

Resolución:

Se descarta que se trate de una columna zunchada dado que la separación entre estribos es mayor que 80 mm.

La cuantía geométrica de la armadura longitudinal vale 0,0348 por lo que se encuentra dentro de los límites reglamentarios.

El diámetro de los estribos es adecuado para el diámetro utilizado en las armaduras longitudinales mientras que la separación de 150 mm resulta menor que el menor valor entre:

$$\begin{aligned} 12 \cdot \text{menor } d_b \text{ longitudinal} &= 12 \cdot 16 \text{ mm} = 192 \text{ mm} \\ 48 \cdot d_{be} &= 48 \cdot 6 \text{ mm} = 288 \text{ mm} \\ \text{menor dimensión columna} &= 210 \text{ mm} \end{aligned}$$

La columna cumple entonces con las condiciones reglamentarias como para poder ser calculada como una columna simple.

$$\begin{aligned} P_u &= \phi \cdot P_{n(\text{máx})} = \phi \cdot 0,80 \cdot [0,85 \cdot f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + f_y \cdot A_{st}] \\ P_u &= \frac{0,65 \cdot 0,80 \cdot [0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot (34636 \text{ mm}^2 - 1206 \text{ mm}^2) + 420 \text{ MPa} \cdot 1206 \text{ mm}^2]}{1000 \frac{\text{mm}^2 \text{ MPa}}{\text{kN}}} \\ P_u &= 632,79 \text{ kN} \end{aligned}$$

recordando que

$$P_u = 632,79 \text{ kN} = \text{máximo entre} \begin{cases} 1,4 \cdot P_D = 1,4 \cdot 400 \text{ kN} = 560 \text{ kN} < P_u \\ 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L \end{cases}$$

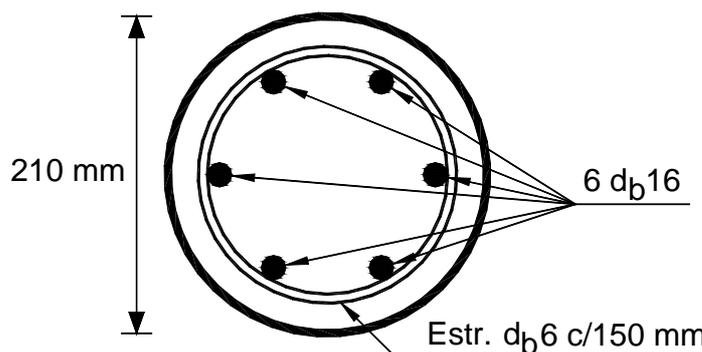
resulta que debe ser

$$P_u = 632,79 \text{ kN} = 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L = 1,2 \cdot 400 \text{ kN} + 1,6 \cdot P_L$$

de donde

$$P_L = \frac{P_u - 1,2 \cdot P_D}{1,6} = \frac{632,79 \text{ kN} - 1,2 \cdot 400 \text{ kN}}{1,6} = 95,49 \text{ kN}$$

Armado:



Ejemplo 5.VI

Enunciado: Proyectar una columna simple y otra zunchada, ambas de sección circular, para las siguientes condiciones:

Materiales: - Hormigón: H-30 ($f'_c = 30$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = f_{yt} = 420$ MPa)

Sección transversal: - A determinar

Estribos: - Recubrimiento: $c_c = 40$ mm
 - Diámetro: a determinar
 - Separación: a determinar

Armadura longitudinal: - A determinar

Solicitación: - $P_D = 380$ kN ; $P_L = 500$ kN

Resolución:

Para ambas soluciones se tendrá: $P_u = 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L$
 $P_u = 1,2 \cdot 380$ kN + $1,6 \cdot 500$ kN = 1256 kN

a) Columna simple:

$$P_n = P_u / (0,80 \cdot \phi) = 1256 \text{ kN} / (0,80 \cdot 0,65) = 2415 \text{ kN}$$

Se adopta una cuantía geométrica " $\rho = 0,02$ " por lo que resulta:

$$A_g = \frac{P_n}{0,85 \cdot f'_c + \rho \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)}$$

$$A_g = \frac{2415 \text{ kN}}{0,85 \cdot 30 \text{ MPa} + 0,020 \cdot (420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 30 \text{ MPa})} \cdot 1000 \frac{\text{mm}^2 \text{ MPa}}{\text{kN}}$$

$$A_g = 72327 \text{ mm}^2 \quad (723,27 \text{ cm}^2)$$

Se adopta una columna circular de 300 mm de diámetro con lo que resulta $A_g = 70686$ mm² (706,86 cm²) y la armadura se obtiene como:

$$A_{st} = \frac{(P_n - 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g)}{f_y - 0,85 \cdot f'_c}$$

$$A_{st} = \frac{\left(2415 \text{ kN} \cdot \frac{1 \text{ MN}}{1000 \text{ kN}} - 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} \cdot 70686 \text{ mm}^2 \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^6 \text{ mm}^2} \right)}{420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 30 \text{ MPa}} \cdot 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}$$

$$A_{st} = 1552 \text{ mm}^2 \quad (15,52 \text{ cm}^2)$$

Para la armadura longitudinal se adopta: $8 \cdot d_b 16 = 8 \cdot 201 \text{ mm}^2 = 1608 \text{ mm}^2$ (16,08 cm²)

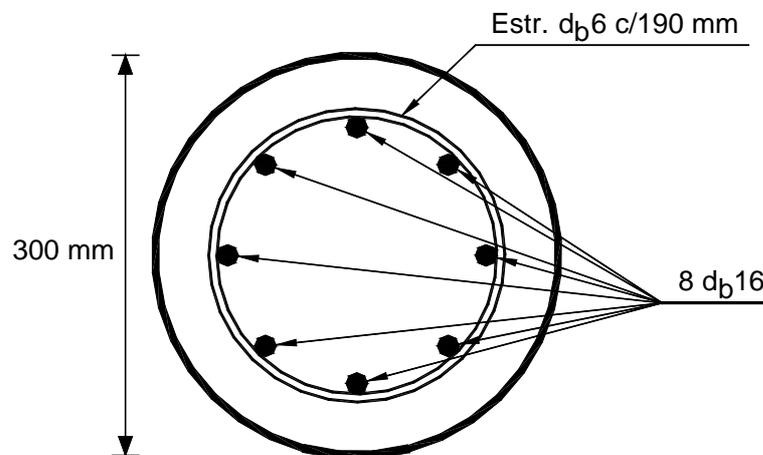
Lo que conduce a una cuantía: $\rho = 1608 \text{ mm}^2 / 70686 \text{ mm}^2 = 0,023$

En función del diámetro de las barras longitudinales corresponde adoptar un estriado de 6 mm de diámetro con una separación igual al menor valor entre:

$$\begin{aligned} 12 \cdot d_b \text{ longitudinal} &= 12 \cdot 16 \text{ mm} = 192 \text{ mm} \\ 48 \cdot d_{be} &= 48 \cdot 6 \text{ mm} = 288 \text{ mm} \\ \text{menor dimensión columna} &= 300 \text{ mm} \end{aligned}$$

es decir, 190 mm.

Armado:



b) Columna zunchada:

$$P_n = P_u / (0,85 \cdot \phi) = 1256 \text{ kN} / (0,85 \cdot 0,70) = 2110,92 \text{ kN}$$

Se adopta la misma sección de hormigón que para el caso de la columna simple:

$$A_g = 70686 \text{ mm}^2 \text{ (706,86 cm}^2\text{)}$$

$$A_{st} = \frac{(P_n - 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g)}{f_y - 0,85 \cdot f'_c}$$

$$A_{st} = \frac{\left(2110,92 \text{ kN} \cdot \frac{1}{1000} \frac{\text{MN}}{\text{kN}} - 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} \cdot 70686 \text{ mm}^2 \cdot \frac{1}{10^6} \frac{\text{m}^2}{\text{mm}^2} \right)}{420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 30 \text{ MPa}} \cdot 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}$$

$$A_{st} = 781 \text{ mm}^2 \text{ (7,81 cm}^2\text{)}$$

que conduce a una cuantía de 0,011 que se encuentra dentro de los límites reglamentarios. Para tal sección se adopta: $8 \cdot d_b 12 = 8 \cdot 113 \text{ mm}^2 = 904 \text{ mm}^2$ (9,04 cm²)

La cuantía de zunchado debe verificar:

$$\rho_s \geq 0,45 \cdot \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \cdot \frac{f'_c}{f_{yt}} = 0,45 \cdot \left(\frac{70686 \text{ mm}^2}{38013 \text{ mm}^2} - 1 \right) \cdot \frac{30 \text{ MPa}}{420 \text{ MPa}} = 0,0276$$

siendo en este caso: $A_{ch} = \frac{\pi \cdot h_c^2}{4} = 38013 \text{ mm}^2 \quad (380,13 \text{ cm}^2)$

con $h_c = D - 2 \cdot c_c = 300 \text{ mm} - 2 \cdot 40 \text{ mm} = 220 \text{ mm}$

Recordando que:

$$\rho_s = 4 \cdot A_{sp} / (s \cdot h_c) \quad \text{queda} \quad A_{sp} / s = \rho_s \cdot h_c / 4 = 1520 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (15,20 \text{ cm}^2/\text{m})$$

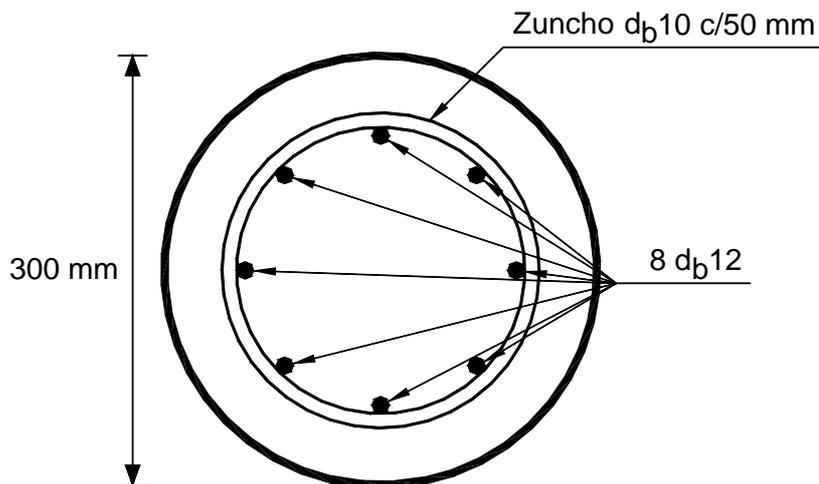
Se adopta el diámetro mínimo reglamentario para zunchos es decir, 10 mm.

La separación se calcula como: $s = 78,5 \text{ mm}^2 / (1520 \text{ mm}^2/\text{m}) = 0,05 \text{ m} = 50 \text{ mm}$

La separación anterior verifica:

$$s \begin{cases} \leq 80 \text{ mm} \\ \geq 25 \text{ mm} \\ \geq 1,33 \text{ del tamaño máximo del agregado grueso a utilizar} \end{cases}$$

Armado:



c) Comparación (pesos de armaduras teóricas)

Se comparará el peso teórico de armadura por metro de columna.

Teniendo en cuenta que la densidad del acero es $7,85 \text{ kg} / \text{dm}^3$, el peso por metro de una barra de acero de área A_s será igual a:

$$0,00785 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{mm}^2} \cdot A_s \text{ (mm}^2\text{)}$$

Para la columna simple:

Armadura longitudinal: El peso de acero de armadura longitudinal, para un metro de columna vale, siendo $A_{st} = 1552 \text{ mm}^2$

$$\text{Peso Arm. longitudinal} = 0,00785 \text{ kg/mm}^2/\text{m} \cdot 1552 \text{ mm}^2 = 12,18 \text{ kg/m}$$

Armadura transversal (estribos): En este caso hay que evaluar la longitud de estribos para un metro de columna. Considerando que el diámetro del eje de los estribos vale 220 mm, y sumando unos 100 mm para considerar el anclaje de cada estribo, su longitud es igual a : $\pi \cdot 220 \text{ mm} + 100 \text{ mm} = 790 \text{ mm}$; y por metro se tienen:
 $1 \text{ m} / 0,26 \text{ m} = 3,85$ estribos. De manera tal que:

$$\text{Peso estribos} = 0,00785 \text{ kg/mm}^2/\text{m} \cdot 28,3 \text{ mm}^2 \cdot 790 \text{ mm/estr} \cdot 3,85 \text{ estr/m} = 0,68 \text{ kg/m}$$

→ Peso total de acero en la columna simple: 12,86 kg/m

Para la columna zunchada:

Armadura longitudinal: El peso de acero de armadura longitudinal, siendo $A_{st} = 781 \text{ mm}^2$ es igual a:

$$\text{Peso Arm. longitudinal} = 0,00785 \text{ kg/mm}^2/\text{m} \cdot 781 \text{ mm}^2 = 6,13 \text{ kg/m}$$

Armadura transversal (zuncho): De manera simplificada, se evaluará la sección de zuncho (ya expresada en mm^2/m) con una longitud igual al perímetro del eje medio del zuncho, que vale 220 mm, es decir que su longitud es igual a : $\pi \cdot 220 \text{ mm} = 691 \text{ mm} = 0,691 \text{ m}$; y entonces

$$\text{Peso zunchos} = 0,00785 \text{ kg/mm}^2/\text{m} \cdot 1520 \text{ mm}^2/\text{m} \cdot 0,691 \text{ m} = 8,25 \text{ kg/m}$$

→ Peso total de acero en la columna zunchada: 14,38 kg/m

Como puede apreciarse, para las condiciones del ejemplo, la columna zunchada presenta un mayor consumo de acero que la columna simple. Esto se debe al particular enfoque que tiene el Reglamento en lo referente a este tipo de columnas y a su seguridad (no se permite que el zunchado incremente la capacidad resistente de la columna –sólo compensa la pérdida de resistencia producida por el descascaramiento– y no existen coeficientes de reducción de resistencia diferenciados entre el descascaramiento y la rotura de la columna zunchada).

Ejemplo 5.VII

Enunciado: Calcular las armaduras de una columna simple para las siguientes condiciones

- Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)
- Sección transversal: - $b_x = 250$ mm ; $b_y = 300$ mm
- Estribos: - Recubrimiento = 20 mm
 - Diámetro: a definir
- Armadura longitudinal: - A definir
- Solicitación: - $P_D = 200$ kN ; $P_L =$ a) 350 kN b) 100 kN

Resolución:

$$\text{a) } P_u = \text{máximo entre } \begin{cases} 1,4 \cdot P_D = 1,4 \cdot 200 \text{ kN} = 280 \text{ kN} \\ 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L = 1,2 \cdot 200 \text{ kN} + 1,6 \cdot 350 \text{ kN} = 800 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_u = 800 \text{ kN}$$

$$P_n = P_u / (0,80 \cdot \phi) = 800 \text{ kN} / (0,80 \cdot 0,65) = 1538,46 \text{ kN}$$

$$A_{st} = \frac{(P_n - 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g)}{f_y - 0,85 \cdot f'_c}$$

$$A_{st} = \frac{\left(1538,46 \text{ kN} \cdot \frac{1 \text{ MN}}{1000 \text{ kN}} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 300 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^6 \text{ mm}^2} \right)}{420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa}} \cdot 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}$$

$$A_{st} = 653,75 \text{ mm}^2 \quad (6,54 \text{ cm}^2)$$

$$\Rightarrow \rho = 653,75 \text{ mm}^2 / (250 \text{ mm} \cdot 300 \text{ mm}) = 0,009$$

Por lo que no verifica cuantía mínima ($\rho_{\text{mín}} = 0,01$) y se procede a calcular el área efectiva reducida necesaria para resistir " P_u " con cuantía mínima:

$$\begin{aligned} \text{Área efectiva reducida} &= P_n / [0,85 \cdot f'_c + \rho \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)] = \\ &= \frac{1538,46 \text{ kN}}{0,85 \cdot 20 \text{ MPa} + 0,01 \cdot (420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa})} \cdot 1000 \frac{\text{kN mm}^2}{\text{MN m}^2} \end{aligned}$$

$$\text{Área efectiva reducida} = 73155 \text{ mm}^2 \quad (731,55 \text{ cm}^2) \quad > \quad A_g / 2 = 37500 \text{ mm}^2$$

Por lo que se adopta una armadura longitudinal igual a la cuantía mínima aplicada al área efectiva mínima calculada anteriormente:

$$A_{st} = 0,01 \cdot 73155 \text{ mm}^2 = 731,55 \text{ mm}^2 \quad (7,31 \text{ cm}^2)$$

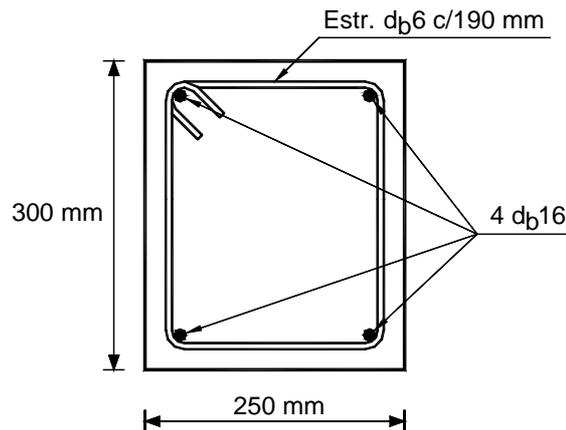
Se adopta la siguiente armadura:

$$A_{st} = 4 \cdot d_b16 = 804 \text{ mm}^2 \quad (8,04 \text{ cm}^2)$$

Estribos ADN 420: $d_b6 \text{ c}/190 \text{ mm}$

La separación de los estribos se determina según CIRSOC 201-2005 artículo 7.10.5.2.

Armado:



$$b) \quad P_u = \text{máximo entre} \quad \begin{cases} 1,4 \cdot P_D = 1,4 \cdot 200 \text{ kN} = 280 \text{ kN} \\ 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L = 1,2 \cdot 200 \text{ kN} + 1,6 \cdot 100 \text{ kN} = 400 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_u = 400 \text{ kN}$$

$$P_n = P_u / (0,80 \cdot \phi) = 400 \text{ kN} / (0,80 \cdot 0,65) = 769,23 \text{ kN}$$

$$A_{st} = \frac{(P_n - 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g)}{f_y - 0,85 \cdot f'_c}$$

$$A_{st} = \frac{\left(769,23 \text{ kN} \cdot \frac{1 \text{ MN}}{1000 \text{ kN}} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 300 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^6 \text{ mm}^2} \right)}{420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa}} \cdot 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}$$

$$A_{st} < 0 \text{ mm}^2$$

Por lo que no verifica cuantía mínima ($\rho_{\text{mín}} = 0,01$) y se procede a calcular el área efectiva reducida necesaria para resistir " P_u " con cuantía mínima:

$$\begin{aligned} \text{Área efectiva reducida} &= P_n / [0,85 \cdot f'_c + \rho \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)] = \\ &= \frac{769,23 \text{ kN}}{0,85 \cdot 20 \text{ MPa} + 0,01 \cdot (420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa})} \cdot 1000 \frac{\text{kN}}{\text{MN}} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

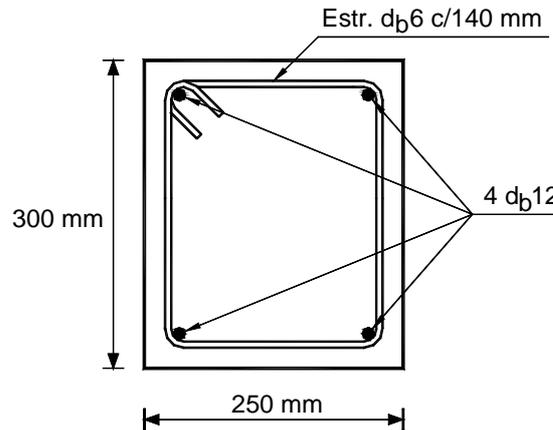
$$\text{Área efectiva reducida} = 36578 \text{ mm}^2 \text{ (365,78 cm}^2\text{)} < A_g / 2 = 37500 \text{ mm}^2$$

Por lo que se adopta una armadura longitudinal igual a la cuantía mínima aplicada al área efectiva mínima calculada anteriormente:

$$A_{st} = 0,01 \cdot 37500 \text{ mm}^2 = 375 \text{ mm}^2 \text{ (3,75 cm}^2\text{)}$$

Se adopta la siguiente armadura: $A_{st} = 4 \cdot d_b 12 = 452 \text{ mm}^2 \text{ (4,52 cm}^2\text{)}$ (dif. +20,5%)
 Estribos ADN 420: $d_b 6 \text{ c}/140 \text{ mm}$
La separación de los estribos se determina según CIRSOC 201-2005 artículo 7.10.5.2

Armado:



Conclusiones

Cuando se presentan problemas en los que el área de hormigón está fija y la cuantía resultante del cálculo es menor que la mínima, el área de armadura puede determinarse de la siguiente forma:

$$A_{st \text{ mín}} = \text{máximo} (0,01 \cdot P_n / [0,85 \cdot f'_c + 0,01 \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)] ; 0,01 \cdot A_g / 2) =$$

$$A_{st \text{ mín}} = \text{máximo} (P_n / [84,15 \cdot f'_c + f_y] ; 0,005 \cdot A_g)$$

Ejemplo 5.VIII

Enunciado: Calcular “ P_u ” para la siguiente columna

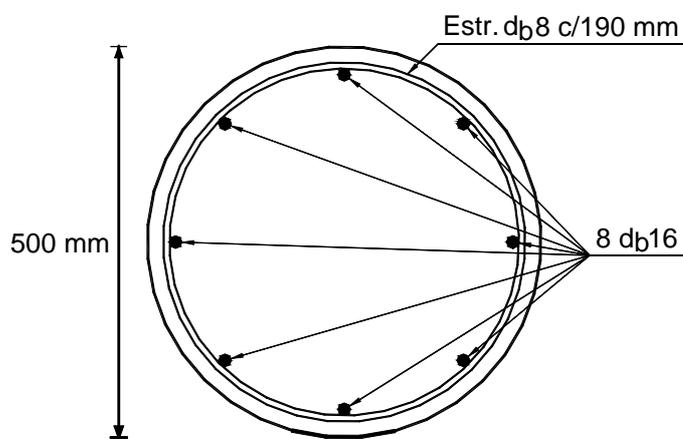
Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

Sección transversal: - Circular de 500 mm de diámetro

Estribos: - Recubrimiento = 20 mm
 - Diámetro: 8 mm
 - Separación: 190 mm

Armadura longitudinal: - $8 \cdot d_b16 = 1608 \text{ mm}^2$ ($16,08 \text{ cm}^2$)

Armado:



Resolución:

La separación de estribos es mayor que 80 mm por lo que no se trata de una columna zunchada.

