0.05	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	5	0.10	0.25	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	4	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.50	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.85	0.80	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
7	7	-0.20	0.05	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45
	6	0.05	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	5	0.20	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.80	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55

b) 8 pisos a 10 pisos

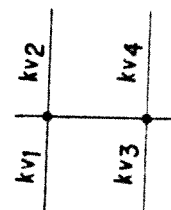
m	\bar{k} n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
8	8	-0.20	0.05	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45
	7	0.00	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	6	0.15	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.30	0.45	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.60	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.85	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.30	1.00	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
9	9	-0.25	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45
	8	-0.00	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	7	0.15	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.25	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.60	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.35	1.00	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
10	10	-0.25	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45
	9	-0.05	0.20	0.30	0.35	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	8	0.10	0.30	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.20	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.50	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.60	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.85	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.35	1.00	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55

c) 11 pisos a "m" pisos

m	\bar{k} n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
11	11	0.25	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45
	10	0.05	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	9	0.10	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	8	0.20	0.35	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.25	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.40	0.44	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.65	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.85	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.35	1.50	0.90	0.80	0.75	0.75	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55
12 a m pisos	12	0.30	0.00	0.15	0.20	0.25	0.30	0.30	0.30	0.35	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45
	11	0.10	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.50
	10	0.05	0.25	0.35	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50
	9	0.15	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50
	8	0.25	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	7	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	6	0.35	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	5	0.35	0.45	0.45	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	4	0.45	0.45	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	3	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	2	0.70	0.70	0.60	0.55	0.55	0.55	0.55	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1	1.35	1.05	0.90	0.80	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65	0.65	0.60	0.55	0.55	0.55

Tabla 2 FACTOR DE CORRECCION, γ_1 , POR VARIACION EN LA RELACION DE RIGIDEZ DE LAS VIGAS

$\alpha_1 \backslash \bar{k}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
0.4	0.55	0.40	0.30	0.25	0.20	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.05	0.05	0.05	0.05
0.5	0.45	0.30	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05
0.6	0.30	0.20	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0
0.7	0.20	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0
0.8	0.15	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.9	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



$$kv_{sup.} = kv_1 + kv_2$$

$$kv_{inf.} = kv_3 + kv_4$$

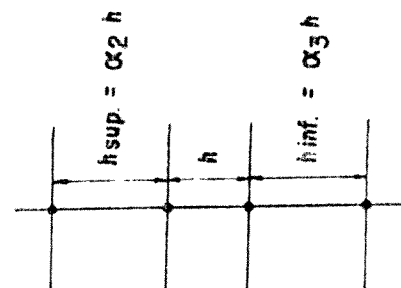
$$\alpha_1 = kv_{sup.} / kv_{inf.}$$

Tabla 3 VALORES DE CORRECCION, y_2 o y_3 , DEBIDO A VARIACION EN LA ALTURA DEL PISO

y_2 : Valor de corrección debido a la variación en la altura del piso superior

y_3 : Valor de corrección debido a la variación en la altura del piso inferior

α_2 sup.	\bar{k}	α_3 inf.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
2.0			0.25	0.15	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0
1.8			0.20	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0
1.6		0.4	0.15	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0
1.4		0.6	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.2		0.8	0.05	0.05	0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0		1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8		1.2	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.6		1.4	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4		1.6	-0.15	-0.10	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0	0.0	0.0
		1.8	-0.20	-0.15	-0.10	-0.10	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0	0.0
		2.0	-0.25	-0.15	-0.15	-0.10	-0.10	-0.10	-0.10	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	0.0	0.0



y_2 : Se obtiene a partir de $\alpha_2 = h_{sup.}/h$

y_3 : Se obtiene a partir de $\alpha_3 = h_{inf.}/h$

NOTA : y_2 o y_3 no necesitan considerarse para los pisos último y primero respectivamente