El diámetro de los estribos es mayor que 6 mm por lo que resulta adecuado. La separación de estribos también cumple con los requisitos reglamentarios por lo que puede continuarse el cálculo como columna simple.

La cuantía geométrica vale: $\rho = 1608 \text{ mm}^2 / 196350 \text{ mm}^2 = 0,0082$ por lo que, en principio, no verifica cuantía mínima.

Dado que la cuantía resulta superior a 0,005 ($A_{st} > 0,01 \cdot A_g / 2$), calcularemos “ P_u ” a partir de la resistencia que produce la cuantía mínima aplicada al área efectiva reducida.

$$\text{Área efectiva reducida} = 1608 \text{ mm}^2 / 0,01 = 160800 \text{ mm}^2$$

$$P_n = 0,85 \cdot f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + f_y \cdot A_{st} =$$

$$P_n = \frac{0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot (160800 \text{ mm}^2 - 1608 \text{ mm}^2) + 420 \text{ MPa} \cdot 1608 \text{ mm}^2}{1000 \frac{\text{MN}}{\text{kN}} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}} =$$

$$P_n = 3381,62 \text{ kN}$$

$$P_u = \phi \cdot 0,80 \cdot P_n = 0,65 \cdot 0,80 \cdot 3381,62 = 1758,44 \text{ kN}$$

Conclusiones

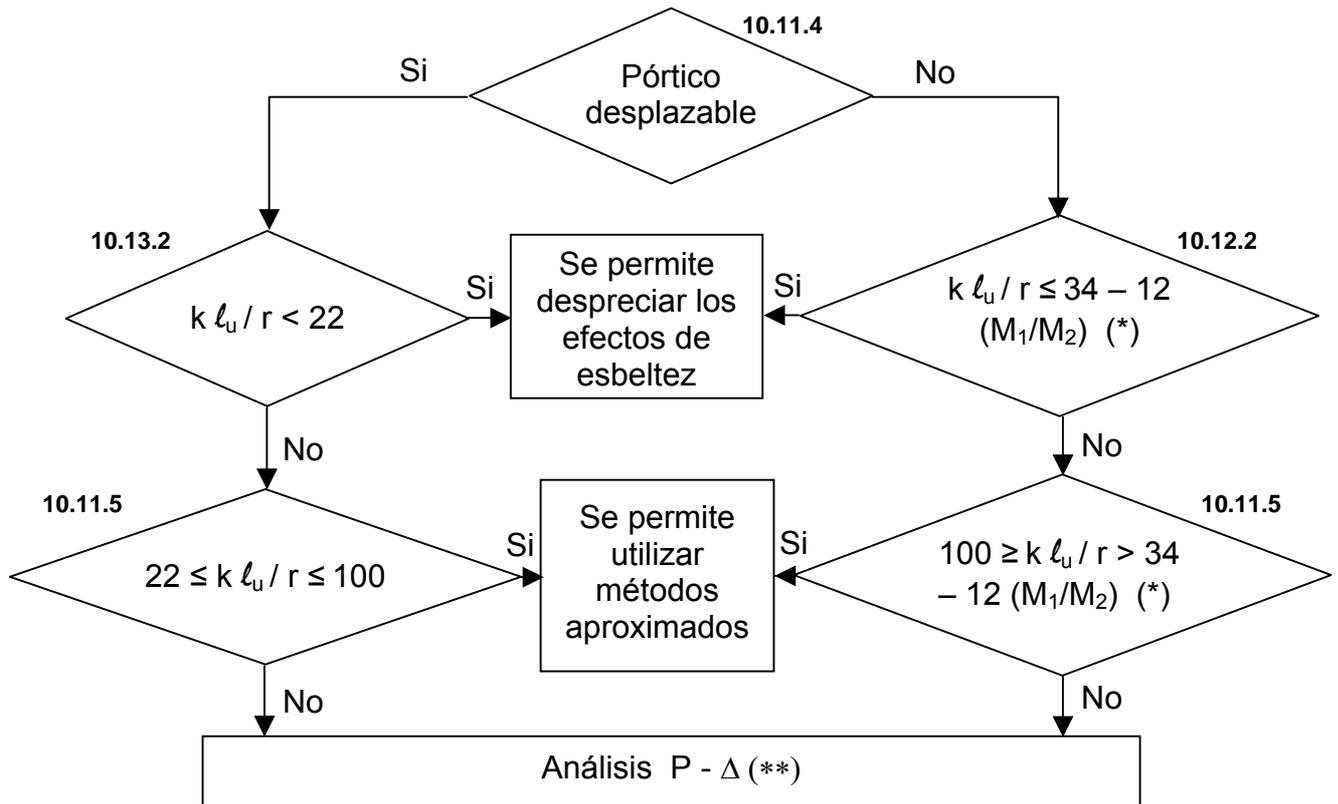
“A priori” puede decirse que una columna no es reglamentaria cuando su cuantía geométrica es menor que 0,005. Para cuantías mayores, y aplicando el criterio de suponer que la armadura existente corresponde a la cuantía mínima de un área efectiva reducida, se obtiene:

$$P_u = \phi \cdot 0,80 \cdot [0,85 \cdot f'_c \cdot (100 \cdot A_{st} - A_{st}) + f_y \cdot A_{st}] = 0,52 \cdot (84,15 \cdot f'_c + f_y) \cdot A_{st}$$

PANDEO EN ELEMENTOS PERTENECIENTES A ESTRUCTURAS CON NUDOS NO DESPLAZABLES

NOTA: Todo lo tratado en estas notas estará referido a estructuras con nodos no desplazables y no puede ser generalizado a estructuras con nodos desplazables.

6.1.- Esquema general para la consideración de los efectos de esbeltez



(*) $34 - 12 (M_1 / M_2) \leq 40$; (**) Se permite para cualquier relación de esbeltez

En los puntos siguientes se aclara el significado de cada uno de los términos utilizados en el diagrama anterior.

6.2.- Pórticos desplazables e indesplazables

El CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.4.1, indica que se puede suponer que los nudos extremos de una columna son indesplazables cuando los momentos de primer orden en los extremos de la misma experimentan un incremento menor o igual al 5% al considerar los efectos de segundo orden. Dado que esta verificación es bastante laboriosa de efectuar, propone la siguiente expresión aproximada (artículo 10.11.4.2, Exp (10-6)) cuya verificación permite suponer que un entrepiso de una estructura es indesplazable:

$$Q = \text{índice de estabilidad} = \Sigma P_u \Delta_o / (V_{us} \ell_c) \leq 0,05$$

donde

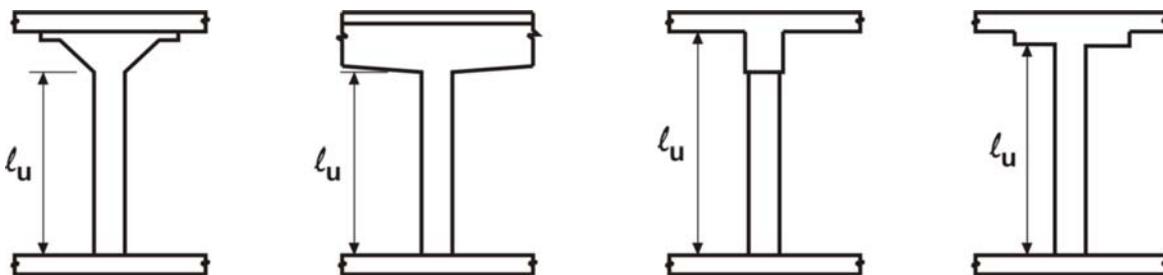
- ΣP_u = carga vertical total mayorada
- V_{us} = esfuerzo de corte horizontal total a nivel del piso considerado
- Δ_o = desplazamiento relativo de primer orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a V_{us}
- l_c = longitud del elemento comprimido en estudio medida entre los ejes de los nudos del pórtico

6.3.- Longitud efectiva: $l_e = k l_u$

Se denomina longitud efectiva a la longitud de la onda de pandeo que se utiliza para la determinación de la carga crítica de Euler. En estructuras con nodos indesplazables esta longitud está comprendida entre 0,5 y 1,0 veces la longitud “libre” o longitud sin apoyo lateral (l_u) de la pieza y en la mayoría de los casos se encuentra entre 0,75 y 0,90 veces dicha longitud dependiendo de la restricción al giro que impongan las condiciones de vínculo en los extremos superior e inferior.

6.3.1.- Longitud sin apoyo lateral (l_u)

Las longitudes sin apoyo lateral de una columna pueden ser diferentes según la dirección que se esté analizando. La siguiente figura resume los criterios propuestos por el CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.3.2.



6.3.2.- Factor de longitud efectiva para elementos comprimidos (k)

El CIRSOC 201-2005, artículo C10.12.1, propone en sus Comentarios dos métodos para la determinación de este coeficiente. El primero de ellos consiste en el uso de nomogramas y el segundo en el uso de expresiones analíticas. El primer método es fácil de utilizar pero poco práctico para el cálculo de un gran número de elementos. Asimismo es imposible incorporar los nomogramas a una planilla de cálculo (si bien no se encuentran transcriptas en el CIRSOC 201-2005 podrían utilizarse las fórmulas con las que fueron desarrollados aunque en su uso pueden presentarse algunos problemas de convergencia).

El segundo método consiste en la aplicación de expresiones originalmente expuestas en la normativa británica. Estas expresiones son sencillas de utilizar y pueden ser utilizadas en planillas de cálculo y programas pero pueden arrojar resultados excesivamente del lado seguro.

Se propone aquí la utilización de una expresión extraída de la Referencia (1). Esta expresión, **válida para estructuras con nodos indesplazables**, da resultados muy próximos a los que se obtienen al aplicar los nomogramas.

La expresión propuesta es:

$$k = 1 - 1 / (5 + 9 \Psi_A) - 1 / (5 + 9 \Psi_B) - 1 / (10 + \Psi_A \Psi_B)$$

donde los coeficientes “Ψ” para los extremos “A” (superior) y “B” (inferior) de la columna se definen como:

$$\Psi = [\sum EI / \ell_c]_{\text{columnas}} / [\sum EI / \ell]_{\text{vigas}}$$

En la expresión anterior “ℓ” es la longitud de cada una de las vigas que concurren al nudo tomadas entre ejes de apoyos.

En estructuras construidas con una única calidad de hormigón los módulos de elasticidad “E” se simplifican y desaparecen.

Para tener en cuenta la fisuración, el Reglamento indica que, en forma simplificada, los momentos de inercia a utilizar en las expresiones anteriores pueden tomarse como la siguiente fracción de los momentos de inercia correspondientes a las secciones brutas (I_g):

- a) Columnas: 0,70 I_{gc}
- b) Vigas: 0,35 I_g

Introduciendo la simplificación anterior y suponiendo un único hormigón queda:

$$\Psi = 2 [\sum I_{gc} / \ell_c]_{\text{columnas}} / [\sum I_g / \ell]_{\text{vigas}}$$

En el caso de fundaciones muy rígidas “Ψ” se aproxima a cero.

6.4.- Efectos de primer orden

Según el CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.1, las fuerzas axiales mayoradas, P_u , los momentos mayorados M_1 y M_2 en los extremos de la columna, y, cuando se requiera, la deformación lateral del piso Δ_o , se deben calcular por medio de un análisis elástico de primer orden del pórtico, considerando el efecto de las cargas axiales, la presencia de zonas fisuradas a lo largo del elemento y los efectos de la duración de las cargas en las propiedades de la sección. Como alternativa, se permite utilizar las siguientes propiedades de los elementos de la estructura:

	Módulo de elasticidad	Momento de inercia	Área
Vigas	Según el artículo 8.5.1 del Reglamento	0,35 I _g	1,0 A _g
Columnas		0,70 I _g	
Tabiques no fisurados		0,70 I _g	
Tabiques fisurados		0,35 I _g	
Placas y losas planas		0,25 I _g	

Quando actúen cargas horizontales de larga duración (p.e. empujes) o cuando se efectúe las verificaciones de estabilidad, los momentos de inercia anteriores deben dividirse por el factor $(1 + \beta_d)$ donde:
 $\beta_d =$ máxima carga axial permanente calculada para cargas mayoradas / máxima carga axial total calculada para cargas mayoradas asociada a la combinación de cargas estudiada

Obtenidos los resultados del cálculo de primer orden se utilizará la siguiente nomenclatura:

$M_1 =$ el menor momento mayorado en uno de los extremos de un elemento comprimido, que será positivo si el elemento presenta curvatura simple, y negativo si tiene doble curvatura.

$M_2 =$ el mayor momento mayorado en uno de los extremos de un elemento comprimido, siempre positivo

Por otra parte, se fija el siguiente valor mínimo (artículo 10.12.3.2, Exp (10-14)):

$$M_{2,\min} = P_u \cdot (15 + 0,03 \cdot h)$$

donde

- 15 y h se expresan en milímetros
- P_u = esfuerzo axial calculado para cargas mayoradas

6.5.- Efectos de segundo orden a través de amplificación de momentos

Si se verifica que:

$$100 \geq k \ell_u / r > 34 - 12 (M_1 / M_2)$$

con

- $34 - 12 (M_1 / M_2) \leq 40$
- $r =$ radio de giro de la sección = $(I_g / A_g)^{1/2}$
- El CIRSOC 201-2005, artículo 10.11.2, permite adoptar $r = 0,3 h$ en secciones rectangulares de altura "h" y $r = 0,25 b_w$ en secciones circulares de diámetro "b_w".

el CIRSOC 201-2005, artículo 10.12.3 (Exp (10-8) a (10-12)), permite la consideración simplificada de los efectos de segundo orden utilizando en el dimensionamiento el siguiente momento flector:

$$M_c = \delta_{ns} \cdot M_2$$

siendo

$$\delta_{ns} = C_m / [1 - P_u / (0,75 \cdot P_c)] \geq 1$$

$$P_c = \text{carga crítica de Euler} = \pi^2 EI / (k \ell_u)^2$$

$$EI = \begin{cases} (0,2 E_c I_g + E_s I_{se}) / (1 + \beta_d) \\ \text{ó} \\ 0,4 E_c I_g / (1 + \beta_d) \end{cases}$$

donde

- E_c, E_s = módulos de elasticidad del hormigón y del acero
- I_g = momento de inercia baricéntrico de la sección bruta de hormigón
- I_{se} = momento de inercia de la armadura con respecto al eje baricéntrico de la sección transversal del elemento

La primera de las expresiones para el cálculo de “EI” es la más ajustada pero puede requerir de una serie de iteraciones dado que, si se está dimensionando, “ I_{se} ” es incógnita del problema. La segunda expresión puede utilizarse en forma directa pero puede dejar excesivamente del lado seguro para secciones con cuantías importantes.

Si sobre el elemento analizado no actúan cargas transversales se tendrá:

$$C_m = 0,60 + 0,40 M_1 / M_2 \geq 0,40 \quad (\text{artículo 10.12.3.1, Exp (10-13)})$$

Si actuaran cargas transversales entre sus apoyos (artículo 10.12.3.1) se tendrá: $C_m = 1$

6.6.- Amplificación de momentos en elementos sometidos a flexión compuesta oblicua

En estos casos, artículo 10.11.6, la amplificación de momentos se hace en forma independiente para cada una de las direcciones. Luego se dimensiona la sección a flexión compuesta oblicua actuando ambos momentos amplificados simultáneamente.

REFERENCIA

- (1) “K-Factor Equation to Alignment Charts for Column Design” by Lian Duan, Won-Sun King, and Wai-Fah Chen. ACI Structural Journal / May-June 1993.

PANDEO EN ELEMENTOS PERTENECIENTES A ESTRUCTURAS CON NUDOS NO DESPLAZABLES – EJEMPLOS

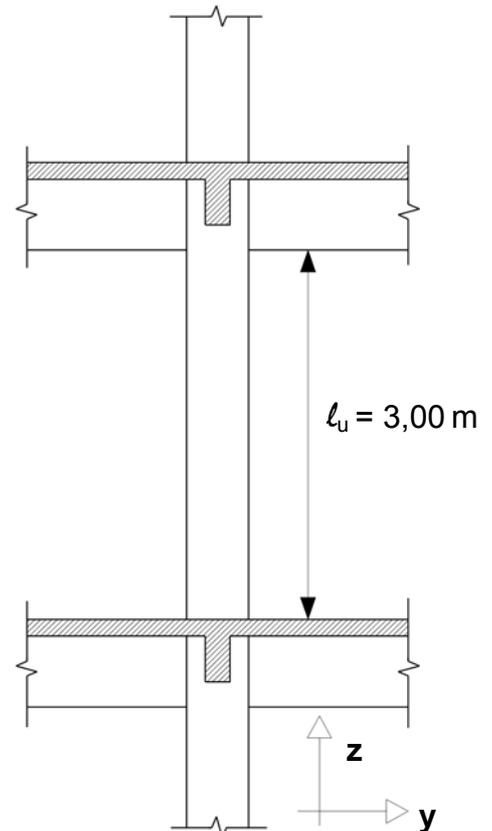
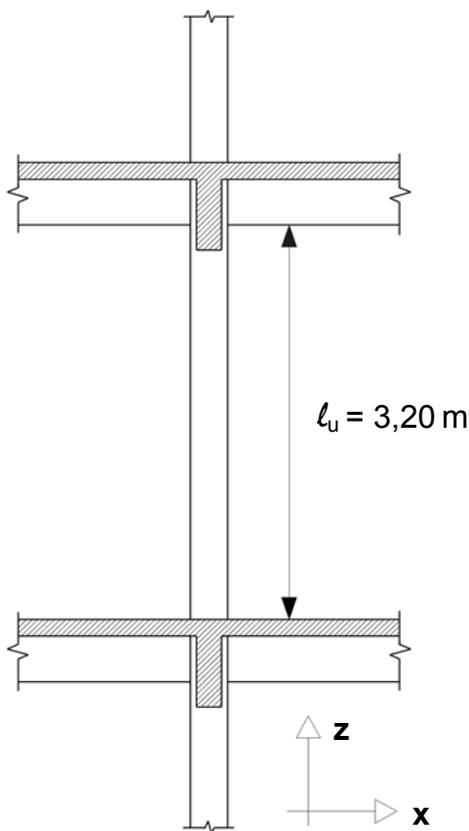
NOTA: Todo lo tratado en estos ejemplos estará referido a estructuras con nodos no desplazables y no puede ser generalizado a estructuras con nodos desplazables.