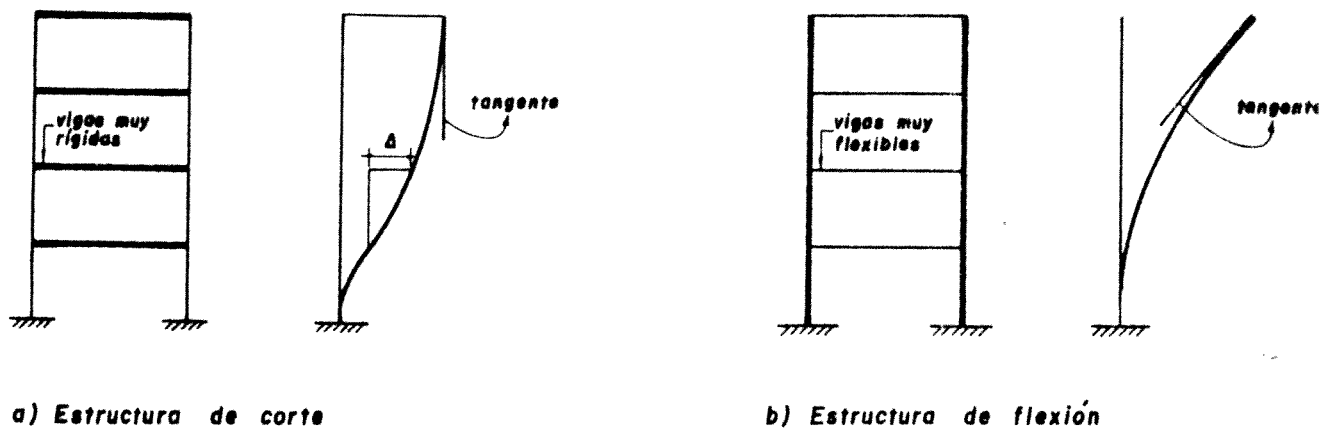


Fig. 20 TIPOS DE ESTRUCTURAS

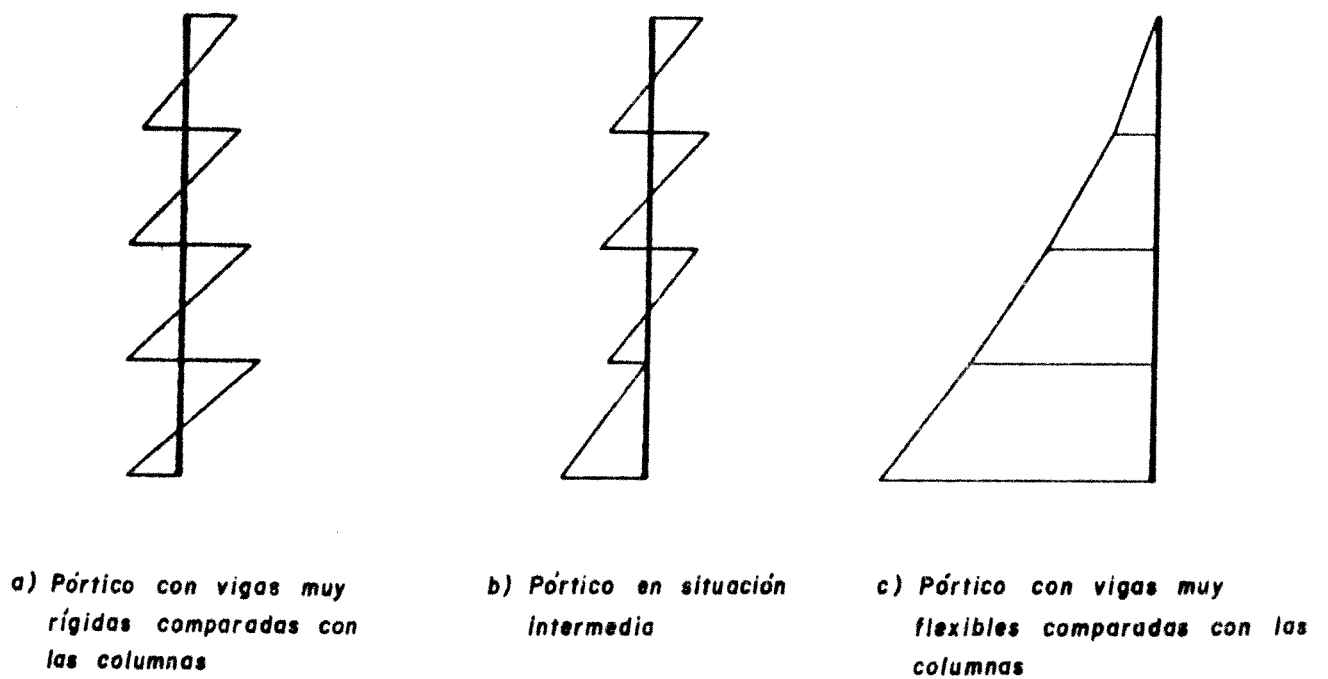
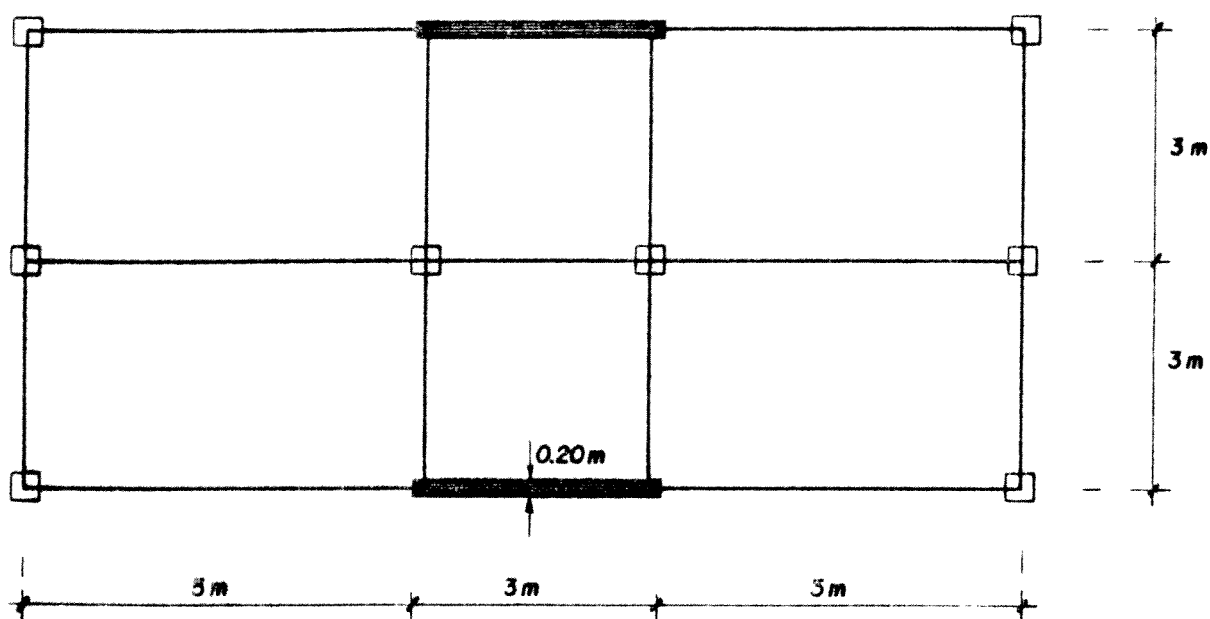


Fig. 21 MOMENTOS FLECTORES EN COLUMNAS DE PORTICOS



Piso	Dimensiones de vigas (m x m)	Dimensiones de columnas (m x m)
1-2	0.30 x 0.60	0.45 x 0.45
3-4	0.30 x 0.50	0.40 x 0.40