Ejemplo 6.I

Enunciado: Analizar el fenómeno de pandeo en la siguiente columna

Materiales:

- Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)



Secciones y luces:

- Columnas: $b_x = 0,25$ m ; $b_y = 0,50$ m
- Vigas según eje "x": $b = 0,15$ m ; $h = 0,50$ m ; $\ell_x = 5,00$ m
- Vigas según eje "y": $b = 0,20$ m ; $h = 0,70$ m ; $\ell_y = 6,00$ m

Cargas y deformaciones:

- $P_u = 1400$ kN ; (70% es permanente)
- Momentos nudo superior: $M_{ux} = 75$ kNm ; $M_{uy} = 35$ kNm
- Momentos nudo inferior: $M_{ux} = -39$ kNm ; $M_{uy} = -17,5$ kNm
- $\Sigma P_u =$ carga vertical total mayorada = 18000 kN

- V_{ux} = esfuerzo de corte horizontal total a nivel del piso considerado = 450 kN
- V_{uy} = esfuerzo de corte horizontal total a nivel del piso considerado = 330 kN
- Δ_{ox} = desplazamiento relativo de primer orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a $V_{ux} = 0,003$ m
- Δ_{oy} = desplazamiento relativo de primer orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a $V_{uy} = 0,002$ m

Resolución:

a) Nudos desplazables o indesplazables?

a.1) Verificación según la Dirección "x"

$$\ell_c = \ell_u + 0,50 = 3,20 \text{ m} + 0,50 = 3,70 \text{ m}$$

$$Q = \text{índice de estabilidad} = \sum P_u \Delta_o / (V_{us} \ell_c)$$

$$Q_x = 18000 \text{ kN} \cdot 0,003 \text{ m} / (450 \text{ kN} \cdot 3,70 \text{ m}) = 0,032 < 0,05$$

a.2) Verificación según la Dirección "y"

$$\ell_c = \ell_u + 0,70 = 3,00 \text{ m} + 0,70 = 3,70 \text{ m}$$

$$Q_y = 18000 \text{ kN} \cdot 0,002 \text{ m} / (330 \text{ kN} \cdot 3,70 \text{ m}) = 0,029 < 0,05$$

Por lo tanto la estructura puede considerarse de nodos indesplazables en ambas direcciones.

b) Cálculo de las longitudes efectivas y cálculo de esbelteces

b.1) Dirección "x"

$$\Psi = 2 \cdot [\sum I_{gc} / \ell_c]_{\text{columnas}} / [\sum I_g / \ell]_{\text{vigas}}$$

$$\text{Columnas: } I_{gc} = 0,50 \text{ m} \cdot (0,25 \text{ m})^3 / 12 = 6,51 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\text{Vigas: } I_g = 0,15 \text{ m} \cdot (0,50 \text{ m})^3 / 12 = 15,625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 6,51 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 3,70 \text{ m}] / (2 \cdot 15,625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 5 \text{ m}) = 1,126$$

$$k = 1 - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) - 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0,78$$

$$\ell_e = 0,78 \cdot 3,20 \text{ m} = 2,493 \text{ m}$$

$$r = \text{radio de giro} = b_x / 12^{1/2} = 0,25 \text{ m} / 12^{1/2} = 0,0722 \text{ m}$$

$$k \ell_u / r = \ell_e / r = 2,493 \text{ m} / 0,0722 \text{ m} = 34,5$$

b.2) Dirección “y”

$$\text{Columnas: } I_{gc} = 0,25 \text{ m} \cdot (0,50 \text{ m})^3 / 12 = 26,042 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\text{Vigas: } I_g = 0,20 \text{ m} \cdot (0,70 \text{ m})^3 / 12 = 57,167 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 26,042 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 3,70 \text{ m}] / (2 \cdot 57,167 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 6 \text{ m}) = 1,477$$

$$k = 1 - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) - 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0,81$$

$$\ell_e = 0,81 \cdot 3,00 \text{ m} = 2,426 \text{ m}$$

$$r = \text{radio de giro} = b_y / 12^{1/2} = 0,50 \text{ m} / 12^{1/2} = 0,144 \text{ m}$$

$$k \ell_u / r = \ell_e / r = 2,426 \text{ m} / 0,144 \text{ m} = 16,8$$

c) Es necesario considerar los efectos de segundo orden? Es válido el uso de métodos aproximados (Amplificación de momentos)?

c.1) Dirección “x”

$$M_1 = -17,5 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 35 \text{ kNm} > M_{2,\text{mín}} = P_u \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot h)$$

$$M_{2,\text{mín}} = 1400 \text{ kN} \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot 0,25 \text{ m}) = 31,5 \text{ kNm}$$

$$34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 - 12 \cdot (-17,5 \text{ kNm}) / 35 \text{ kNm} = 40$$

como

$$k \ell_u / r = 34,5 < 34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = 40$$

No es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección “x”

c.2) Dirección “y”

$$M_1 = -39 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 75 \text{ kNm} > M_{2,\text{mín}} = P_u \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot h)$$

$$M_{2,\text{mín}} = 1400 \text{ kN} \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot 0,50 \text{ m}) = 42 \text{ kNm}$$

$$34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 - 12 \cdot (-39 \text{ kNm}) / 75 \text{ kNm} = 40,24 \therefore \text{se adopta } 40$$

como

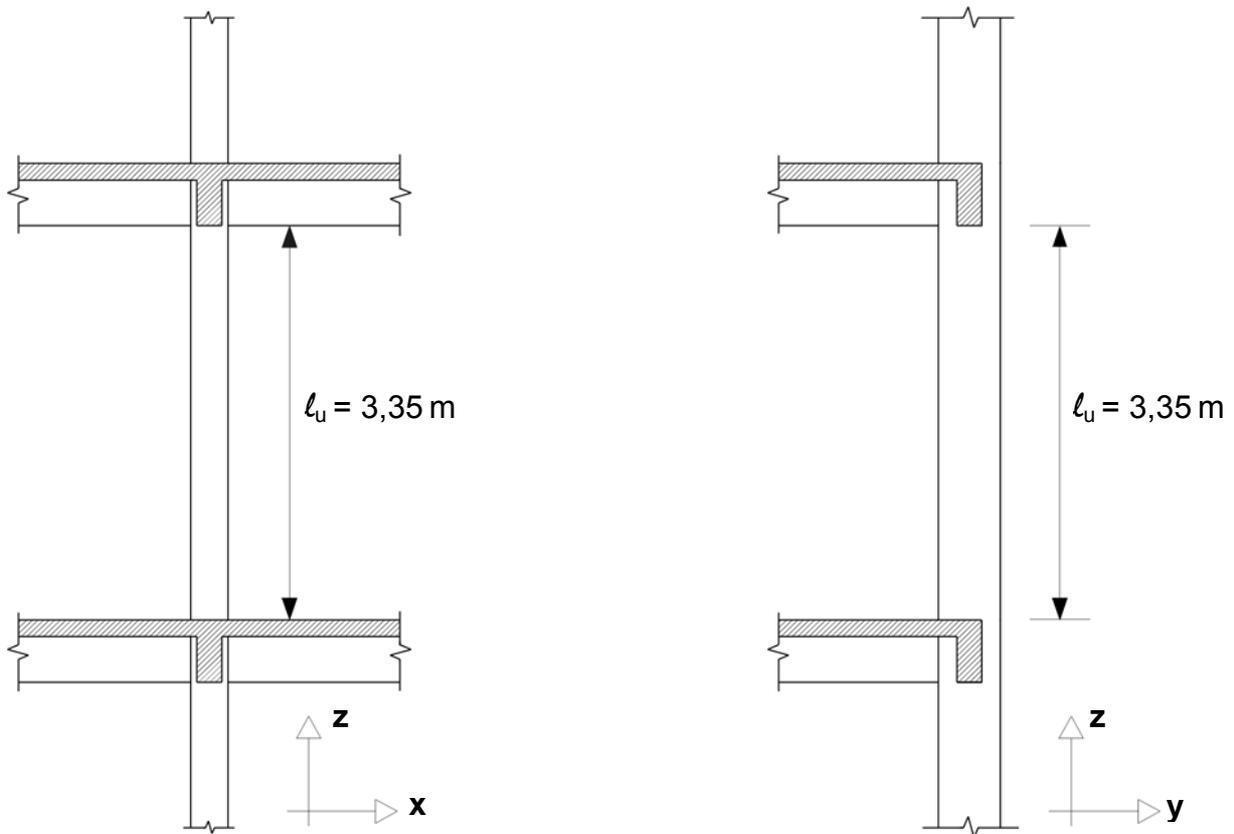
$$k \ell_u / r = 16,8 < 34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = \text{adoptado } 40$$

No es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección “y”

CONCLUSIÓN: Las armaduras de la columna se calculan directamente con las solicitaciones de primer orden.

Ejemplo 6.II

Enunciado: Calcular las armaduras de la siguiente columna. Adoptamos los materiales, las cargas y deformaciones del Ejemplo 6.I.



Secciones y luces:

- Columnas: $b_x = 0,20 \text{ m}$; $b_y = 0,40 \text{ m}$; $l_c = 3,7 \text{ m}$
- Vigas según eje "x": $b = 0,15 \text{ m}$; $h = 0,35 \text{ m}$; $l_x = 4,00 \text{ m}$
- Vigas según eje "y": $b = 0,15 \text{ m}$; $h = 0,35 \text{ m}$; $l_y = 4,00 \text{ m}$

Resolución:

a) Nudos desplazables o indesplazables?

Vale lo visto en el Ejemplo 6.I.

b) Cálculo de las longitudes efectivas y cálculo de esbelteces

b.1) Dirección "x"

$$\Psi = 2 \cdot [\sum I_{gc} / l_c]_{\text{columnas}} / [\sum I_g / l]_{\text{vigas}}$$

$$\text{Columnas: } I_{gc} = 0,40 \text{ m} \cdot (0,20 \text{ m})^3 / 12 = 2,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\text{Vigas: } I_g = 0,15 \cdot (0,35 \text{ m})^3 / 12 = 5,359 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 2,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 3,70 \text{ m}] / (2 \cdot 5,359 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 4,00 \text{ m}) = 1,076$$

$$k = 1 - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) - 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0,774$$

$$\ell_e = 0,774 \cdot (3,70 \text{ m} - 0,35 \text{ m}) = 2,593 \text{ m}$$

$$r = \text{radio de giro} = 0,30 \cdot b_x = 0,30 \cdot 0,20 \text{ m} = 0,06 \text{ m}$$

$$k \ell_u / r = \ell_e / r = 2,593 \text{ m} / 0,06 \text{ m} = 43,22$$

b.2) Dirección “y”

$$\text{Columnas: } I_{gc} = 0,20 \text{ m} \cdot (0,40 \text{ m})^3 / 12 = 10,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\text{Vigas: } I_g = 0,15 \text{ m} \cdot (0,35 \text{ m})^3 / 12 = 5,359 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\Psi_A = \Psi_B = 2 \cdot [2 \cdot 10,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 3,70 \text{ m}] / (1 \cdot 5,359 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 4,00 \text{ m}) = 8,607$$

$$k = 1 - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_A) - 1 / (5 + 9 \cdot \Psi_B) - 1 / (10 + \Psi_A \cdot \Psi_B) = 0,964$$

$$\ell_e = 0,964 \cdot (3,70 \text{ m} - 0,35 \text{ m}) = 3,229 \text{ m}$$

$$r = \text{radio de giro} = 0,30 \cdot b_y = 0,30 \cdot 0,40 \text{ m} = 0,12 \text{ m}$$

$$k \ell_u / r = \ell_e / r = 3,229 \text{ m} / 0,12 \text{ m} = 26,91$$

c) Es necesario considerar los efectos de segundo orden? Es válido el uso de métodos aproximados (Amplificación de momentos)?

c.1) Dirección “x”

$$M_1 = -17,5 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 35 \text{ kNm} > M_{2,\text{mín}} = P_u \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot h)$$

$$M_{2,\text{mín}} = 1400 \text{ kN} \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot 0,20 \text{ m}) = 29,4 \text{ kNm}$$

$$34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 - 12 \cdot (-17,5 \text{ kNm}) / 35 \text{ kNm} = 40$$

como

$$k \ell_u / r = 43,22 > 34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = 40$$

Es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección “x”

c.2) Dirección “y”

$$M_1 = -39 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 75 \text{ kNm} > M_{2,\text{mín}} = P_u \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot h)$$

$$M_{2,\text{mín}} = 1400 \text{ kN} \cdot (0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot 0,40 \text{ m}) = 37,8 \text{ kNm}$$

$$34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = 34 - 12 \cdot (-39 \text{ kNm}) / 75 \text{ kNm} = 40,24 \therefore \text{ se adopta } 40$$

como

$$k \ell_u / r = 26,91 < 34 - 12 \cdot (M_1/M_2) = 40$$

No es necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección “y”

CONCLUSIÓN: Sólo será necesario considerar los efectos de segundo orden según la dirección “x”.

d) Cálculo de momentos amplificados

d.1) C_m

Como no existen cargas transversales:

$$C_m = 0,60 + 0,40 \cdot (-17,5 \text{ kNm}) / 35 \text{ kNm} = 0,40$$

d.2) EI

Dado que no se conoce la armadura se puede utilizar la expresión:

$$EI = 0,40 E_c I_{gc} / (1 + \beta_d) = 0,40 \cdot 21019000 \text{ kN/m}^2 \cdot 2,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 / 1,7 =$$
$$EI = 1319 \text{ kNm}^2$$

siendo:

$$E_c = 4700 \cdot f'_c{}^{1/2} = 4700 \cdot 20^{1/2} \text{ MPa} = 21019 \text{ MPa}$$
$$I_{gc} = 0,40 \text{ m} \cdot (0,20 \text{ m})^3 / 12 = 2,667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$
$$\beta_d = 0,70 \cdot P_u / P_u = 0,70$$

d.3) P_c (carga crítica de Euler)

$$P_c = \pi^2 EI / (k \ell_u)^2 = \pi^2 \cdot 1319 \text{ kNm}^2 / (2,593 \text{ m})^2 = 1935 \text{ kN}$$

d.4) δ_{ns}

$$\delta_{ns} = C_m / [1 - P_u / (0,75 \cdot P_c)] = 0,40 / [1 - 1400 \text{ kN} / (0,75 \cdot 1935 \text{ kN})] = 11,281 > 1$$

d.5) Momento mayorado de cálculo

$$M_c = \delta_{ns} \cdot M_2 = 11,281 \cdot 35 \text{ kNm} = 394,84 \text{ kNm}$$

e) Solicitaciones finales

La columna deberá ser dimensionada entonces para las siguientes solicitaciones:

$$P_u = 1400 \text{ kN} \quad ; \quad M_{ux} = 75 \text{ kNm} \quad ; \quad M_{uy} = 394,84 \text{ kNm}$$

De aquí en adelante lo que sigue es un proceso de dimensionamiento a flexión compuesta oblicua ordinario.

BASES DE HORMIGÓN ARMADO

Construidas con hormigones H-30 y menores

7.1.- Generalidades

El Reglamento CIRSOC 201-2005, Capítulo 15, contempla solo las zapatas rectangulares de fundación. En nuestro medio, sin embargo, es muy común la construcción de bases que tienen su parte superior en forma tronco-piramidal. Las hipótesis generales que plantea el Reglamento para las zapatas rectangulares permiten encarar el análisis en flexión y punzonamiento de las zapatas tronco-piramidales con ajustes menores. No ocurre lo mismo en el caso del corte.

En particular se analizarán bases aisladas construidas con hormigones H-30 y menores ($f'_c \leq 30$ MPa) al sólo efecto de simplificar la secuencia de cálculo. La misma puede ser generalizada a otros hormigones con muy poco esfuerzo adicional.

Estas notas, las expresiones y los ejemplos desarrollados están basados en columnas y bases hormigonadas "in situ", construidas con hormigones de calidades similares y cubren los esquemas estructurales mostrados en la Figura 7.1.1.

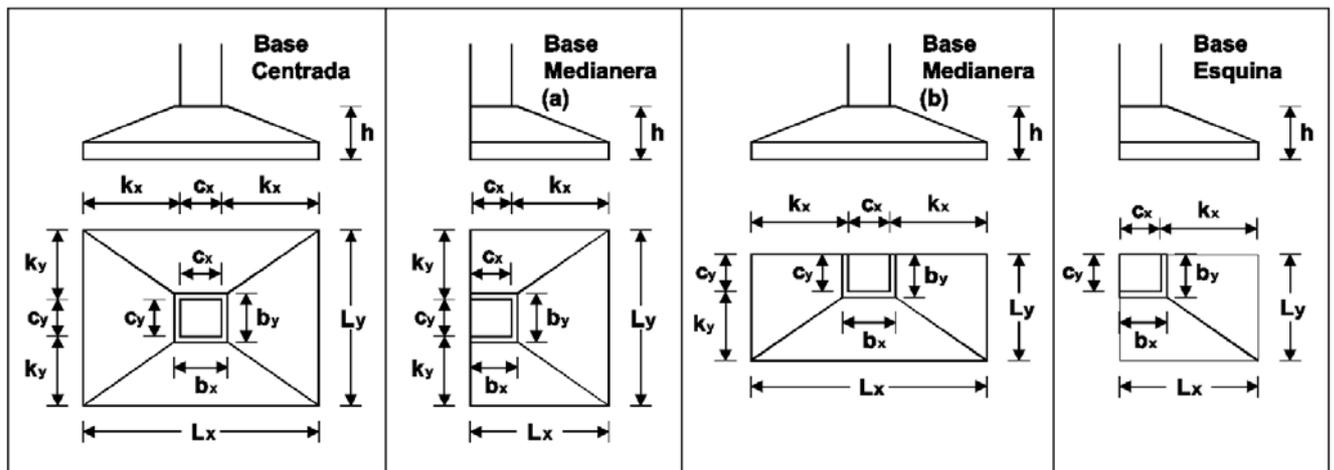


Figura 7.1.1

La superficie de contacto de las bases se supone determinada en función de las recomendaciones dadas por el Estudio de Suelos. En lo que sigue, se supondrá que la base verifica adecuadamente los aspectos relacionados con seguridad del suelo frente a la rotura y a asentamientos absolutos y relativos admisibles como así también a los aspectos relacionados con la rigidez relativa suelo-base.

Los criterios que se exponen arrojarán como resultado bases que no tendrán armaduras de corte ni de punzonamiento como así tampoco armadura comprimida por flexión (doble armadura).

7.2.- Condición resistente

7.2.1.- Formato general

Como en otros casos, el procedimiento consiste en identificar las secciones críticas para las diferentes solicitaciones y verificar que en ellas se cumpla:

$$\begin{aligned} \text{Resistencia requerida} &\leq \text{Resistencia de diseño} \\ (\text{Solicitud calculada para cargas mayoradas}) &\leq \text{Resistencia minorada} \end{aligned}$$

donde

$$\text{Resistencia diseño} = \phi \cdot \text{Resistencia nominal} \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículo 9.1.1})$$

con

$$\phi = \text{Coeficiente de reducción de resistencia} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Flexión} = 0,90 \\ \text{Punzonamiento} = 0,75 \\ \text{Corte} = 0,75 \end{array} \right. \\ (\text{CIRSOC 201-2005, artículo 9.3.2})$$

7.2.2.- Secciones críticas

Por brevedad se analiza una sola de las dos bases medianeras mostradas en la Figura 7.1.1 aunque luego se dan las expresiones de cálculo correspondientes a las dos.

En todas las figuras las secciones críticas se indican en línea de puntos y las áreas rayadas representan la superficie de acción de reacciones del suelo a considerar en cada sección crítica.