Fig. 22 PLANTA DE LA ESTRUCTURA ANALIZADA

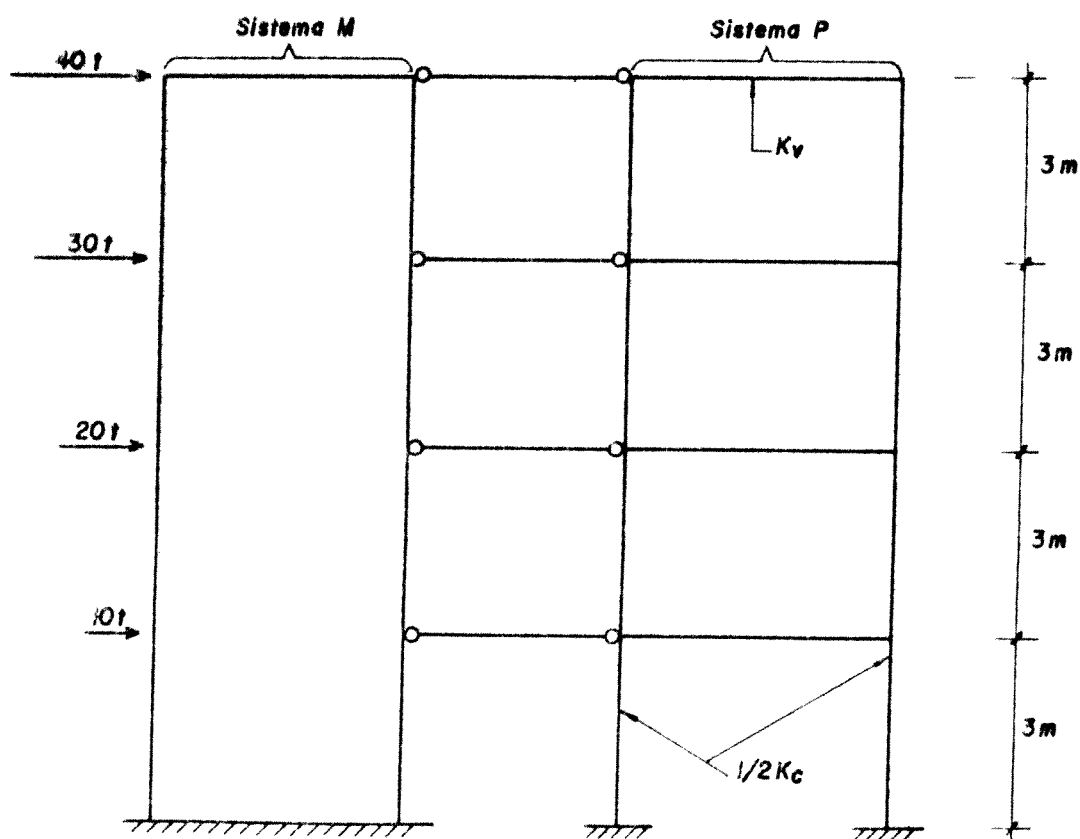


Fig. 23 REPRESENTACION DE LA ESTRUCTURA SEGUN EL METODO DE KHAN Y SBAROUNIS

Tabla 4.- APLICACION DEL METODO DE KHAN Y SBAROUNIS

Piso	I_v (m ⁴)	I_c (m ⁴)	I_m (m ⁴)	I_{m1} (m ⁴)	K_v (m ³)	K_c (m ³)	K_c/K_v	K_m/K_c
1-2	0.005400	0.003417	0.45	0.90	0.008280	0.009112	1.10	206
3-4	0.003125	0.002133	0.45	0.90	0.004792	0.005688	1.19	330

Nivel	Valores iniciales			Ciclo 1					
	V_i	δ_i	K_i	$\frac{\delta_{ii}}{\delta_4}$	$\delta_{ii}^{(1)}$	$\Delta i = \delta_{ii} - \delta_{ii-1}$	$V_{pi} = K_i \cdot \Delta i$	$V_{mi} = V_i - V_{pi}$	δ_{ei}
4	40	0.0176	8323	0.46	0.0081	0.0021	17.48	22.52	0.0114
3	70	0.0115	9397	0.34	0.0060	0.0032	30.07	39.93	0.0075
2	90	0.0059	14194	0.16	0.0028	0.0017	24.13	65.87	0.0039
1	100	0.0017	19387	0.06	0.0011	0.0011	21.33	78.67	0.0011

Nivel	Aplicación del crit. de converg.			Ciclo 2		Ciclo 3	
	$\delta_i - \delta_{ei}$	$\alpha = \frac{\delta_i - \delta_{ei}}{1 + \frac{\delta_i - \delta_{ei}}{\delta_{ii}}}$	$\beta = \frac{\delta_{ei} - \delta_{ii}}{\delta_{ei} - \delta_{ii}}$	$\delta_{ii}^{(2)} = \delta_{ii}^{(1)} + \frac{\beta}{\alpha}$	δ_{ei}	$\delta_{ii}^{(3)}$	δ_{ei}
4	0.0062	1.77	0.0033	0.0100	0.0098	0.0099	0.0099
3	0.0040	1.67	0.0015	0.0071	0.0065	0.0067	0.0065
2	0.0020	1.71	0.0011	0.0034	0.0034	0.0034	0.0034
1	0.0006	1.55	0.0000	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010