7.2.2.1.- Flexión

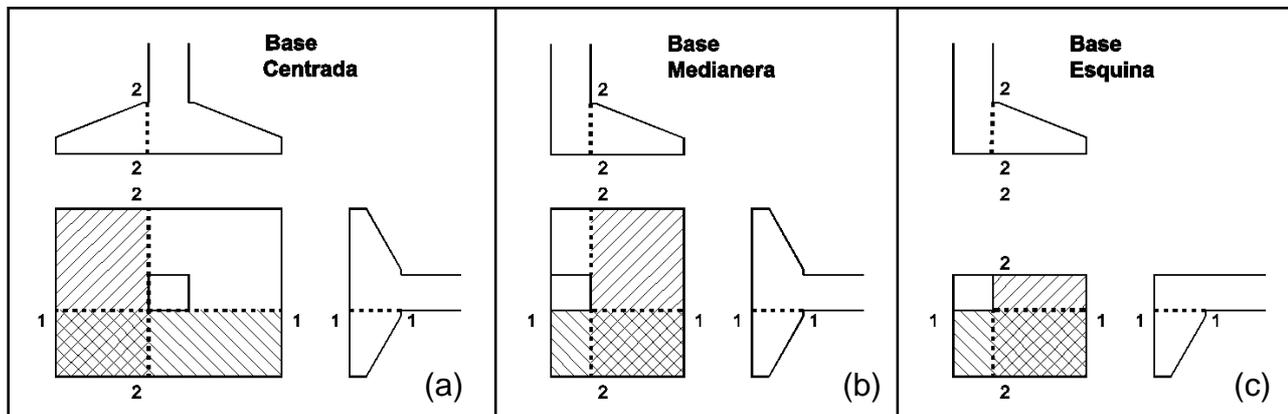


Figura 7.2.2.1.1

Las secciones críticas para flexión son planos verticales que pasan por las caras de la columna (Figura 7.2.2.1.1). Se trata en definitiva de líneas de rotura que pasan tangentes a las caras de la columna.

En los cálculos se introduce una simplificación que deja los resultados del lado seguro: se supone que la sección resistente es de ancho constante e igual al menor ancho de la sección transversal (Figura 7.2.2.1.2).

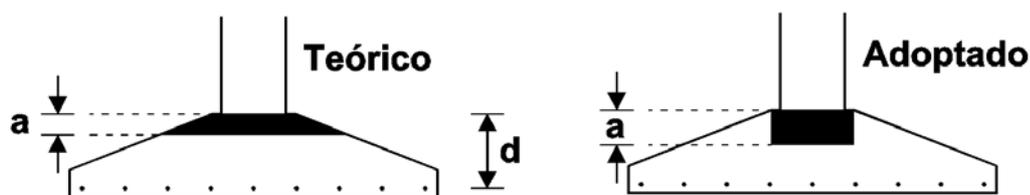


Figura 7.2.2.1.2

7.2.2.2.- Corte

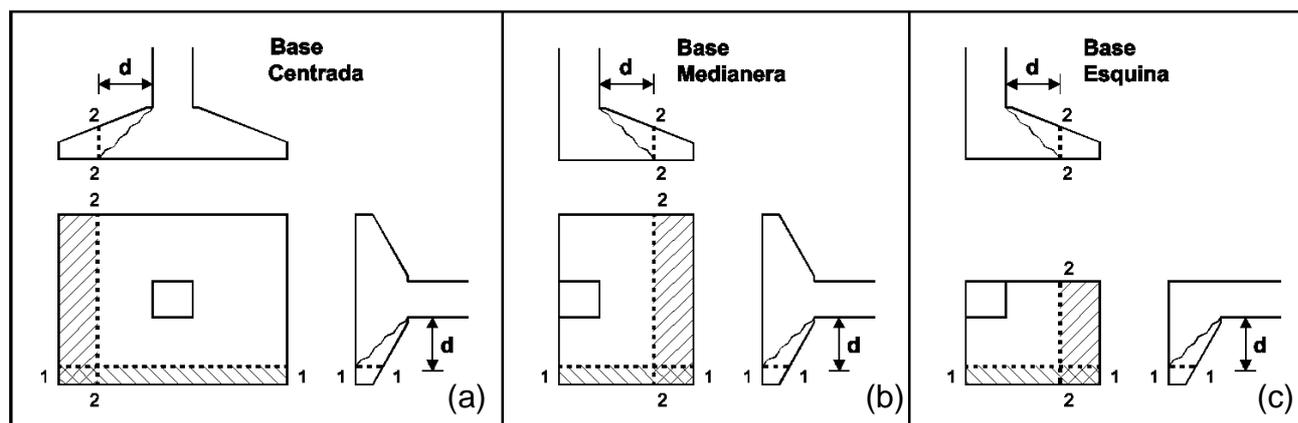


Figura 7.2.2.2.1

El CIRSOC 201-2005, artículo 11.1.3.1, indica que las secciones críticas para el corte, en las condiciones de carga de los elementos estructurales en estudio, se deben ubicar a una distancia “d” de las caras de las columnas (Figura 7.2.2.2.1) pero no contempla específicamente el análisis bajo solicitaciones de corte de secciones de ancho variable. Si bien una hipótesis conservadora podría consistir en tomar como ancho resistente el menor ancho de la sección, tal como se ha hecho al ver flexión, esta hipótesis resulta exageradamente conservadora y obligaría bien a proyectar bases con alturas innecesariamente grandes o bien a utilizar bases de ancho constante con la altura. Esta última solución es utilizada en otros lugares del mundo aunque no es la costumbre más difundida en nuestro medio.

En la bibliografía [Referencia (1)] se indica que en elementos sin armadura de alma, la resistencia al corte puede suponerse compuesta por:

- El aporte de la zona de hormigón comprimido
- El efecto pasador de las armaduras de flexión (dowel action)
- El efecto de engranamiento de agregados en la zona fisurada (aggregate interlock)

Los ensayos que se han venido realizando en los últimos treinta años [Referencia (1)] muestran que el aporte de la zona comprimida, aún cerca de la rotura, representa solamente alrededor del 25% de la resistencia total al corte. Las secciones resistentes al corte mostradas en la Figura 7.2.2.2.1 presentan su menor ancho en la zona comprimida y anchos crecientes al aproximarse a las armaduras.

En estos ejemplos se propone adoptar el siguiente criterio para evaluar la resistencia al corte:

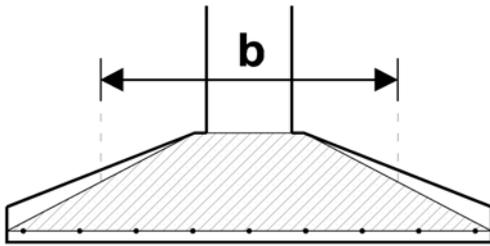


Figura 7.2.2.2.2

- a) Suponer que la resistencia al corte de la zona comprimida de hormigón está provista por un sector de ancho constante e igual al menor ancho de la sección.
- b) Suponer que el resto del corte está provisto por una sección con un ancho igual al ancho promedio entre el mínimo y el máximo que presenta la sección (Figura 7.2.2.2.2)

Es decir:

$$V_n = V_c = [0,25 \cdot b_{\text{mín}} + 0,75 \cdot (b_{\text{máx}} + b_{\text{mín}}) / 2] \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} / 6 =$$

$$V_n = (5 \cdot b_{\text{mín}} + 3 \cdot b_{\text{máx}}) \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} / 48$$

La expresión anterior:

- a) Subvalora ligeramente el aporte de la zona comprimida dado que ésta es de ancho variable y creciente con el aumento de la profundidad del eje neutro.
- b) Subestima el efecto de engranamiento de agregados pues el mismo es proporcional al área de la sección transversal y en la Figura 7.2.2.2.2 se observa que no toda la sección interviene en la expresión.
- c) Subestima el efecto pasador dado que el mismo tiene alguna relación con el ancho de la zona donde se encuentran las armaduras.
- d) No considera el efecto favorable de la inclinación de la resultante de compresiones que se produce por la pendiente que presenta la cara de la zapata.

Aún sin contar con una expresión específica para este tipo de problemas, todo indicaría que la expresión anterior debería resultar segura para la verificación de este tipo de secciones.

No existiendo aún indicaciones reglamentarias ni referencias bibliográficas más específicas, se propone este criterio simplificado para el cálculo de estas secciones.

En los ejemplos, la expresión toma un aspecto algo diferente por la adaptación de unidades.

7.2.2.3.- Punzonamiento

El CIRSOC 201-2005, artículo 11.12.1.2, indica que a los efectos del cálculo, los perímetros críticos pueden tomarse a una distancia no menor que $d/2$ del perímetro de las columnas. Se admite no redondear los perímetros críticos alrededor de las esquinas de las columnas. De esta forma, los perímetros críticos resultantes son los mostrados en la Figura 7.2.2.3.1.

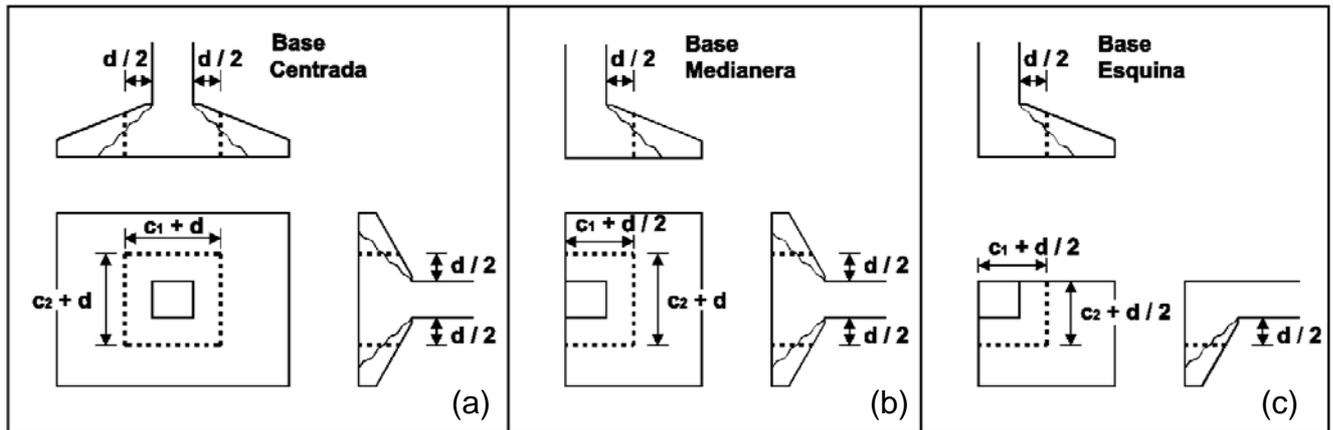


Figura 7.2.2.3.1

La carga efectiva de punzonamiento puede calcularse bien considerando la reacción del suelo que se encuentra por fuera del perímetro crítico o bien como la carga de la columna descontada de la reacción del suelo que se encuentra encerrada por el perímetro crítico.

Las columnas medianeras y de esquina presentan una resultante de las tensiones de contacto en el terreno que no se encuentra alineada con el eje de la columna. En estas condiciones se hace necesario transferir un momento entre la base y la columna. El CIRSOC 201-2005 indica dos caminos a seguir cuando actúan momentos. El más sencillo, artículo 13.5.3.3, consiste en limitar la capacidad resistente al punzonamiento al 75% del aporte del hormigón para bases medianeras y al 50% para bases de esquina. El segundo camino trata el tema mediante un análisis de distribución de tensiones similar al visto en Resistencia de Materiales para el tratamiento de la flexión compuesta. Este segundo enfoque es extremadamente laborioso por lo que aquí se ha adoptado el primero de ellos.

El valor de “ V_c ” se calcula utilizando las siguientes expresiones (artículo 11.12.2.1):

$$V_c \leq \begin{cases} V_c = \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \cdot \frac{\sqrt{f'_c} \cdot b_o \cdot d}{6} \\ V_c = \left(\frac{\alpha_s \cdot d}{b_o} + 2\right) \cdot \frac{\sqrt{f'_c} \cdot b_o \cdot d}{12} \\ V_c = \frac{\sqrt{f'_c} \cdot b_o \cdot d}{3} \end{cases}$$

La primera de estas expresiones es de aplicación cuando $\beta > 2$ mientras que la última es válida cuando $\beta \leq 2$

donde

- β : Relación entre el lado mayor y el lado menor de la columna
- α_s : $\begin{cases} 40 \text{ para bases centradas} \\ 30 \text{ para bases medianeras} \\ 20 \text{ para bases de esquina} \end{cases}$
- b_o : Perímetro de la sección crítica, en [mm]
- d : Altura útil en la sección crítica, en [mm]
- $\sqrt{f'_c}$: f'_c en [MPa], el resultado de la raíz en [MPa]

En los cálculos se utilizará la altura media entre las correspondientes a cada una de las armaduras principales.

En los ejemplos las expresiones anteriores toman un aspecto algo diferente por la adaptación de unidades y el ordenamiento de los cálculos.

7.2.2.4.- Anclajes (CIRSOC 201-2005, artículo 15.6)

Las secciones críticas para el desarrollo de las longitudes de anclaje son las vistas para flexión. En bases es común mantener el 100% de la armadura hasta los bordes libres y además utilizar ganchos normales.

7.3.- Cuantía mínima y máxima de flexión

La armadura mínima debería ser capaz de resistir adecuadamente un momento igual a 1,2 veces el momento de fisuración. En secciones no rectangulares esto conduce a un cálculo bastante engorroso. En el CIRSOC 201-2005, artículo 10.5.2, está contemplado el caso de los voladizos con el ala traccionada. Tratándose de una situación bastante similar, se ha adoptado este criterio para la adopción de la cuantía mínima en bases. El procedimiento es muy sencillo dado que se trata de aplicar las expresiones de cuantía mínima a un ancho de alma igual a dos veces el ancho de la zona comprimida. Para evitar la realización de cálculos intermedios la cuantía mínima se expresa en términos de momentos reducidos:

Para voladizos con alas traccionadas y $f'_c \leq 30$ MPa: $A_{s\text{ mín}} \geq 2 \cdot 1,4 \text{ MPa} \cdot b_w \cdot d / f_y$
(CIRSOC 201-2005, artículo 10.5.1)

Llamando "a" a la profundidad del eje neutro de tensiones y "k_a" a: $k_a = a / d$

$$a_{\text{mín}} = A_{s\text{ mín}} \cdot f_y / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w) \Rightarrow k_{a\text{ mín}} = 2,8 \text{ MPa} / (0,85 \cdot f'_c)$$

En los ejemplos de flexión se vio que: $m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = k_a \cdot (1 - k_a / 2)$

Por lo tanto corresponderá adoptar cuantía mínima siempre que se verifique:

$$m_n \leq m_{n\text{ mín}} = k_{a\text{ mín}} \cdot (1 - k_{a\text{ mín}} / 2)$$

Cabría una verificación adicional para el caso poco frecuente en que el lado de la base resulte menor que dos veces el ancho de la parte superior de la misma. En ese caso habría que tomar la cuantía mínima referida al lado de la base.

La cuantía máxima se calcula en base a una deformación máxima del hormigón comprimido de 0,003 y a una deformación mínima del acero traccionado de 0,005 (artículo 10.3.4). En estas circunstancias el coeficiente de minoración de resistencia valdrá siempre 0,90 (artículo 9.3.2.1). Para evitar la realización de cálculos intermedios la cuantía máxima se expresa en términos de momentos reducidos "m_n". En los ejemplos de flexión se vio que, para las condiciones de deformación anteriores se tiene que:

$$0,003/c = 0,005/(d - c) \Rightarrow c = 0,375 \cdot d \Rightarrow a = \beta_1 \cdot c = 0,85 \cdot 0,375 \cdot d$$

Operando se llega a que, para hormigones con $f'_c \leq 30$ MPa será necesario disponer armadura de compresión (doble armadura) cuando: $m_n \geq 0,268$

En los ejemplos se evita esta situación pues conduce a soluciones poco económicas a bases muy flexibles (poca altura) que difícilmente verificarán las condiciones de corte y punzonamiento.

7.4.- Predimensionamiento

Los textos de origen norteamericano suelen predimensionar la altura de las bases teniendo en cuenta las condiciones de punzonamiento. Cabe recordar que en esos casos se trata de bases de ancho constante con la altura. En el caso de bases de ancho variable estas expresiones con frecuencia no son válidas. En los ejemplos que siguen se propone predimensionar de modo de obtener cuantías de armaduras de flexión superiores a las mínimas pero suficientemente bajas como para que las bases tengan una razonable rigidez y que las alturas no estén exageradamente alejadas de las necesarias por corte y punzonamiento para evitar un número muy grande de iteraciones. Las expresiones propuestas son las siguientes:

$$d_x \approx [6,5 \cdot M_{nx} / (b_y \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} \quad \text{en [m]}$$

$$d_y \approx [6,5 \cdot M_{ny} / (b_x \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} \quad \text{en [m]}$$

donde

Momentos nominales en [kNm]
 Anchos de cálculo en [m]
 f'_c en [MPa]

El factor "6,5" que figura en las expresiones anteriores surge de haber adoptado un $k_a \cong 0,20$, sin embargo podrá ser adaptado por cada proyectista según su propia experiencia.

Las expresiones para el cálculo de los momentos solicitantes se encuentran en la Tabla 2 indicada más adelante.

7.5.- Unidades

Para utilizar las unidades que siguen algunas de las expresiones del Reglamento han tenido que ser adaptadas.

f'_c, f_y	(resistencias)	[MPa]
L_x, L_y, h, d, \dots	(dimensiones lineales)	[m]
A_{sx}, A_{sy}	(áreas de armaduras)	[mm ²]
P_u, P_n	(cargas)	[KN]

7.6.- Secuencia de cálculo

- a) Determinar las dimensiones en planta de la base de acuerdo con los datos del estudio de suelos.
- b) Son datos del problema:
 P_u = carga de la columna calculada para cargas mayoradas [kN]
 Lados de la columna L_x y Lados de la base L_y ambos en [m]
- c) Calcular: β = lado mayor columna / lado menor columna ;
 α_s ; Y ; b_x ; b_y ; b_{wx} ; b_{wy} ; k_x ; k_y ; (Tabla 1)
 $k_{a\text{ mín}}$; $m_{n\text{ mín}}$ (Tabla 2)
 q_u = tensión ficticia de contacto para P_u , $q_u = P_u / (L_x \cdot L_y)$ en [kN/m²]
- d) Calcular los momentos flectores en el borde de la columna:
 M_{ux} y M_{uy} ambos en [kNm] (Tabla 2)
- e) Predimensionar la altura total de la base para obtener cuantías razonables de flexión:
 $d_x \approx [6,5 \cdot M_{nx} / (b_y \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2}$ en [m]
 $d_y \approx [6,5 \cdot M_{ny} / (b_x \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2}$ en [m]
 Altura total mínima = rec. mín + d_b armadura $_x$ + d_b armadura $_y$ + 0,15 m \approx 0,23 m
- f) Adoptar alturas útiles para las verificaciones de punzonamiento (d_{medio}) y corte (d_x y d_y).
- g) Verificar si la altura adoptada proporciona una seguridad adecuada al punzonamiento:
 $P_u - q_u \cdot A_o \leq 0,75 \cdot Y \cdot F \cdot b_o \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12$ en [kN]
 A_o = área de la base encerrada por el perímetro crítico en [m²] (Tabla 1)
 b_o = perímetro crítico en [m] (Tabla 1)
 F = mínimo entre F_1 y F_2 donde, para todos los casos:
 $F_2 = (\alpha_s \cdot d / b_o + 2)$ y $F_1 = 4$ si $\beta \leq 2$ o $F_1 = (2 + 4 / \beta)$ si $\beta > 2$
- h) Si la altura resulta insuficiente para proveer una resistencia adecuada al punzonamiento, se incrementa la altura y se repiten los cálculos del punto anterior. Si resulta suficiente se pasa al paso siguiente.
- i) Verificar si la altura adoptada proporciona una seguridad adecuada al corte en ambas direcciones:
 $V_{ux} = q_u \cdot L_y \cdot (k_x - d) \leq 0,75 \cdot b_{wy} \cdot d_x \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$ en [kN]
 $V_{uy} = q_u \cdot L_x \cdot (k_y - d) \leq 0,75 \cdot b_{wx} \cdot d_y \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$ en [kN]
- j) Si la altura resulta insuficiente para proveer una resistencia adecuada al corte, se incrementa la altura y se repiten los cálculos del punto anterior. Si resulta suficiente se pasa al paso siguiente.
- k) Dimensionamiento de las armaduras de flexión (Tabla 2)