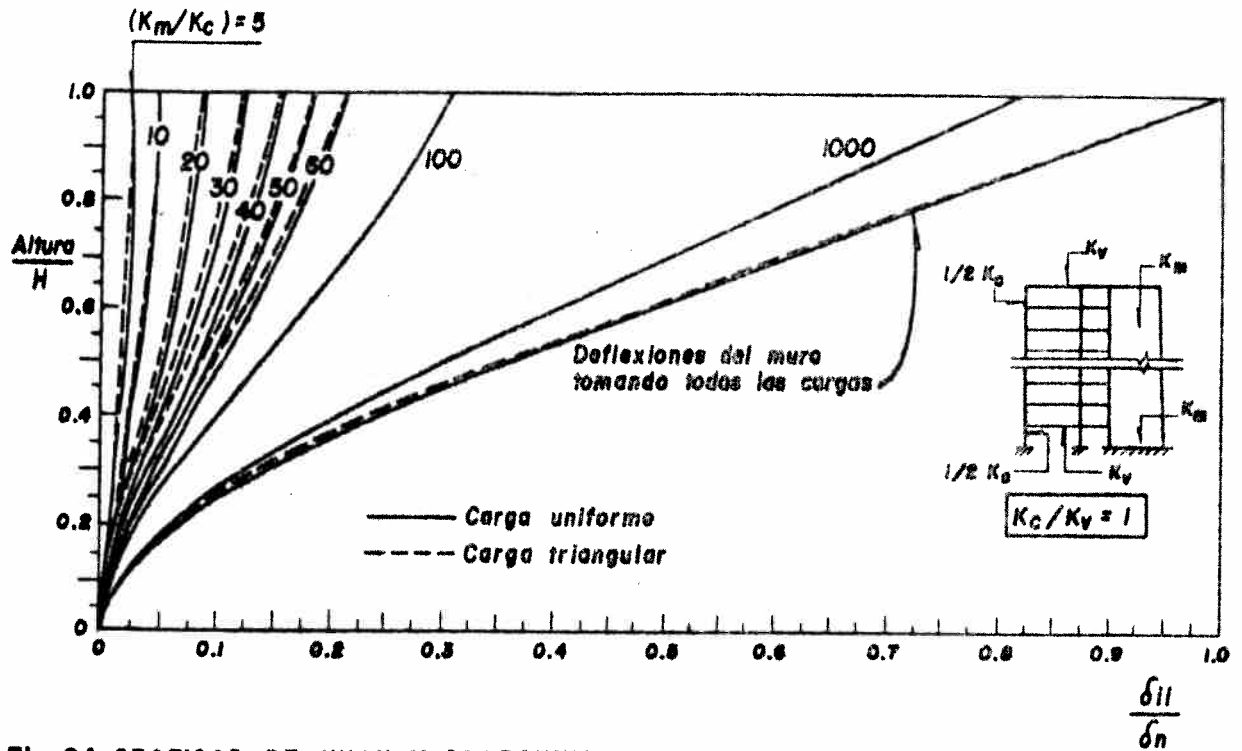


Fig. 24 GRAFICAS DE KHAN Y SBAROUNIS

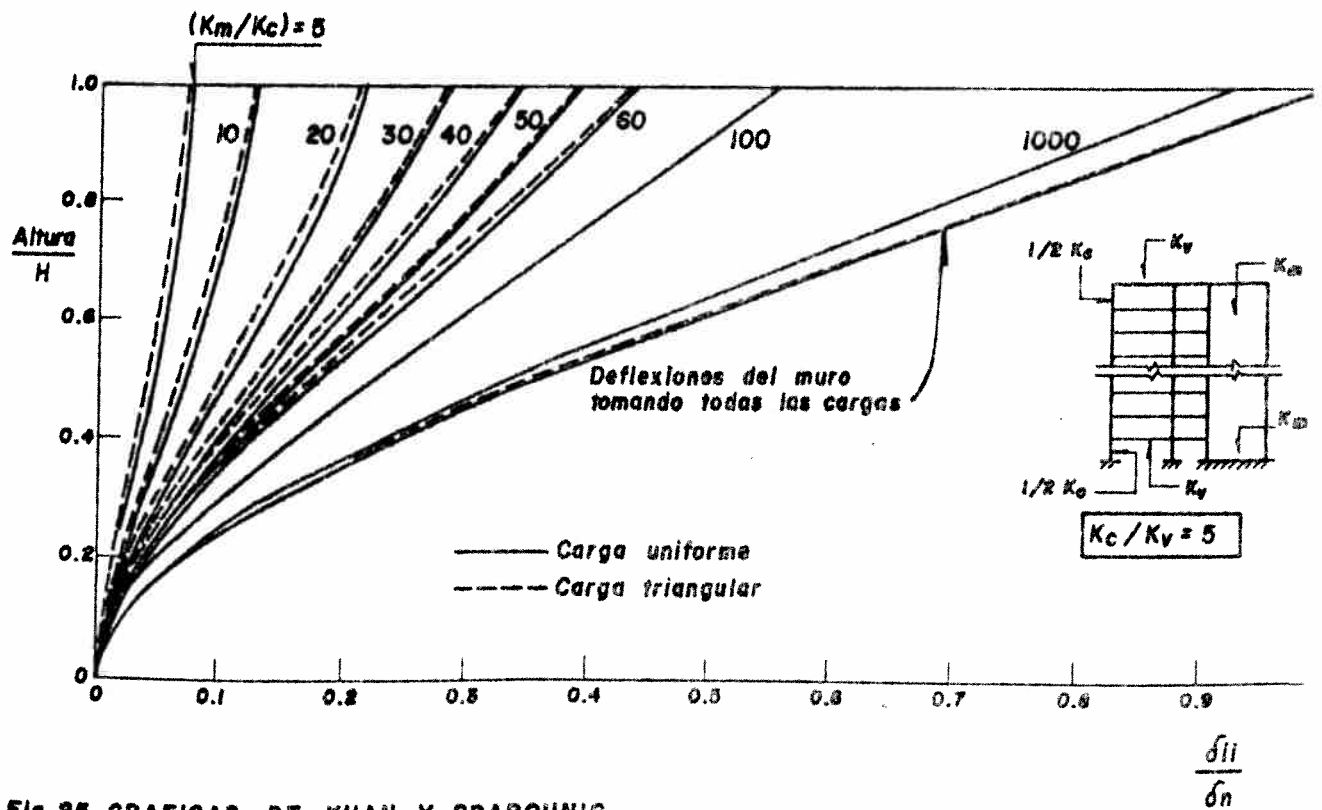