Tabla 1

	Centrada	Medianera (a)	Medianera (b)	Esquina
α_s	40	30	30	20
Y	1	0,75	0,75	0,50
b_x [m]	$c_x + 0,05$ m (*)	$c_x + 0,025$ m (*)	$c_x + 0,05$ m (*)	$c_x + 0,025$ m (*)
b_y [m]	$c_y + 0,05$ m (*)	$c_y + 0,05$ m (*)	$c_y + 0,025$ m (*)	$c_y + 0,025$ m (*)
b_{wx} [m]	$(5 \cdot b_x + 3 \cdot L_x) / 8$			
b_{wy} [m]	$(5 \cdot b_y + 3 \cdot L_y) / 8$			
k_x [m]	$(L_x - c_x) / 2$	$L_x - c_x$	$(L_x - c_x) / 2$	$L_x - c_x$
k_y [m]	$(L_y - c_y) / 2$	$(L_y - c_y) / 2$	$L_y - c_y$	$L_y - c_y$
b_o [m]	$2 \cdot (c_x + c_y) + 4 \cdot d$	$2 \cdot c_x + c_y + 2 \cdot d$	$c_x + 2 \cdot c_y + 2 \cdot d$	$c_x + c_y + d$
A_o [m ²]	$(c_x + d) \cdot (c_y + d)$	$(c_x + d/2) \cdot (c_y + d)$	$(c_x + d) \cdot (c_y + d/2)$	$(c_x + d/2) \cdot (c_y + d/2)$

(*) Los valores 0,025 y 0,05 m no son reglamentarios y dependen de cada Proyectista

Tabla 2

Cuantía mínima voladizos	$k_{a \text{ mín}} = 2,8 \text{ MPa} / (0,85 \cdot f'_c)$	
Si en cualquier caso $m_n \leq m_{n \text{ mín}} = k_{a \text{ mín}} \cdot (1 - k_{a \text{ mín}} / 2)$ adoptar: $A_{s \text{ mín}} = 2,8 \text{ MPa} \cdot b \cdot d \cdot (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) / f_y$ y $A'_s = 0$		
Momento solicitante	$M_{ux} = q_u \cdot L_y \cdot k_x^2 / 2$	$M_{uy} = q_u \cdot L_x \cdot k_y^2 / 2$
Momento nominal necesario	$M_{nx} = M_{ux} / 0,90$	$M_{ny} = M_{uy} / 0,90$
Momento reducido	$m_{nx} = \kappa \cdot M_{nx} / (0,85 \cdot b_y \cdot d^2 \cdot f'_c)$ $\kappa = (0,001 \text{ MN/kN})$	$m_{ny} = \kappa \cdot M_{ny} / (0,85 \cdot b_x \cdot d^2 \cdot f'_c)$ $\kappa = (0,001 \text{ MN/kN})$
Si en cualquier caso $m_n > 0,268$ correspondería adoptar doble armadura, situación que no se contempla en esta secuencia de cálculo recomendándose aumentar la altura por resultar una solución más racional		
Calculo de armaduras totales de flexión	$z_x = d_x \cdot [1 + (1 - 2 \cdot m_{nx})^{1/2}] / 2$ $A_{sx} = \xi \cdot M_{nx} / (z_x \cdot f_y)$ $\xi = 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})$ $A'_s = 0$	$z_y = d_y \cdot [1 + (1 - 2 \cdot m_{ny})^{1/2}] / 2$ $A_{sy} = \xi \cdot M_{ny} / (z_y \cdot f_y)$ $\xi = 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})$ $A'_s = 0$
Adoptar la altura del talón de la base para respetar recubrimientos reglamentarios ($\approx 0,23$ a $0,25$ m) y pendiente del hormigón fresco ($\approx h - \text{voladizo mínimo}$) adoptando el mayor valor entre ambos		
Distribución de las armaduras de flexión L = lado mayor base ; B = lado menor base ; $\beta = L / B$ * Armadura paralela al lado mayor: Se distribuye en forma uniforme * Armadura paralela al lado menor: Se divide en tres fajas - Faja Central de ancho B centrada con la Columna: Se distribuye en forma uniforme una armadura igual a $2 / (\beta + 1)$ de la armadura total - Fajas Laterales de ancho $(L - B) / 2$: se distribuye en forma uniforme el resto de la armadura * La separación entre armaduras debe ser menor que el menor entre: - 2,5 veces el espesor total de la base ; 25 veces el diámetro menor de la armadura ; 0,30 m		

REFERENCIA

- (1) Collins M., Mitchell D. ; Prestressed Concrete Basics ; CPCI ; 1987

BASES DE HORMIGÓN ARMADO – EJEMPLOS

Ejemplo 7.I

Enunciado: Proyectar una base centrada de la que se conocen los siguientes datos:

Hormigón: H-25 ($f'_c = 25$ MPa)
Acero : ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)
 $P_u = 1400$ kN
 $c_x = 0,30$ m ; $c_y = 0,25$ m ; $L_x = L_y = 2,25$ m
 $c_c = 0,05$ m ; $\alpha_s = 40$; $Y = 1$

Resolución:

a) Valores intermedios

$$\begin{aligned}\beta &= c_x / c_y = 0,30 \text{ m} / 0,25 \text{ m} = 1,20 \\ b_x &= c_x + 0,05 \text{ m} = 0,30 \text{ m} + 0,05 \text{ m} = 0,35 \text{ m} \\ b_y &= c_y + 0,05 \text{ m} = 0,25 \text{ m} + 0,05 \text{ m} = 0,30 \text{ m} \\ b_{wx} &= (5 \cdot b_x + 3 \cdot L_x) / 8 = (5 \cdot 0,35 \text{ m} + 3 \cdot 2,25 \text{ m}) / 8 = 1,06 \text{ m} \\ b_{wy} &= (5 \cdot b_y + 3 \cdot L_y) / 8 = (5 \cdot 0,30 \text{ m} + 3 \cdot 2,25 \text{ m}) / 8 = 1,03 \text{ m} \\ k_x &= (L_x - c_x) / 2 = (2,25 \text{ m} - 0,30 \text{ m}) / 2 = 0,975 \text{ m} \\ k_y &= (L_y - c_y) / 2 = (2,25 \text{ m} - 0,25 \text{ m}) / 2 = 1,00 \text{ m} \\ k_{a \text{ mín}} &= 2,8 \text{ MPa} / (0,85 \cdot f'_c) = 0,132 \\ m_{n \text{ mín}} &= k_{a \text{ mín}} \cdot (1 - k_{a \text{ mín}} / 2) = 0,123 \\ q_u &= P_u / (L_x \cdot L_y) = 276,54 \text{ kN/m}^2 \\ M_{ux} &= q_u \cdot L_y \cdot k_x^2 / 2 = 276,54 \text{ kN/m}^2 \cdot 2,25 \text{ m} \cdot 0,975^2 \text{ m}^2 / 2 = 295,75 \text{ kNm} \\ M_{uy} &= q_u \cdot L_x \cdot k_y^2 / 2 = 276,54 \text{ kN/m}^2 \cdot 2,25 \text{ m} \cdot 1,00^2 \text{ m}^2 / 2 = 311,11 \text{ kNm} \\ M_{nx} &= M_{ux} / 0,90 = 328,61 \text{ kNm} \\ M_{ny} &= M_{uy} / 0,90 = 345,68 \text{ kNm}\end{aligned}$$

b) Predimensionamiento de la altura por flexión

$$\begin{aligned}d_x &\approx [6,5 \cdot M_{nx} / (b_y \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = \\ d_x &\approx [6,5 \cdot 328,61 \text{ kNm} / (0,30 \text{ m} \cdot 25 \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = 0,53 \text{ m} \\ d_y &\approx [6,5 \cdot M_{ny} / (b_x \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = \\ d_y &\approx [6,5 \cdot 311,11 \text{ kNm} / (0,35 \text{ m} \cdot 25 \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = 0,51 \text{ m}\end{aligned}$$

Se adopta:

$$\begin{aligned}\text{Para punzonamiento: } d &= 0,52 \text{ m} \\ \text{Para corte: } d_x &= 0,525 \text{ m} \quad ; \quad d_y = 0,515 \text{ m}\end{aligned}$$

c) Verificación de la altura por punzonamiento

$$\begin{aligned}b_o &= 2 \cdot (c_x + c_y) + 4 \cdot d = 2 \cdot (0,30 \text{ m} + 0,25 \text{ m}) + 4 \cdot 0,52 \text{ m} = 3,18 \text{ m} \\ A_o &= (c_x + d) \cdot (c_y + d) = (0,30 \text{ m} + 0,52 \text{ m}) \cdot (0,25 \text{ m} + 0,52 \text{ m}) = 0,631 \text{ m}^2 \\ \text{Como } \beta &\leq 2 \Rightarrow F_1 = 4 \\ F_2 &= (\alpha_s \cdot d / b_o + 2) = (40 \cdot 0,52 \text{ m} / 3,18 \text{ m} + 2) = 8,54 \Rightarrow F = \text{mínimo}(F_1 ; F_2) = 4\end{aligned}$$

se debe verificar que: $P_u - q_u \cdot A_o \leq 0,75 \cdot Y \cdot F \cdot b_o \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12$

$$P_u - q_u \cdot A_o = 1400 \text{ kN} - 276,54 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,631 \text{ m}^2 = 1225 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot Y \cdot F \cdot b_o \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12 = \\ = 0,75 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3,18 \text{ m} \cdot 0,52 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12 = 2067 \text{ kN}$$

Por lo tanto verifica a punzonamiento.

d) Verificación de la altura por corte

se debe verificar que: $V_{ux} \leq 0,75 \cdot b_{wy} \cdot d_x \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$
 $V_{uy} \leq 0,75 \cdot b_{wx} \cdot d_y \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$

$$V_{ux} = q_u \cdot L_y \cdot (k_x - d_x) = 276,54 \text{ kN/m}^2 \cdot 2,25 \text{ m} \cdot (0,975 \text{ m} - 0,525 \text{ m}) = 280 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot b_{wy} \cdot d_x \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = \\ = 0,75 \cdot 1,03 \text{ m} \cdot 0,525 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = 338 \text{ kN} \Rightarrow \text{Verifica}$$

$$V_{uy} = q_u \cdot L_x \cdot (k_y - d_y) = 276,54 \text{ kN/m}^2 \cdot 2,25 \text{ m} \cdot (1,00 \text{ m} - 0,515 \text{ m}) = 302 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot b_{wx} \cdot d_y \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = \\ = 0,75 \cdot 1,06 \text{ m} \cdot 0,515 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = 342 \text{ kN} \Rightarrow \text{Verifica}$$

Por lo tanto verifica al corte en ambas direcciones.

e) Cálculo de las armaduras de flexión

Suponiendo que $d_b = 10 \text{ mm}$, se adopta una altura total:

$$h = d_{\text{máx}} + d_b / 2 + c_c = 0,525 \text{ m} + 0,01 \text{ m} / 2 + 0,05 \text{ m} \approx 0,60 \text{ m}$$

Se adopta: $d_x = 0,545 \text{ m}$; $d_y = 0,535 \text{ m}$

$$m_{nx} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot M_{nx} / (0,85 \cdot b_y \cdot d_x^2 \cdot f'_c) \\ m_{nx} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot 328,61 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,545^2 \text{ m}^2 \cdot 25 \text{ MPa}) = 0,174$$

$$m_{ny} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot M_{ny} / (0,85 \cdot b_x \cdot d_y^2 \cdot f'_c) \\ m_{ny} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot 345,68 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 0,535^2 \text{ m}^2 \cdot 25 \text{ MPa}) = 0,162$$

Ambos momentos reducidos son mayores que el mínimo y menores que el máximo

$$z_x = d_x \cdot [1 + (1 - 2 \cdot m_{nx})^{1/2}] / 2 = 0,545 \text{ m} \cdot [1 + (1 - 2 \cdot 0,174)^{1/2}] / 2 = 0,493 \text{ m} \\ z_y = d_y \cdot [1 + (1 - 2 \cdot m_{ny})^{1/2}] / 2 = 0,535 \text{ m} \cdot [1 + (1 - 2 \cdot 0,162)^{1/2}] / 2 = 0,487 \text{ m}$$

$$A_{sx} = (1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})) \cdot M_{nx} / (z_x \cdot f_y) = \\ A_{sx} = (1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})) \cdot 328,61 \text{ kNm} / (0,493 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa}) = 1588 \text{ mm}^2$$

$$A_{sy} = (1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})) \cdot M_{ny} / (z_y \cdot f_y) = \\ A_{sy} = (1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})) \cdot 345,68 \text{ kNm} / (0,487 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa}) = 1689 \text{ mm}^2$$

f) Adopción y distribución de la armadura de flexión

Por tratarse de una base cuadrada se adopta armadura uniformemente distribuida en ambas direcciones.

$$A_{sx} = d_b 12 c / 0,16 \text{ m} \quad (113 \text{ mm}^2 \cdot 2,25 \text{ m} / 0,16 \text{ m} = 1589 \text{ mm}^2)$$

$$A_{sy} = d_b 12 c / 0,15 \text{ m} \quad (113 \text{ mm}^2 \cdot 2,25 \text{ m} / 0,15 \text{ m} = 1695 \text{ mm}^2)$$

La separación entre armaduras debe ser menor que:

- 2,5 veces el espesor total de la base = $2,5 \cdot 0,60 \text{ m} = 1,50 \text{ m}$
- 25 veces el diámetro menor de la armadura = $25 \cdot 0,012 \text{ m} = 0,30 \text{ m}$
- 0,30 m

g) Talón de la base

El talón de la base debe tener una altura mayor o igual que:

- $h - k_{\text{mín}} = 0,60 \text{ m} - 0,975 \text{ m}$ menor que cero
- $c_c + d_{bx} + d_{by} + 0,15 \text{ m} = 0,05 \text{ m} + 0,012 \text{ m} + 0,012 \text{ m} + 0,15 \text{ m} = 0,22 \text{ m}$

Se adopta un talón de 0,25 m.

Ejemplo 7.II

Enunciado: Proyectar una base medianera tipo a) de la que se conocen los siguientes datos:

Hormigón: H-25 ($f'_c = 25 \text{ MPa}$)

Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

$P_u = 420 \text{ kN}$

$c_x = 0,30 \text{ m}$; $c_y = 0,25 \text{ m}$; $L_x = 0,90 \text{ m}$; $L_y = 1,80 \text{ m}$

$c_c = 0,05 \text{ m}$; $\alpha_s = 30$; $Y = 0,75$

Resolución:

a) Valores intermedios

$$\beta = c_x / c_y = 0,30 \text{ m} / 0,25 \text{ m} = 1,20$$

$$b_x = c_x + 0,025 \text{ m} = 0,30 \text{ m} + 0,025 \text{ m} = 0,325 \text{ m}$$

$$b_y = c_y + 0,05 \text{ m} = 0,25 \text{ m} + 0,05 \text{ m} = 0,30 \text{ m}$$

$$b_{wx} = (5 \cdot b_x + 3 \cdot L_x) / 8 = (5 \cdot 0,325 \text{ m} + 3 \cdot 0,90 \text{ m}) / 8 = 0,541 \text{ m}$$

$$b_{wy} = (5 \cdot b_y + 3 \cdot L_y) / 8 = (5 \cdot 0,30 \text{ m} + 3 \cdot 1,80 \text{ m}) / 8 = 0,863 \text{ m}$$

$$k_x = L_x - c_x = 0,90 \text{ m} - 0,30 \text{ m} = 0,60 \text{ m}$$

$$k_y = (L_y - c_y) / 2 = (1,80 \text{ m} - 0,25 \text{ m}) / 2 = 0,775 \text{ m}$$

$$k_{a \text{ mín}} = 2,8 \text{ MPa} / (0,85 \cdot f'_c) = 0,132$$

$$m_{n \text{ mín}} = k_{a \text{ mín}} \cdot (1 - k_{a \text{ mín}} / 2) = 0,123$$

$$q_u = P_u / (L_x \cdot L_y) = 259,26 \text{ kN/m}^2$$

$$M_{ux} = q_u \cdot L_y \cdot k_x^2 / 2 = 259,26 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,80 \text{ m} \cdot 0,60^2 \text{ m}^2 / 2 = 84,00 \text{ kNm}$$

$$M_{uy} = q_u \cdot L_x \cdot k_y^2 / 2 = 259,26 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,90 \text{ m} \cdot 0,775^2 \text{ m}^2 / 2 = 70,07 \text{ kNm}$$

$$M_{nx} = M_{ux} / 0,90 = 93,33 \text{ kNm}$$

$$M_{ny} = M_{uy} / 0,90 = 77,86 \text{ kNm}$$

b) Predimensionamiento de la altura por flexión

$$d_x \approx [6,5 \cdot M_{nx} / (b_y \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} =$$

$$d_x \approx [6,5 \cdot 93,33 \text{ kNm} / (0,30 \text{ m} \cdot 25 \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = 0,284 \text{ m}$$

$$d_y \approx [6,5 \cdot M_{ny} / (b_x \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} =$$

$$d_y \approx [6,5 \cdot 77,86 \text{ kNm} / (0,325 \text{ m} \cdot 25 \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = 0,25 \text{ m}$$

Se adopta:

$$\text{Para punzonamiento: } d = 0,28 \text{ m}$$

$$\text{Para corte: } d_x = 0,285 \text{ m} ; d_y = 0,275 \text{ m}$$

c) Verificación de la altura por punzonamiento

$$b_o = 2 \cdot c_x + c_y + 2 \cdot d = 2 \cdot 0,30 \text{ m} + 0,25 \text{ m} + 2 \cdot 0,28 \text{ m} = 1,41 \text{ m}$$

$$A_o = (c_x + d / 2) \cdot (c_y + d) = (0,30 \text{ m} + 0,28 \text{ m} / 2) \cdot (0,25 \text{ m} + 0,28 \text{ m}) = 0,233 \text{ m}^2$$

$$\text{Como } \beta \leq 2 \Rightarrow F_1 = 4$$

$$F_2 = (\alpha_s \cdot d / b_o + 2) = (30 \cdot 0,28 \text{ m} / 1,41 \text{ m} + 2) = 7,96 \Rightarrow F = \text{mínimo}(F_1 ; F_2) = 4$$

se debe verificar que: $P_u - q_u \cdot A_o \leq 0,75 \cdot Y \cdot F \cdot b_o \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12$

$$P_u - q_u \cdot A_o = 420 \text{ kN} - 259,26 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,233 \text{ m}^2 = 360 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot Y \cdot F \cdot b_o \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12 =$$

$$= 0,75 \cdot 0,75 \cdot 4 \cdot 1,41 \text{ m} \cdot 0,28 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12 = 370 \text{ kN}$$

Por lo tanto verifica a punzonamiento.

d) Verificación de la altura por corte

$$\text{se debe verificar que: } V_{ux} \leq 0,75 \cdot b_{wy} \cdot d_x \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$$

$$V_{uy} \leq 0,75 \cdot b_{wx} \cdot d_y \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$$

$$V_{ux} = q_u \cdot L_y \cdot (k_x - d_x) = 259,26 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,80 \text{ m} \cdot (0,60 \text{ m} - 0,285 \text{ m}) = 147 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot b_{wy} \cdot d_x \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 =$$

$$= 0,75 \cdot 0,863 \text{ m} \cdot 0,285 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = 154 \text{ kN} \Rightarrow \text{Verifica}$$

$$V_{uy} = q_u \cdot L_x \cdot (k_y - d_y) = 259,26 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,90 \text{ m} \cdot (0,775 \text{ m} - 0,275 \text{ m}) = 117 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot b_{wx} \cdot d_y \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 =$$

$$= 0,75 \cdot 0,541 \text{ m} \cdot 0,275 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = 93 \text{ kN} \Rightarrow \text{No verifica}$$

Iterando se llega a que el corte verifica para $d_y = 0,317 \text{ m}$

e) Cálculo de las armaduras de flexión

Suponiendo que $d_b = 10 \text{ mm}$, se adopta una altura total:

$$h = d_{\text{máx}} + d_b / 2 + c_c = 0,317 \text{ m} + 0,01 \text{ m} / 2 + 0,05 \text{ m} \approx 0,38 \text{ m}$$

Se adopta: $d_x = 0,315 \text{ m}$; $d_y = 0,325 \text{ m}$

$$m_{nx} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot M_{nx} / (0,85 \cdot b_y \cdot d_x^2 \cdot f'_c)$$
$$m_{nx} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot 93,33 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,315^2 \text{ m}^2 \cdot 25 \text{ MPa}) = 0,148$$

$$m_{ny} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot M_{ny} / (0,85 \cdot b_x \cdot d_y^2 \cdot f'_c)$$
$$m_{ny} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot 77,86 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 0,325 \text{ m} \cdot 0,325^2 \text{ m}^2 \cdot 25 \text{ MPa}) = 0,107$$

m_{nx} es mayor que el mínimo y menor que el máximo; m_{ny} es menor que el mínimo

$$z_x = d_x \cdot [1 + (1 - 2 \cdot m_{nx})^{1/2}] / 2 = 0,315 \text{ m} \cdot [1 + (1 - 2 \cdot 0,148)^{1/2}] / 2 = 0,29 \text{ m}$$

$$A_{sx} = (1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})) \cdot M_{nx} / (z_x \cdot f_y) =$$
$$A_{sx} = (1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN})) \cdot 93,33 \text{ kNm} / (0,29 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa}) = 767 \text{ mm}^2$$

$$A_{sy} = A_{s \text{ mín}} = 2,8 \text{ MPa} \cdot b_x \cdot d_y \cdot (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) / f_y =$$
$$A_{sy} = 2,8 \text{ MPa} \cdot 0,325 \text{ m} \cdot 0,325 \text{ m} \cdot (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) / 420 \text{ MPa} = 704 \text{ mm}^2$$

f) Adopción y distribución de la armadura de flexión

Por tratarse de una base rectangular se adopta armadura uniformemente distribuida en la dirección "y" mientras que la armadura según "x" se concentra en una banda central de 0,90 m de ancho centrada con la columna.

La armadura a disponer en esa banda será:

$$\text{siendo: } L = L_y = 1,80 \text{ m} ; B = L_x = 0,90 \text{ m} ; \beta = L / B = 2$$

$$A_{sx \text{ central}} = 2 \cdot A_{sx} / (\beta + 1) = 2 \cdot 767 \text{ mm}^2 / 3 = 511 \text{ mm}^2 \quad (d_b 12 \text{ c} / 0,19 \text{ m})$$

$$A_{sx \text{ cada lateral}} = (767 \text{ mm}^2 - 511 \text{ mm}^2) / 2 = 128 \text{ mm}^2 \quad (d_b 10 \text{ c} / 0,25 \text{ m})$$

$$A_{sy} = d_b 12 \text{ c} / 0,14 \text{ m}$$

La separación entre armaduras debe ser menor que:

- 2,5 veces el espesor total de la base = $2,5 \cdot 0,38 \text{ m} = 0,95 \text{ m}$
- 25 veces el diámetro menor de la armadura = $25 \cdot 0,01 \text{ m} = 0,25 \text{ m}$
- 0,30 m

g) Talón de la base

El talón de la base debe tener una altura mayor o igual que:

- $h - k_{\text{mín}} = 0,38 \text{ m} - 0,60 \text{ m}$ menor que cero
- $c_c + d_{bx} + d_{by} + 0,15 \text{ m} = 0,05 \text{ m} + 0,012 \text{ m} + 0,012 \text{ m} + 0,15 \text{ m} = 0,22 \text{ m}$

Se adopta un talón de 0,25 m.

Ejemplo 7.III

Enunciado: Proyectar una base de esquina de la que se conocen los siguientes datos:

Hormigón : H-25 ($f'_c = 25 \text{ MPa}$)
Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)
 $P_u = 240 \text{ kN}$
 $c_x = 0,30 \text{ m}$; $c_y = 0,25 \text{ m}$; $L_x = 1,05 \text{ m}$; $L_y = 1,10 \text{ m}$
 $c_c = 0,05 \text{ m}$; $\alpha_s = 20$; $Y = 0,50$

Resolución:

a) Valores intermedios

$$\begin{aligned}\beta &= c_x / c_y = 0,30 \text{ m} / 0,25 \text{ m} = 1,20 \\ b_x &= c_x + 0,025 \text{ m} = 0,30 \text{ m} + 0,025 \text{ m} = 0,325 \text{ m} \\ b_y &= c_y + 0,025 \text{ m} = 0,25 \text{ m} + 0,025 \text{ m} = 0,275 \text{ m} \\ b_{wx} &= (5 \cdot b_x + 3 \cdot L_x) / 8 = (5 \cdot 0,325 \text{ m} + 3 \cdot 1,05 \text{ m}) / 8 = 0,597 \text{ m} \\ b_{wy} &= (5 \cdot b_y + 3 \cdot L_y) / 8 = (5 \cdot 0,275 \text{ m} + 3 \cdot 1,10 \text{ m}) / 8 = 0,584 \text{ m} \\ k_x &= L_x - c_x = 1,05 \text{ m} - 0,30 \text{ m} = 0,75 \text{ m} \\ k_y &= L_y - c_y = 1,10 \text{ m} - 0,25 \text{ m} = 0,85 \text{ m} \\ k_{a \text{ mín}} &= 2,8 \text{ MPa} / (0,85 \cdot f'_c) = 0,132 \\ m_{n \text{ mín}} &= k_{a \text{ mín}} \cdot (1 - k_{a \text{ mín}} / 2) = 0,123 \\ q_u &= P_u / (L_x \cdot L_y) = 207,79 \text{ kN/m}^2 \\ M_{ux} &= q_u \cdot L_y \cdot k_x^2 / 2 = 207,79 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,10 \text{ m} \cdot 0,75^2 \text{ m}^2 / 2 = 64,29 \text{ kNm} \\ M_{uy} &= q_u \cdot L_x \cdot k_y^2 / 2 = 207,79 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,05 \text{ m} \cdot 0,85^2 \text{ m}^2 / 2 = 78,82 \text{ kNm} \\ M_{nx} &= M_{ux} / 0,90 = 71,43 \text{ kNm} \\ M_{ny} &= M_{uy} / 0,90 = 87,58 \text{ kNm}\end{aligned}$$

b) Predimensionamiento de la altura por flexión

$$\begin{aligned}d_x &\approx [6,5 \cdot M_{nx} / (b_y \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = \\ d_x &\approx [6,5 \cdot 71,43 \text{ kNm} / (0,275 \text{ m} \cdot 25 \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = 0,26 \text{ m} \\ d_y &\approx [6,5 \cdot M_{ny} / (b_x \cdot f'_c \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = \\ d_y &\approx [6,5 \cdot 87,58 \text{ kNm} / (0,325 \text{ m} \cdot 25 \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}))]^{1/2} = 0,265 \text{ m}\end{aligned}$$

Se adopta:

$$\begin{aligned}\text{Para punzonamiento: } d &= 0,26 \text{ m} \\ \text{Para corte: } d_x &= 0,255 \text{ m} \quad ; \quad d_y = 0,265 \text{ m}\end{aligned}$$

c) Verificación de la altura por punzonamiento

$$\begin{aligned}b_o &= c_x + c_y + d = 0,30 \text{ m} + 0,25 \text{ m} + 0,26 \text{ m} = 0,81 \text{ m} \\ A_o &= (c_x + d/2) \cdot (c_y + d/2) = (0,30 \text{ m} + 0,26 \text{ m} / 2) \cdot (0,25 \text{ m} + 0,26 \text{ m} / 2) = 0,163 \text{ m}^2 \\ \text{Como } \beta &\leq 2 \Rightarrow F_1 = 4 \\ F_2 &= (\alpha_s \cdot d / b_o + 2) = (20 \cdot 0,26 \text{ m} / 0,81 \text{ m} + 2) = 8,42 \Rightarrow F = \text{mínimo}(F_1 ; F_2) = 4\end{aligned}$$

se debe verificar que: $P_u - q_u \cdot A_o \leq 0,75 \cdot Y \cdot F \cdot b_o \cdot d \cdot f'_c^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12$

$$P_u - q_u \cdot A_o = 240 \text{ kN} - 207,79 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,163 \text{ m}^2 = 206 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot Y \cdot F \cdot b_o \cdot d \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12 =$$

$$= 0,75 \cdot 0,50 \cdot 4 \cdot 0,81 \text{ m} \cdot 0,26 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 12 = 132 \text{ kN}$$

Por lo tanto no verifica a punzonamiento.

Iterando se llega a que el punzonamiento verifica para $d = 0,352 \text{ m}$

Para las verificaciones a corte se utilizará: $d_x = 0,35 \text{ m}$; $d_y = 0,36 \text{ m}$

d) Verificación de la altura por corte

$$\text{se debe verificar que: } V_{ux} \leq 0,75 \cdot b_{wy} \cdot d_x \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$$

$$V_{uy} \leq 0,75 \cdot b_{wx} \cdot d_y \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6$$

$$V_{ux} = q_u \cdot L_y \cdot (k_x - d_x) = 207,79 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,10 \text{ m} \cdot (0,75 \text{ m} - 0,35 \text{ m}) = 91 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot b_{wy} \cdot d_x \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 =$$

$$= 0,75 \cdot 0,584 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = 128 \text{ kN} \quad \Rightarrow \text{ Verifica}$$

$$V_{uy} = q_u \cdot L_x \cdot (k_y - d_y) = 207,79 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,05 \text{ m} \cdot (0,85 \text{ m} - 0,36 \text{ m}) = 107 \text{ kN}$$

$$0,75 \cdot b_{wx} \cdot d_y \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 =$$

$$= 0,75 \cdot 0,597 \text{ m} \cdot 0,360 \text{ m} \cdot 25^{1/2} \text{ MPa} \cdot (1000 \text{ kN/MN}) / 6 = 134 \text{ kN} \quad \Rightarrow \text{ Verifica}$$

Por lo tanto verifica al corte en ambas direcciones.

e) Cálculo de las armaduras de flexión

Suponiendo que $d_b = 10 \text{ mm}$, se adopta una altura total:

$$h = d_{\text{máx}} + d_b / 2 + c_c = 0,36 \text{ m} + 0,01 \text{ m} / 2 + 0,05 \text{ m} \approx 0,42 \text{ m}$$

Se adopta: $d_x = 0,355 \text{ m}$; $d_y = 0,365 \text{ m}$

$$m_{nx} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot M_{nx} / (0,85 \cdot b_y \cdot d_x^2 \cdot f'_c)$$

$$m_{nx} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot 71,43 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 0,275 \text{ m} \cdot 0,355^2 \text{ m}^2 \cdot 25 \text{ MPa}) = 0,097$$

$$m_{ny} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot M_{ny} / (0,85 \cdot b_x \cdot d_y^2 \cdot f'_c)$$

$$m_{ny} = (0,001 \text{ MN/kN}) \cdot 87,58 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 0,325 \text{ m} \cdot 0,365^2 \text{ m}^2 \cdot 25 \text{ MPa}) = 0,095$$

Ambos momentos reducidos son menores que el mínimo por lo tanto corresponde adoptar armadura mínima.

$$A_{sx} = A_{s \text{ mín}} = 2,8 \text{ MPa} \cdot b_y \cdot d_x \cdot (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) / f_y =$$

$$A_{sx} = 2,8 \text{ MPa} \cdot 0,275 \text{ m} \cdot 0,355 \text{ m} \cdot (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) / 420 \text{ MPa} = 651 \text{ mm}^2$$

$$A_{sy} = A_{s \text{ mín}} = 2,8 \text{ MPa} \cdot b_x \cdot d_y \cdot (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) / f_y =$$

$$A_{sy} = 2,8 \text{ MPa} \cdot 0,325 \text{ m} \cdot 0,365 \text{ m} \cdot (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) / 420 \text{ MPa} = 791 \text{ mm}^2$$

f) Adopción y distribución de la armadura de flexión

Por tratarse de una base prácticamente cuadrada se adopta armadura uniformemente distribuida en ambas direcciones.

$$A_{sx} = d_b 12 c / 0,19 \text{ m} \quad ; \quad A_{sy} = d_b 12 c / 0,15 \text{ m}$$

La separación entre armaduras debe ser menor que:

- 2,5 veces el espesor total de la base = $2,5 \cdot 0,42 \text{ m} = 1,05 \text{ m}$
- 25 veces el diámetro menor de la armadura = $25 \cdot 0,012 \text{ m} = 0,30 \text{ m}$
- 0,30 m

g) Talón de la base

El talón de la base debe tener una altura mayor o igual que:

- $h - k_{\min} = 0,42 \text{ m} - 0,75 \text{ m}$ menor que cero
- $c_c + d_{bx} + d_{by} + 0,15 \text{ m} = 0,05 \text{ m} + 0,012 \text{ m} + 0,012 \text{ m} + 0,15 \text{ m} = 0,22 \text{ m}$

Se adopta un talón de 0,25 m.

TIRANTES NO PRETENSADOS

Introducción

El CIRSOC 201-2005 no contempla en forma explícita este tipo de elementos por lo que algunas expresiones han debido ser deducidas y otras tomadas de publicaciones del American Concrete Institute (ACI) que es el organismo redactor del Código ACI 318-05 que se tomó como base para el CIRSOC 201-2005.

8.1.- Condición resistente

$$P_u \leq \phi \cdot P_n = 0,90 \cdot A_{st} \cdot f_y \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículo 9.1.1})$$

donde

- P_u = Solicitación calculada para cargas mayoradas
- ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia igual a 0,90 para rotura dúctil
- P_n = Resistencia nominal (resistencia a rotura) = $A_{st} \cdot f_y$
- A_{st} = Área total de armaduras
- f_y = Tensión de fluencia especificada para las armaduras

8.2.- Carga de fisuración

$$P_{cr} = f'_t \cdot A_{ch}$$

donde

- f'_t = Resistencia a tracción por tracción del hormigón = $f'_c{}^{1/2} / 3$ (*)
- A_{ch} = Sección homogeneizada no fisurada: $A_{ch} = A_c + n \cdot A_{st} = A_c \cdot (1 + n \cdot \rho)$
- A_c = Área de la sección de hormigón
- n = E_s / E_c
- E_s = Módulo de elasticidad del acero no teso = 200000 MPa
- E_c = $4700 \cdot f'_c{}^{1/2}$ [MPa]

8.3.- Condición de ductilidad

La condición se obtiene planteando que el acero sea capaz de resistir al menos una carga igual a 1,2 veces la carga de fisuración:

$$P_u = 1,2 \cdot P_{cr} \leq \phi \cdot P_n = 0,90 \cdot A_{st} \cdot f_y$$

Se trata de una generalización del criterio utilizado explícitamente en flexión en elementos pretensados.

(*) El CIRSOC 201-2005 no indica valores para f'_t en forma explícita. Existen sí referencias indirectas al tratar los temas de corte y torsión. Este es el caso de 11.4.3.2 donde se indica que la fisuración por tensión principal diagonal principal de tracción se produce para una tensión igual a $f'_c{}^{1/2} / 3$. Este mismo valor es citado en "Cracking of Concrete Members in Direct Tension, ACI Comité 224, ACI Journal, January-February 1986" como resistencia a tracción por tracción, por lo que se propone su adopción para el cálculo de la carga de fisuración de un tirante.

Como se trata de cuantías muy bajas se introduce la simplificación: $A_{ch} \approx A_c$ con lo que resulta:

$$A_{s \text{ min}} \approx A_c \cdot f'_c{}^{1/2} / (2 \cdot f_y) \quad ; \quad \rho_{\text{min}} = A_{s \text{ min}} / A_c = f'_c{}^{1/2} / (2 \cdot f_y)$$

f'_c [MPa]	20	25	30	35	40	45	50	60
ρ_{min} [%]	0,53	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,84	0,92

8.4.- Deformaciones

El CIRSOC 201-2005 no propone expresiones para el cálculo de deformaciones en este tipo de elementos. Las expresiones que siguen han sido extraídas del artículo "Cracking in Direct Tension" publicado por el ACI Committee 224 en el Journal of the American Concrete Institute, January-February 1986 / N° 1. Proceedings V.83

$$\varepsilon_m = \text{deformación específica media del tirante} = P / (E_c \cdot A_e)$$

$$A_e = A_{ch} \cdot (P_{cr} / P)^3 + A_{cr} \cdot [1 - (P_{cr} / P)^3] \leq A_g$$

donde

A_e = Área efectiva de la sección. Se trata de un área media ficticia que varía desde la sección homogeneizada no fisurada cuando la carga es muy pequeña hasta A_{cr} para valores grandes de P .

$$A_{cr} = n \cdot A_{st}$$

$$\Delta L = \text{Alargamiento del tirante} = \varepsilon_m \cdot L$$

$$L = \text{Longitud inicial del tirante}$$

8.5.- Predicción del ancho de fisuras

El CIRSOC 201-2005 no propone expresiones para el cálculo del ancho de fisuras. Si en algún caso fuera necesario este tipo de cálculo podrá utilizarse la expresión de Gegerly y Lutz que se transcribe a continuación. Dicha expresión figura en numerosos documentos del American Concrete Institute.

$$w = \text{abertura de fisura en [mm]} = (h - x) \cdot f_s \cdot (d_c \cdot A)^{1/3} / [90000 \cdot (d - x)]$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} h = \text{altura total de la sección} \\ d = \text{altura útil de la sección} \\ x = \text{profundidad del eje neutro en flexión} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Por tratarse de un caso de} \\ \text{tracción se adopta:} \\ (h - x) / (d - x) = 1 \end{array}$$

$$f_s = \text{tensión de la armadura en las fisuras bajo cargas de servicio} \quad [\text{MPa}]$$

$$d_c = \text{distancia desde el eje de la barra a la superficie exterior del hormigón} \quad [\text{mm}]$$

$$A = \text{área de hormigón cobaricéntrica con las armaduras} \quad [\text{mm}^2]$$

En forma aproximada, y del lado seguro, puede adoptarse este área como el área de hormigón del tirante dividido el número de barras.

TIRANTES NO PRETENSADOS – EJEMPLOS

Ejemplo 8.I

Enunciado: Proyectar un tirante para las siguientes condiciones

Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20 \text{ MPa}$)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

Sección transversal: - A definir

Estribos: - Recubrimiento = 0,03 m
 - Diámetro: 6 mm

Armadura longitudinal: - A definir

Solicitación: - $P_D = 550 \text{ kN}$; $P_L = 300 \text{ kN}$

Resolución:

$$P_u = \text{máximo entre} \begin{cases} 1,4 \cdot P_D = 1,4 \cdot 550 \text{ kN} = 770 \text{ kN} \\ 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L = 1,2 \cdot 550 \text{ kN} + 1,6 \cdot 300 \text{ kN} = 1140 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_u = 1140 \text{ kN}$$

$$P_n = P_u / \phi = 1140 \text{ kN} / 0,90 = 1266,67 \text{ kN}$$

De la condición de rotura:

$$A_{st} = P_n / f_y = [1266,67 \text{ kN} / 420 \text{ MPa}] \cdot (1000 \text{ MN mm}^2 / (\text{kN m}^2)) = 3016 \text{ mm}^2$$

Se adopta: $A_{st} = 4 d_b 25 + 4 d_b 20 = 3220 \text{ mm}^2$
 $A_c = 0,25 \text{ m} \cdot 0,25 \text{ m} = 0,0625 \text{ m}^2$ (62500 mm²)
 $\rho = A_{st} / A_c = 0,0515 > \rho_{\text{mín}} = f'_c{}^{1/2} / (2 \cdot f_y) = 0,0053$

Ejemplo 8.II

Enunciado: Calcular el alargamiento del tirante anterior para una condición frecuente de carga consistente en la carga permanente más el 50% de la sobrecarga máxima y considerando una longitud inicial de 6 metros.