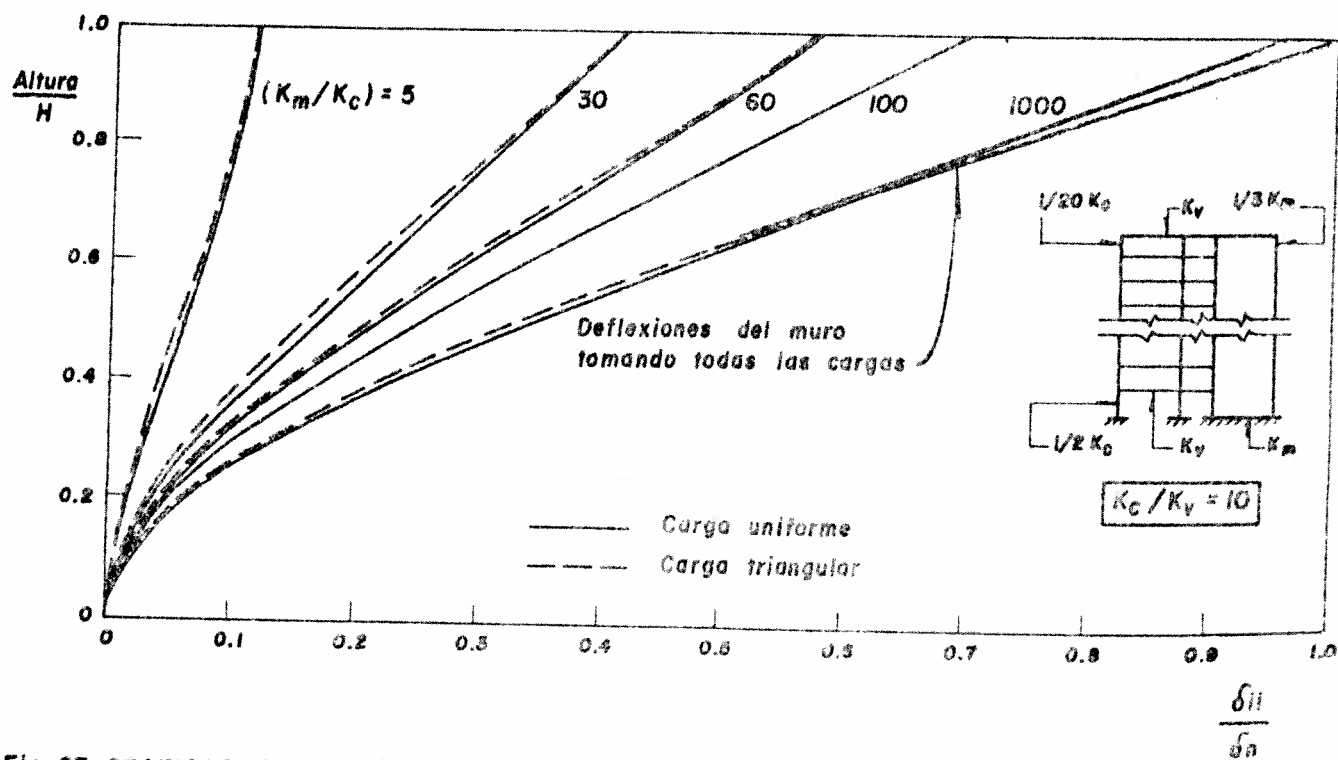
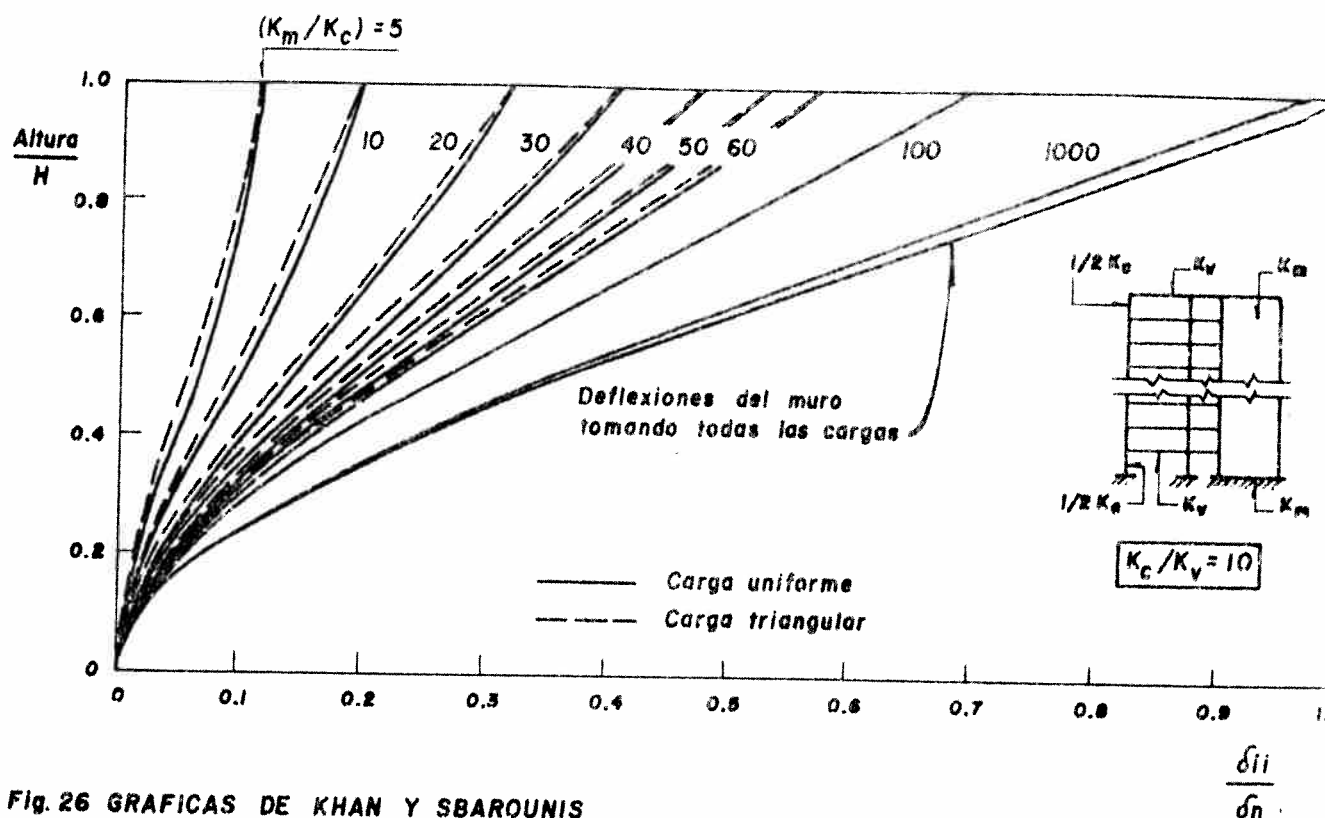


Fig. 25 GRAFICAS DE KHAN Y SBAROUNIS



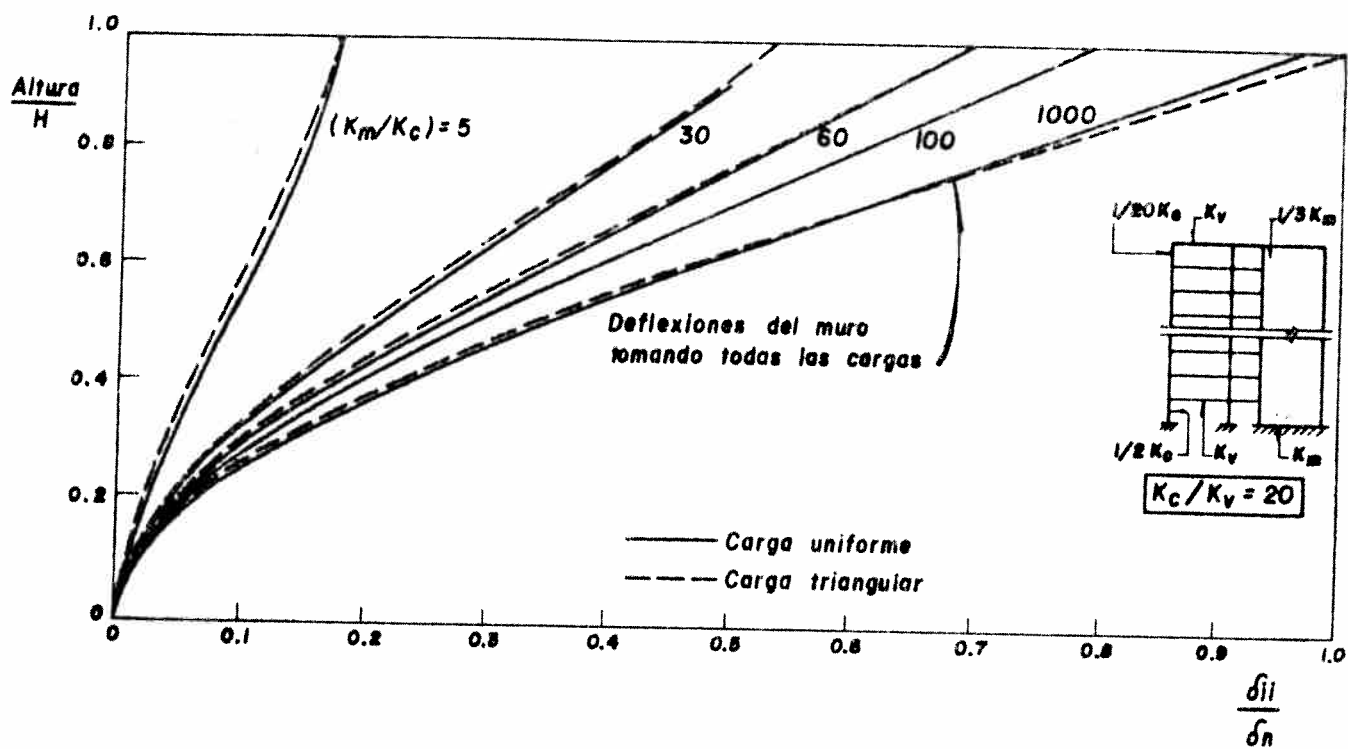


Fig. 28 GRAFICAS DE KHAN Y SBAROUNIS

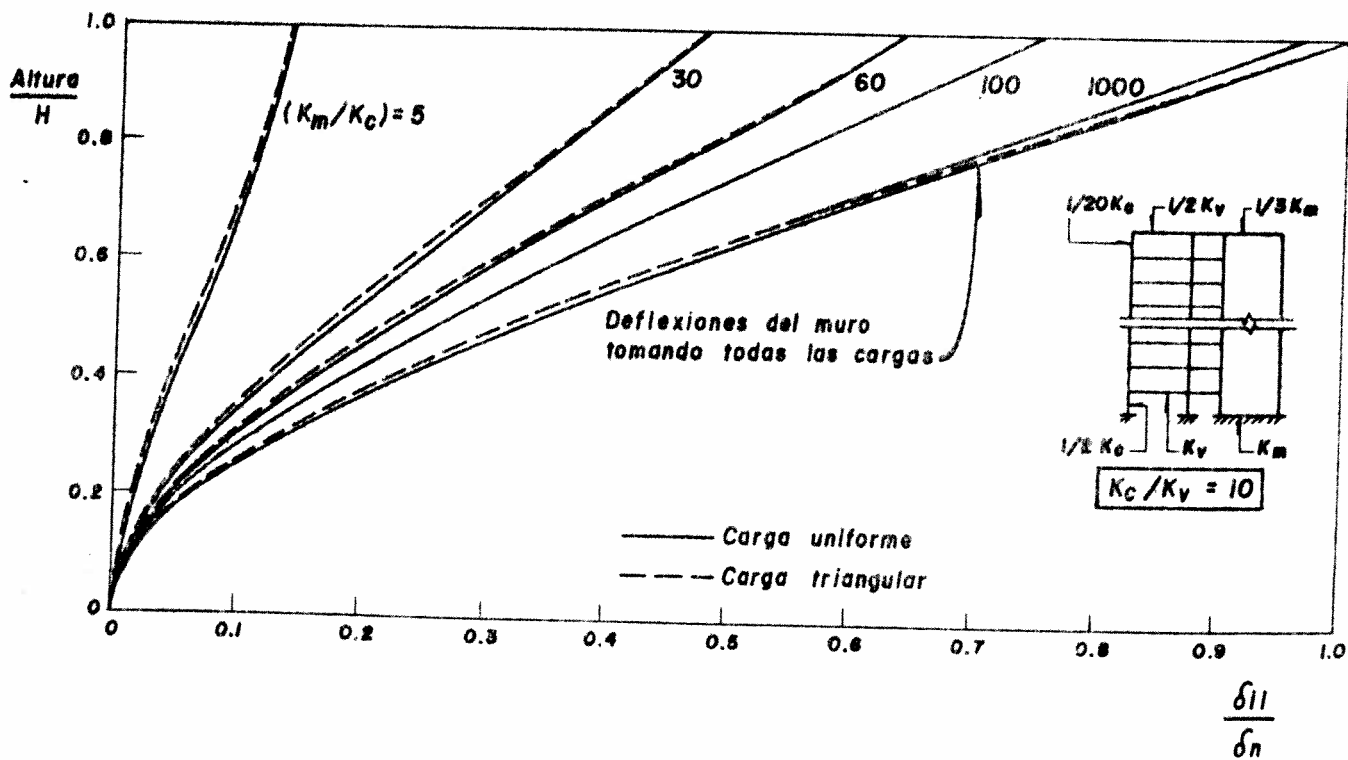


Fig. 29 GRAFICAS DE KHAN Y SBAROUNIS