Resolución:

$$A_e = A_{ch} \cdot (P_{cr} / P)^3 + A_{cr} \cdot [1 - (P_{cr} / P)^3] \leq A_g$$

donde

$$A_{ch} = A_c + n \cdot A_{st} = 0,0625 \text{ m}^2 + 0,03065 \text{ m}^2 = 0,09315 \text{ m}^2$$

$$n = E_s / E_c = 9,52$$

E_s = módulo de elasticidad del acero no teso = 200000 MPa

$$E_c = 4700 \cdot f'_c{}^{1/2} = 21019 \text{ MPa}$$

$$A_{cr} = n \cdot A_{st} = 30654 \text{ mm}^2 \text{ (0,03065 m}^2\text{)}$$

$$P = 550 \text{ kN} + 0,50 \cdot 300 \text{ kN} = 700 \text{ kN}$$

$$f'_t = f'_c{}^{1/2} / 3 = 1,49 \text{ MPa} = 1491 \text{ kN/m}^2$$

$$P_{cr} = A_{ch} \cdot f'_t = 138,87 \text{ kN}$$

$$(P_{cr} / P)^3 = 0,00781$$

$$A_e = A_{ch} \cdot (P_{cr} / P)^3 + A_{cr} \cdot [1 - (P_{cr} / P)^3] = 0,000728 \text{ m}^2 + 0,030415 \text{ m}^2 =$$

$$A_e = 0,031143 \text{ m}^2 \text{ (31143 mm}^2\text{)}$$

$$\varepsilon_m = P / (E_c \cdot A_e) = [700 \text{ kN} / (21019 \text{ MPa} \cdot 0,031143 \text{ m}^2)] \cdot (0,001 \text{ MN/kN}) =$$

$$\varepsilon_m = 0,00107$$

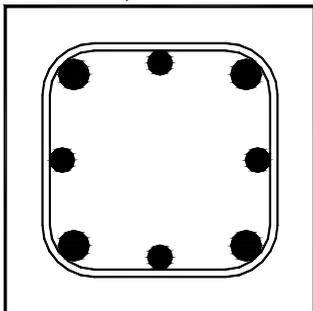
$$\Delta L = \text{Alargamiento del tirante} = \varepsilon_m \cdot L = 0,0064 \text{ m} = 6,4 \text{ mm}$$

Ejemplo 8.III

Enunciado: Calcular el ancho de fisuras esperable en el tirante del Ejemplo 8.I para una condición frecuente de carga consistente en la carga permanente más el 50% de la sobrecarga máxima.

Resolución:

↔ 55,4



$$w = \text{abertura de fisura en [mm]} = f_s \cdot (d_c \cdot A)^{1/3} / 90000$$

donde

$$f_s = P / A_{st} =$$

$$f_s = [700 \text{ kN} / 3220 \text{ mm}^2] \cdot (1000 \text{ MN mm}^2 / (\text{kN m}^2)) =$$

$$f_s = 217,39 \text{ MPa}$$

$$d_c = \text{gráficamente} = 55,4 \text{ mm}$$

$$A = 62500 \text{ mm}^2 / 8 = 7812,5 \text{ mm}^2$$

$$w = 217,39 \text{ MPa} \cdot (55,4 \text{ mm} \cdot 7812,5 \text{ mm})^{1/3} / 90000$$

$$w = 0,18 \text{ mm}$$

Si por cualquier motivo hubiera que limitar el ancho de fisuras a un valor menor que el anterior puede recurrirse a:

- Refinar el cálculo
- Aumentar la sección de acero de modo de bajar el valor de f_s
- Disminuir la sección de hormigón
- Disminuir el diámetro nominal de la armadura

ANCLAJES Y EMPALMES POR ADHERENCIA

9.A.- ANCLAJES

9.A.1.- Anclaje de barras y alambres rectos traccionados

9.A.1.1.- Expresión general

El CIRSOC 201-2005, artículo 12.2.3, indica la siguiente expresión general:

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{9}{10} \cdot \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \cdot \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s \cdot \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)}$$

con los límites: $\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right) \leq 2,50$; $\sqrt{f'_c} \leq 8,3$ MPa y un mínimo aplicable de:
 $\ell_d = 300$ mm (artículo 12.2.1).

con

ℓ_d : Longitud de anclaje de barras y alambres conformados en tracción [mm]

d_b : Diámetro nominal de una barra o alambre [mm]

f'_c : Resistencia especificada a la compresión del hormigón en [MPa]

f_y : Tensión de fluencia especificada para la armadura no tesa [MPa]

ψ_t : Factor por ubicación de la armadura

Para barras horizontales con 300 mm o más de hormigón por debajo del anclaje o empalme de las mismas, vale $\psi_t = 1,3$ (zona de mala adherencia)

Para cualquier otro caso, $\psi_t = 1,0$ (zona de buena adherencia)

ψ_e : Factor relativo al revestimiento de las barras o alambres de la armadura

A los fines del Reglamento CIRSOC 201-2005, artículo 12.2.4, $\psi_e = 1,0$ porque se considera la armadura sin revestir.

ψ_s : Factor por diámetro de la armadura

Si $d_b \leq 16$ mm $\psi_s = 0,80$

Si $d_b > 16$ mm $\psi_s = 1,00$

λ : Factor por uso de hormigón liviano

Permite efectuar las correcciones necesarias cuando se utiliza hormigón con agregado liviano. Para hormigones de peso normal es $\lambda = 1$. El resto de los valores se muestran en el CIRSOC 201-2005.

c_b : Menor valor entre la distancia desde el eje de la barra o alambre a la superficie de hormigón más próxima, o la mitad de la separación entre las barras o alambres [mm]

K_{tr} : Tiene en cuenta la armadura transversal que envuelve a la barra que se ancla

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} \cdot f_{yt}}{10 \text{ MPa} \cdot s \cdot n}$$

donde:

- A_{tr} / s : Armadura transversal por unidad de longitud, que cose el plano de hendidura potencial debido al anclaje o empalme [mm^2/mm]
- f_{yt} : Tensión de fluencia especificada del acero de la armadura transversal [MPa]
- n : Es el número de barras que se anclan o empalman contenidas en el plano de hendidura cosido por la armadura transversal.

La unidad de longitud resultante para K_{tr} debe ser la misma que para c_b y d_b .

9.A.1.2.- Expresiones simplificadas

El uso de la expresión general vista en el punto anterior puede ser algo complicado dada la cantidad de variables en juego. Para los casos más frecuentes en las estructuras para edificios, el CIRSOC 201-2005, artículo 12.2.2, presenta las siguientes expresiones simplificadas derivadas de la general:

a) Cuando se cumple **al menos uno** de los dos grupos de condiciones siguientes:

- El recubrimiento libre de la barra o alambre a empalmar o anclar es $\geq d_b$, y la separación entre dos barras o alambres contiguos que se empalman o anclan es $\geq d_b$, y toda la longitud de empalme o anclaje está envuelta por un estriado mayor o igual que el mínimo reglamentario.
- El recubrimiento libre de la barra o alambre a empalmar o anclar es $\geq d_b$ y la separación entre dos barras o alambres contiguos que se empalman o anclan es $\geq 2 d_b$.

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{12}{25} \cdot \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda \quad \text{Para barras o alambres con } d_b \leq 16 \text{ mm } (\psi_s = 0,80)$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{3}{5} \cdot \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda \quad \text{Para barras con } d_b > 16 \text{ mm } (\psi_s = 1,00)$$

b) Otros casos

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{18}{25} \cdot \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda \quad \text{Para barras o alambres con } d_b \leq 16 \text{ mm } (\psi_s = 0,80)$$

$$\frac{\ell_d}{d_b} = \frac{9}{10} \cdot \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda \quad \text{Para barras con } d_b > 16 \text{ mm } (\psi_s = 1,00)$$

Las simplificaciones introducidas para ambos casos se basan en el estudio de los límites de variación del factor $\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)$; ver el artículo C12.2.

Cuando se cumplen las condiciones del caso a), se encuentra que $\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right) \geq 1,50$, y por lo tanto se toma este valor mínimo, de donde derivan las dos expresiones mostradas.

El caso b) considera que no hay armadura transversal, y que el recubrimiento será cuanto menos igual a d_b . Por lo tanto $\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right) = 1$.

9.A.1.3.- Tabla de longitudes de anclaje obtenidas mediante las expresiones simplificadas

Es evidente, por lo anteriormente expuesto, que en la mayoría de los casos prácticos que se presentan a diario, serán $\psi_e = \lambda = 1,0$, y ADN 420 ($f_y = 420$ MPa). Esto permite definir, a partir de las expresiones simplificadas, una serie bastante reducida de valores ℓ_d / d_b para su uso práctico.

La tabla que se muestra a continuación será válida, entonces, para:

- Hormigones de peso normal (no livianos)
- Barras conformadas de acero
- Acero de tensión de fluencia especificada $f_y = 420$ MPa. Independiente de esto, los valores para un acero de tensión de fluencia especificada diferente (como ser el uso de malla soldada de alambres conformados AM 500 N) se obtienen multiplicando el valor de tabla por el cociente entre la nueva tensión de fluencia especificada y 420 MPa.
- Las condiciones de aplicación descriptas. Para cualquier caso el recubrimiento libre debe ser mayor que d_b .

Obsérvese que:

- la condición a) corresponde a los casos típicos de vigas, en los que debe estar presente un estriado mínimo, o bien losas, en las que la separación entre barras es siempre mayor que $2 d_b$.
- la condición b), en cambio, solamente requiere que se cumpla el requisito de recubrimiento libre, y por lo tanto es aplicable a una mayor variedad de casos. Sin embargo, ésta mayor libertad de aplicación se penaliza con mayores longitudes ℓ_d (50% por encima del caso a)).

Tabla T1										
Condiciones de aplicación		Zona de adherencia	Diámetro de barras o alambres [mm]	f'_c [MPa]						
				20	25	30	35	40	50	
a)	Recubrimiento $\geq d_b$ y separación $\geq d_b$ y estribado mayor que el mínimo ⁽³⁾ o bien: Recubrimiento $\geq d_b$ y separación $\geq 2 d_b$	Mala ⁽¹⁾	$d_b \leq 16$	59	52	48	44	41	37	l_d/d_b
			$d_b > 16$	73	66	60	55	52	46	
		Buena ⁽²⁾	$d_b \leq 16$	45	40	37	34	32	29	
			$d_b > 16$	56	50	46	43	40	36	
b)	Otros casos	Mala	$d_b \leq 16$	88	79	72	66	62	56	
			$d_b > 16$	110	98	90	83	78	70	
		Buena	$d_b \leq 16$	68	60	55	51	48	43	
			$d_b > 16$	85	76	69	64	60	54	

- (1) Barras o alambres horizontales con **300 mm** o más de hormigón por debajo del anclaje o empalme de las mismas.
- (2) Cualquier otro caso.
- (3) Para chequear si el estribado es mayor que el mínimo, debe ser (artículo 11.5.6.3):
 $A_v / s \geq b_w / C$, donde **C** depende de la resistencia especificada del hormigón y de la tensión especificada de fluencia para la armadura. Para $f_{yt} = 420$ MPa, **C** toma valores 1,26 , 1,26 , 1,23 , 1,14 , 1,06 y 0,95 para $f'_c = 20, 25, 30, 35, 40$ y 50 MPa respectivamente. Con b_w en [mm], se obtiene el estribado mínimo en [mm²/m].

9.A.1.4.- Corrección por exceso de armadura (CIRSOC 201-2005, artículo 12.2.5)

Cuando la armadura realmente dispuesta (A_s adoptada) supera a la necesaria por cálculo (A_s requerida), es posible reducir la longitud de anclaje, pero no la de empalme, en un factor igual a $\frac{A_s \text{ requerida}}{A_s \text{ adoptada}}$.

Obviamente, esta corrección no puede ser realizada si se desea que el acero llegue a la tensión f_y . **No debe ser utilizada en estructura antisísmicas, en las que la ductilidad es fundamental.**

Para cualquier caso, es necesario considerar que si se ha colocado armadura en demasía por alguna razón, la resistencia de la pieza se verá incrementada. Pero si el anclaje se redimensiona corrigiendo por el exceso de armadura, la resistencia de la pieza se verá limitada por la del anclaje, desperdiciando el exceso de resistencia obtenido por la mayor cantidad de acero colocada. Sí es muy útil a la hora de verificar la capacidad de anclajes y/o empalmes ya construidos.

9.A.1.5.- Particularidades para los paquetes de barras (CIRSOC 201-2005, artículo 12.4)

Cuando las armaduras se han dispuesto en paquetes, la longitud de anclaje se determinará para cada barra por separado, sin aplicar el factor de modificación por diámetro de la barra. Esta longitud aumentará un 20% si el paquete es de 3 barras, y un 33% si es de 4 barras. El factor de modificación por diámetro de la barra se determina utilizando el diámetro equivalente del paquete de barras, de acuerdo con la expresión:

$$d_{b,eq} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \sum A_s} \quad \text{donde } \sum A_s \text{ es el área total del paquete de barras.}$$

Si se desea utilizar la tabla **T1**, se puede proceder de manera análoga a una barra aislada, pero en el momento de discriminar entre $d_b \leq 16 \text{ mm}$ y $d_b > 16 \text{ mm}$, se debe utilizar el $d_{b,eq}$, y luego obtener la longitud de anclaje de cada barra multiplicando el coeficiente de tabla por cada diámetro.

9.A.1.6.- Cálculo utilizando la expresión sin simplificaciones

Si bien la utilización de la tabla **T1** es muy práctica, también es cierto que las simplificaciones introducidas hacen que todos los casos se traten como si las condiciones de aplicación fueran las extremas de cada caso. Esta situación deriva en que, frecuentemente, las longitudes de anclaje resultan mayores que las necesarias.

Cuando el recubrimiento es mayor que d_b , o el estribado es mayor que el mínimo, el beneficio de estas condiciones más favorables solamente puede ser tenido en cuenta mediante el uso de la expresión general.

9.A.2.- Anclaje con ganchos de barras y alambres traccionados

9.A.2.1.- Expresión general

El CIRSOC 201-2005, artículos 12.5.1 y 12.5.2, considera la posibilidad de utilizar un gancho normal, que puede presentar alguna de las dos configuraciones que se muestran en la Figura 9.A.2.1 (gancho a 90° o a 180°)

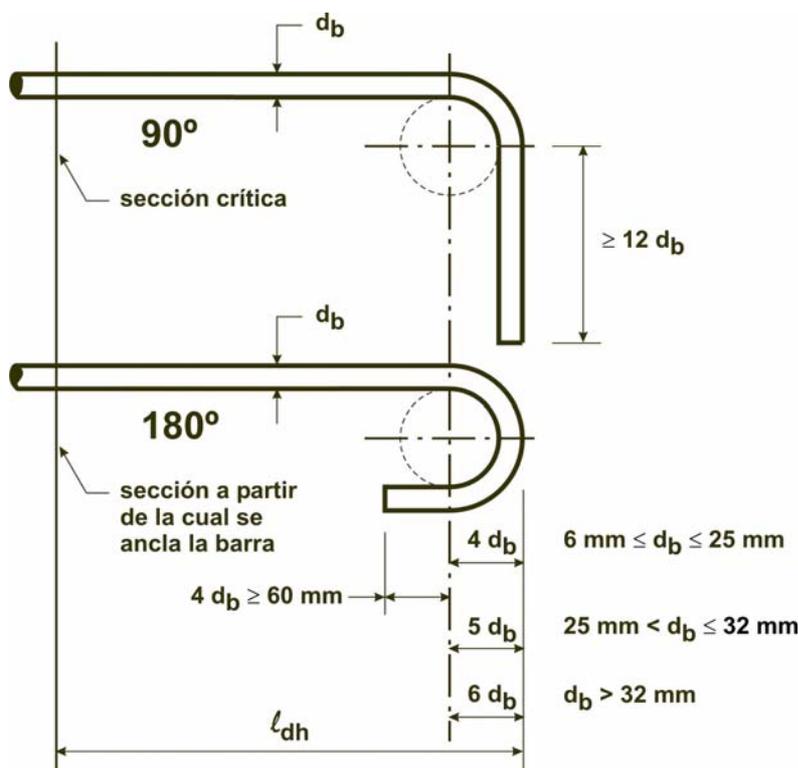


Figura 9.A.2.1

La expresión que permite determinar el valor l_{dh} es:

$$\frac{l_{dh}}{d_b} = 0,24 \cdot \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}} \cdot \psi_e \cdot \lambda$$

l_{dh} debe adoptarse siempre mayor que el mayor entre $8 d_b$ ó 150 mm .

Los factores ψ_e y λ son los vistos en 9.A.1.1.

En la mayoría de las estructuras de hormigón armado, resulta $\lambda = 1$ por tratarse de casos en los que el hormigón es de peso normal.

La tabla **T2** resume los valores para diferentes calidades del hormigón, y acero ADN 420 ($f_y = 420$ MPa):

Tabla T2						
f'_c [MPa]	20	25	30	35	40	50
$\ell_{dh} / d_b =$	23	20	18	17	16	14

9.A.2.2.- Factores de corrección (CIRSOC 201-2005, artículo 12.5.3)

El valor de ℓ_{dh} se debe corregir en función de diversos factores, aplicables solamente para barras con $d_b \leq 32$ mm:

- Corrección por recubrimiento: Si el recubrimiento medido perpendicularmente al plano del gancho es ≥ 60 mm, y – para ganchos a 90° – el recubrimiento medido según la prolongación de la barra es ≥ 50 mm, **aplicar un factor 0,70**.
- Corrección por estribos para ganchos a 90° : Cuando los mismos están encerrados por estribos cerrados paralelos o perpendiculares a la barra que se ancla, cuya separación sea $\leq 3 d_b$ y cubran todo el rectángulo mínimo que inscribe al gancho, **aplicar un factor 0,80**.
- Corrección por estribos para ganchos a 180° : Cuando los mismos están encerrados por estribos cerrados perpendiculares a la barra que se ancla, cuya separación sea $\leq 3 d_b$ y cubran la longitud ℓ_{dh} , **aplicar un factor 0,80**.
- Corrección por exceso de armadura: Se aplica de igual manera que en el punto 9.A.1.4.

9.A.2.3.- Ganchos en extremos de elementos (CIRSOC 201-2005, artículo 12.5.4)

Cuando el gancho normal se ubica en el extremo libre de un elemento (extremo de una viga en voladizo, por ejemplo), y el recubrimiento en alguno de los lados o en alguno de los bordes superior o inferior es ≤ 60 mm, se deben disponer estribos perpendiculares a la barra en toda la longitud ℓ_{dh} , con una separación $\leq 3 d_b$. El estribo más cercano a la parte doblada del gancho debe estar a una distancia $\leq 2 d_b$ de ésta.

9.A.2.4.- Ganchos en anclajes comprimidos

Los ganchos no se consideran efectivos como anclajes de barras comprimidas (CIRSOC 201-2005, artículo 12.5.5).

9.B.- EMPALMES

9.B.3.- Empalmes de barras y alambres rectos traccionados

9.B.3.1.- Longitud de empalme por yuxtaposición

La longitud de empalme se calcula partiendo de la longitud l_d calculada según lo visto en el punto 9.A.1, con la salvedad de que no se debe aplicar la corrección por exceso de armadura vista en 9.A.1.4 (CIRSOC 201-2005, artículo 12.15.1).

Es necesario considerar la clase del empalme (CIRSOC 201-2005, artículo 12.15.2), la que se define a partir de las siguientes condiciones:

- Si se empalma una sección $\leq 50\%$ de la armadura total **Y** la armadura adoptada es mayor o igual que dos veces la requerida; el empalme es **Clase A**.
- Para cualquier otra combinación de los dos factores mencionados (% de armadura empalmada y relación $A_{s \text{ adoptada}} / A_{s \text{ requerida}}$), el empalme es **Clase B**.

En función de las clases anteriormente definidas, la longitud de empalme vale:

Clase A: $1,0 \cdot l_d$

Clase B: $1,3 \cdot l_d$

$l_{e \text{ mínimo}} = 300 \text{ mm}$ para cualquier caso

9.B.3.2.- No aplicabilidad de los empalmes traccionados por yuxtaposición

Este tipo de empalme no se podrá aplicar en tensores o elementos con tracción predominante (CIRSOC 201-2005, artículo 12.15.5). Siendo necesario en esos casos recurrir a empalmes soldados o mediante dispositivos mecánicos.

9.B.4.- Empalmes de barras rectas comprimidas

9.B.4.1.- Longitud de empalme por yuxtaposición

El CIRSOC 201-2005, artículo 12.16.1, establece las siguientes longitudes de empalme de las barras comprimidas para hormigones H-20 y superiores:

Si $f_y \leq 420 \text{ MPa}$: $0,07 \cdot f_y \cdot d_b$

Si $f_y > 420 \text{ MPa}$: $(0,13 \cdot f_y - 25,2) \cdot d_b$

Con un mínimo absoluto de 300 mm para cualquier situación.

En el caso de un acero ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$), las longitudes de empalme por yuxtaposición de barras comprimidas resultan aproximadamente iguales a $30 d_b$ para hormigones de 20 MPa o más.