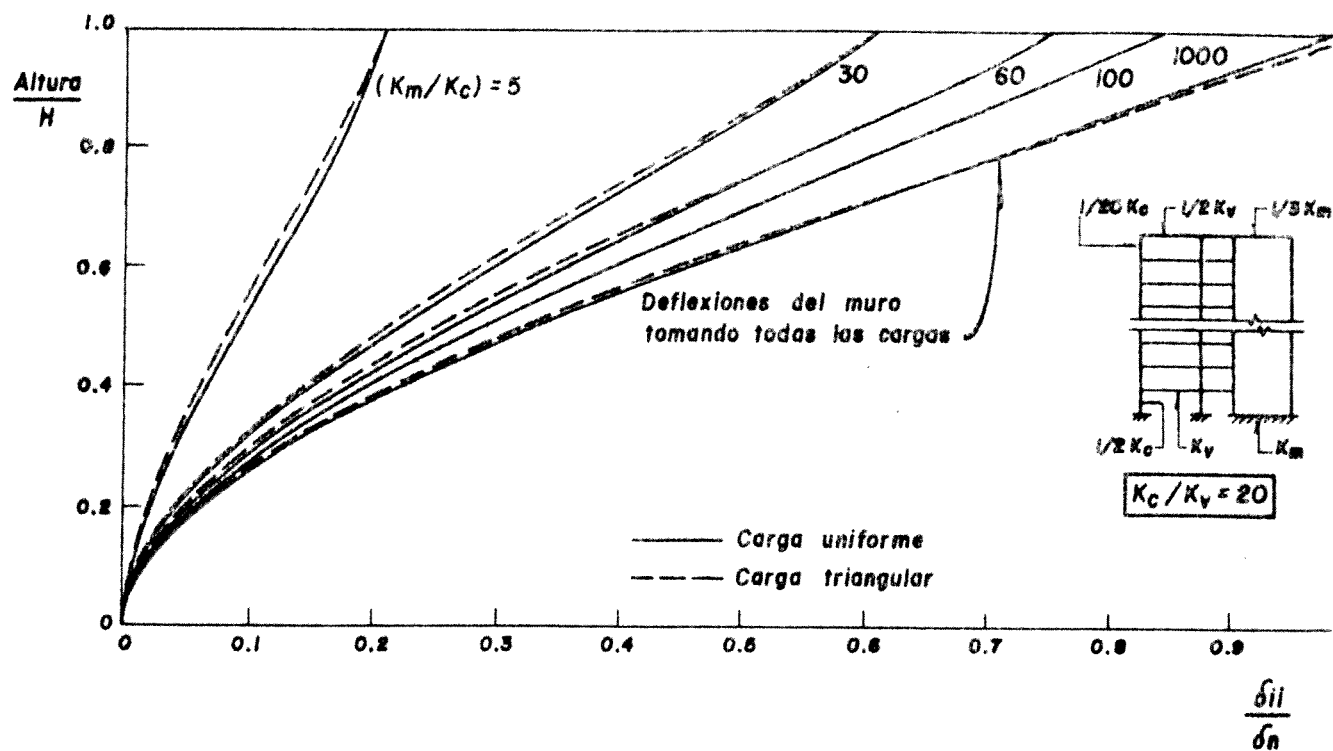


Fig. 30 GRAFICAS DE KHAN Y SBAROUNIS

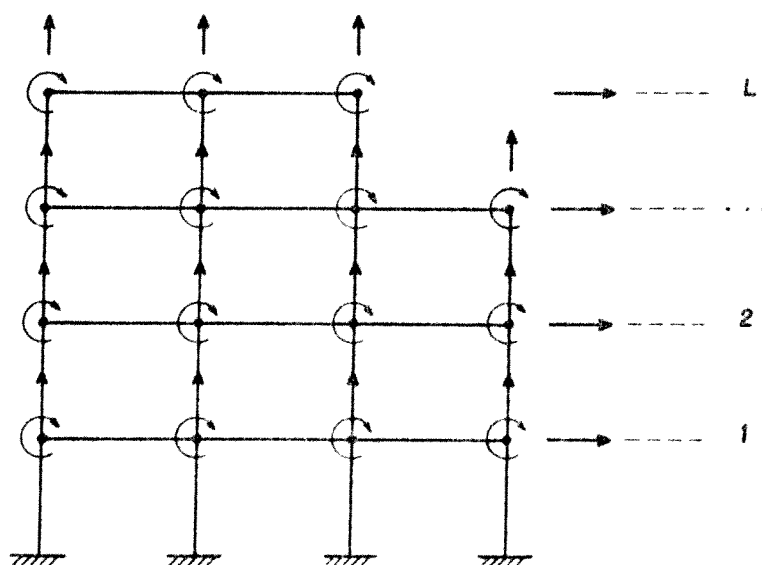


Fig. 31 GRADOS DE LIBERTAD DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL PLANO

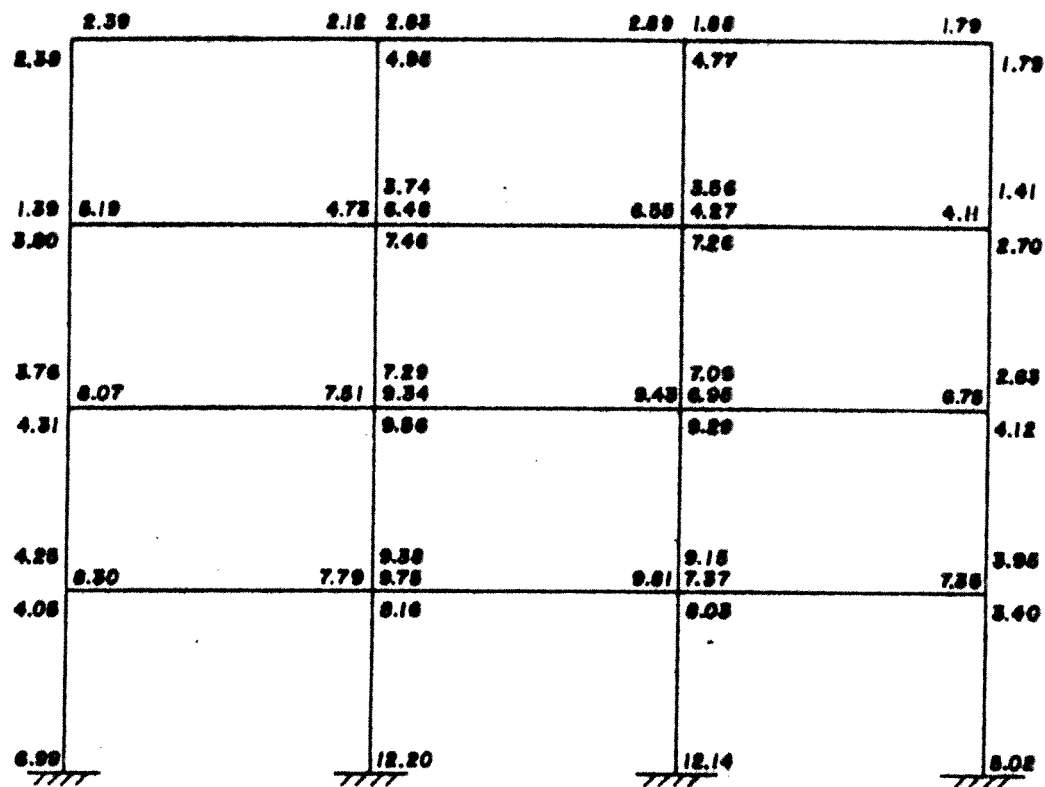
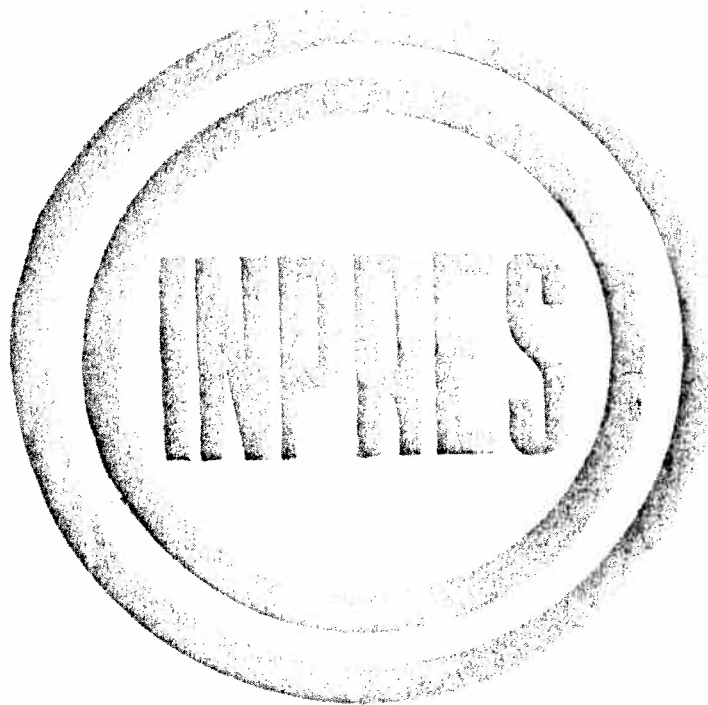


Figure 32 - APLICACION DEL METODO MATRICIAL

Piso	KHAN - SBAROUNIS	MATRICIAL
	δl (m)	δl (m)
4	0.0099	0.0098
3	0.0065	0.0064
2	0.0034	0.0034
1	0.0010	0.0010

Piso	KHAN - SBAROUNIS	MATRICIAL
	Vmi (t)	Vmi (t)
4	11.7	8.9
3	40.9	43.1
2	55.9	53.8
1	80.6	85.0

Tabla 5 - PRECISION DEL METODO DE KHAN Y SBAROUNIS



Dirección Postal:

Roger Balet 47 - Norte

5400 - San Juan

República Argentina

Teléfonos 230602 - 230603 - 230600 - 230163

Télex: 59129 INPRE-AR