9.B.4.2.- Empalmes a tope

El CIRSOC 201-2005, artículo 12.16.4, permite la utilización de empalmes a tope para barras comprimidas, solo en aquellos elementos que tengan estribos cerrados o zunchos, sin la necesidad de recurrir a patentes. Para ello es necesario garantizar un aserrado de las barras de manera tal que el plano de la sección transversal se encuentre normal al eje de la barra, con una tolerancia de $1,5^\circ$, y asegurando la inexistencia de rebarbas. Una vez colocada la pieza, es necesario garantizar el alineamiento con un dispositivo adecuado que permita visualizar el contacto de ambas caras antes del hormigonado.

9.B.4.3.- Factores de corrección

- En elementos comprimidos, con zunchos transversales que contengan a la armadura empalmada, se puede aplicar un factor de corrección igual a **0,75** (artículo 12.17.2.5).
- En elementos comprimidos, en los que existan estribos a lo largo de la longitud de empalme, cuya sección sea $\geq 0,0015 \cdot h \cdot s$, se permite aplicar un factor **0,83** (artículo 12.17.2.4). En la expresión anterior, **h** es la altura total del elemento, y **s** la separación de los estribos (ambas dimensiones en mm).

De cualquier manera, la longitud de empalme final no debe ser menor que 300 mm. Inmediatamente se deduce que, para acero ADN 420 ($f_y = 420$ MPa) y hormigones con $f'_c \geq 20$ MPa, el factor de corrección **0,75** solamente se puede aplicar para barras $d_b 16$ y mayores, mientras que el factor **0,83** puede ser utilizado para $d_b 12$ y mayores. Diámetros menores conducirían a una longitud de empalme inferior a 300 mm.

9.B.4.4.- Empalme de barras de diferentes diámetros

En este caso de acuerdo con el CIRSOC 201-2005, artículo 12.16.2, la longitud de empalme será la mayor entre la longitud de anclaje de la barra de mayor d_b , y la longitud de empalme de la de menor d_b .

9.B.5.- Anclaje de armadura transversal (estribos)

Los estribos pueden anclarse de alguna de las maneras que se muestran en la Figura 9.B.5.1. Las reglas generales que se deben cumplir son las usuales: Para los casos de corte sin torsión, los estribos deben envolver todas las barras, traccionadas o comprimidas. Cuando además de corte la sección esté solicitada por torsión, los estribos deben ser cerrados y continuos desde el punto de vista resistente.

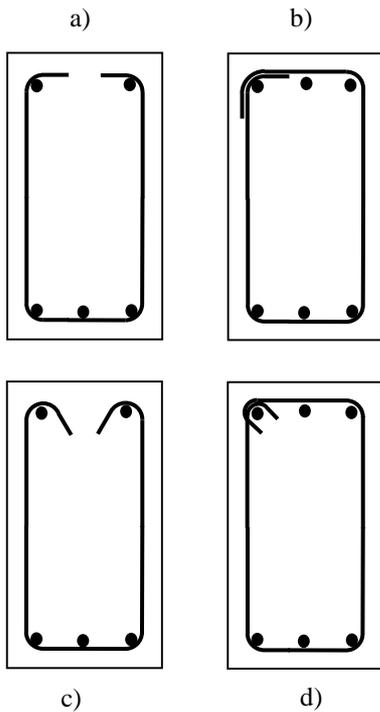
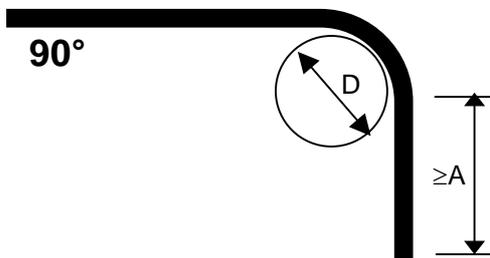


Figura 9.B.5.1

Por lo tanto, las variantes a) y c) (que por otra parte no son los más frecuentes en nuestro medio), se encuentran limitadas a casos de corte exclusivamente, y cuando se tienen solamente dos barras longitudinales en la cara superior. Esta configuración es, por lo tanto, poco práctica para vigas continuas ya que en los apoyos se tienen normalmente más de dos barras para resistir los momentos negativos.

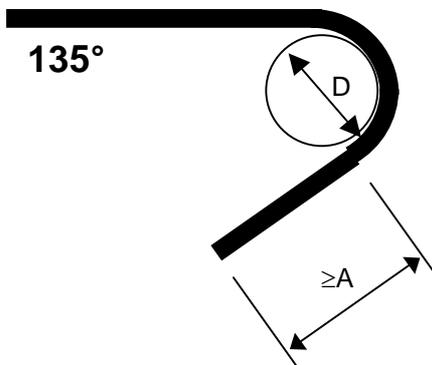
En cualquier caso, el anclaje del estribo debe realizarse mediante un gancho normal que envuelva una barra longitudinal, el cual puede ser a 90° (casos a) y b)), o bien a 135° (casos c) y d)).

Las dimensiones mínimas requeridas para los ganchos de anclaje (CIRSOC 201-2005, artículo 7.1.3) son las siguientes:



Ganchos a 90°:

- $d_{be} \leq 16 \text{ mm}$ → $A = 6 d_{be}$
- $16 \text{ mm} < d_{be} \leq 25 \text{ mm}$ → $A = 12 d_{be}$



Ganchos a 135°:

- $d_{be} \leq 25 \text{ mm}$ → $A = 6 d_{be}$

Figura 9.B.5.2

El diámetro del mandril de doblado de los ganchos para estribos difiere del general para cualquier otro doblado (CIRSOC 201-2005, artículo 7.2.2) siendo de aplicación la tabla **T3**, adoptada de la tabla 7.2.3 del CIRSOC 201-2005.

Tabla T3	
Diámetro de la barra o alambre [mm]	D
$d_{be} \leq 16$	$4 d_{be}$
$16 < d_{be} \leq 25$	$6 d_{be}$
$25 < d_{be} \leq 32$	$8 d_{be}$
$32 < d_{be}$	$10 d_{be}$

El CIRSOC 201-2005, artículo 7.11.3, prevé otra forma algo más indirecta de anclar los estribos que puede ser de utilidad cuando las vigas o elementos a estribar son muy altos o cuando se presentan situaciones complejas de armaduras longitudinales. La disposición puede verse en la Figura 9.B.5.3 y, como puede apreciarse, se trata de una solución obtenida a base de empalmes y no de anclajes que, obviamente, requerirá una mayor cantidad de acero.

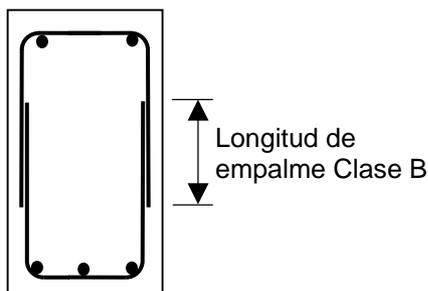


Figura 9.B.5.3

De acuerdo con el CIRSOC 201-2005, artículo 12.13.2.2, si el diámetro de la barra que constituye el estribo está comprendido entre:

$$16 \text{ mm} < d_{be} \leq 25 \text{ mm}$$

se debe comprobar que la longitud embebida entre la altura media de la sección y el gancho normal de anclaje (de acuerdo con lo visto anteriormente) resulte mayor o igual a (Figura 9.B.5.4):

$$l_d \geq \frac{0,17 \cdot d_{be} \cdot f_{yt}}{\sqrt{f'_c}}$$

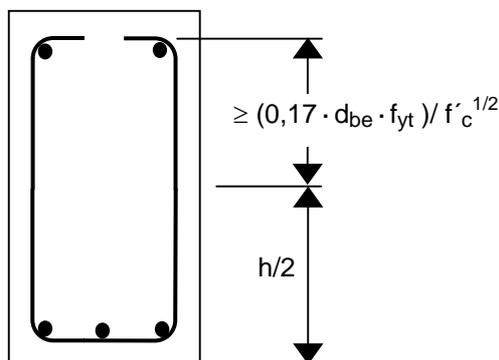
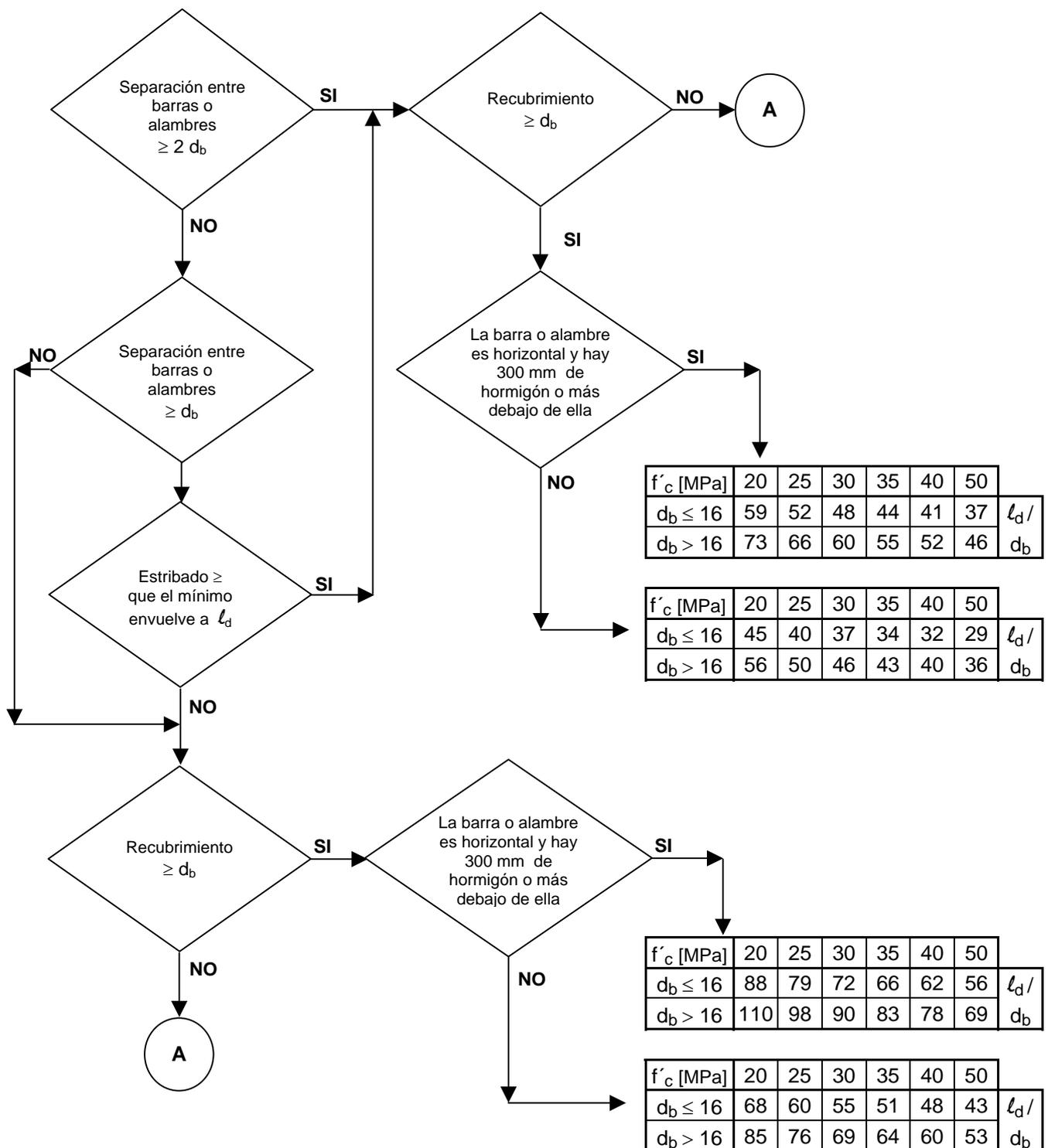


Figura 9.B.5.4

DF 9.I.- Anclaje de barras y alambres traccionados – Expresiones simplificadas

Diagrama de flujo para un acero ADN 420* ($f_y = 420$ MPa) y hormigón de peso normal ($\lambda = 1$)

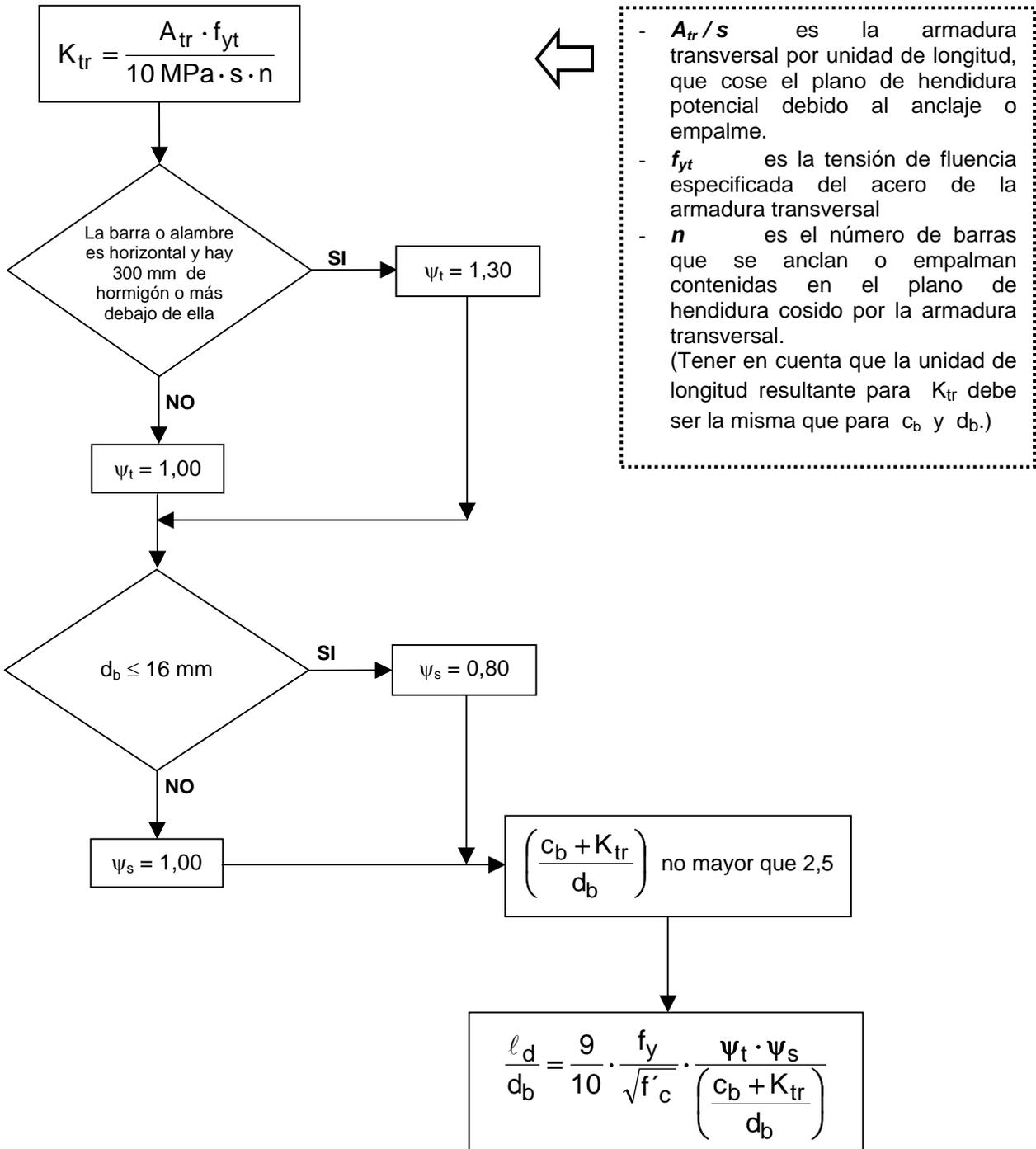


NOTAS:

- 1) **A:** Se debe usar la expresión completa. Chequear los requerimientos de recubrimiento, ya que para la gran mayoría de los casos, el recubrimiento deber ser $\geq d_b$.
- 2) En cualquier caso, l_d debe ser mayor o igual que 300 mm.
- 3) Si corresponde, aplicar la corrección por exceso de armadura a los valores finales.
- *) Para aceros diferentes al ADN 420 multiplicar los valores de tabla por el cociente entre la nueva tensión de fluencia especificada y 420 MPa.

DF 9.II.- Anclaje de barras y alambres traccionados – Expresión general

Diagrama de flujo para hormigón de peso normal ($\lambda=1$)

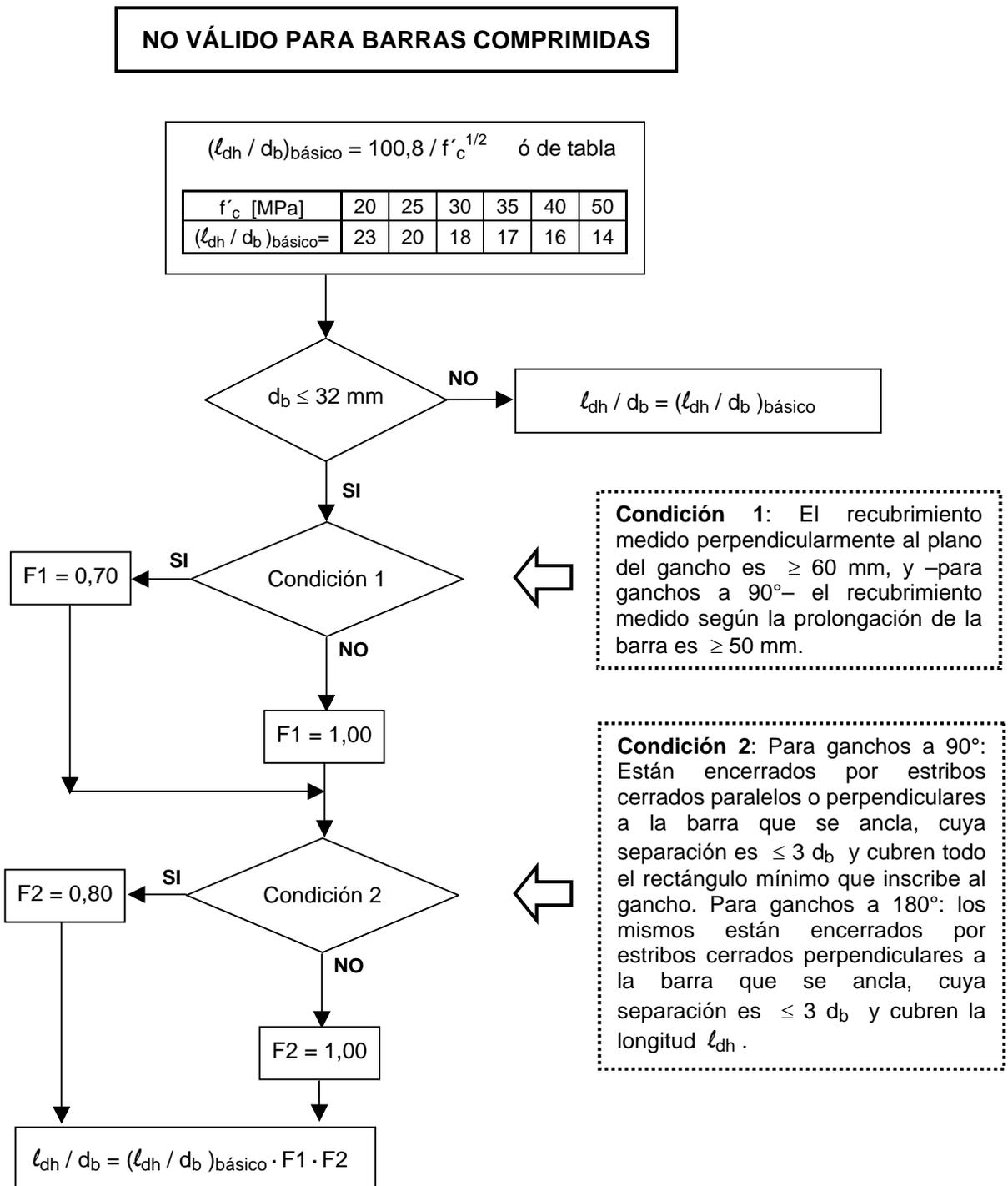


NOTAS:

- 1) En cualquier caso, ℓ_d debe ser mayor o igual que 300 mm.
- 2) Si corresponde, aplicar la corrección por exceso de armadura a los valores finales.

DF 9.III.- Anclaje de barras y alambres traccionados con ganchos normales

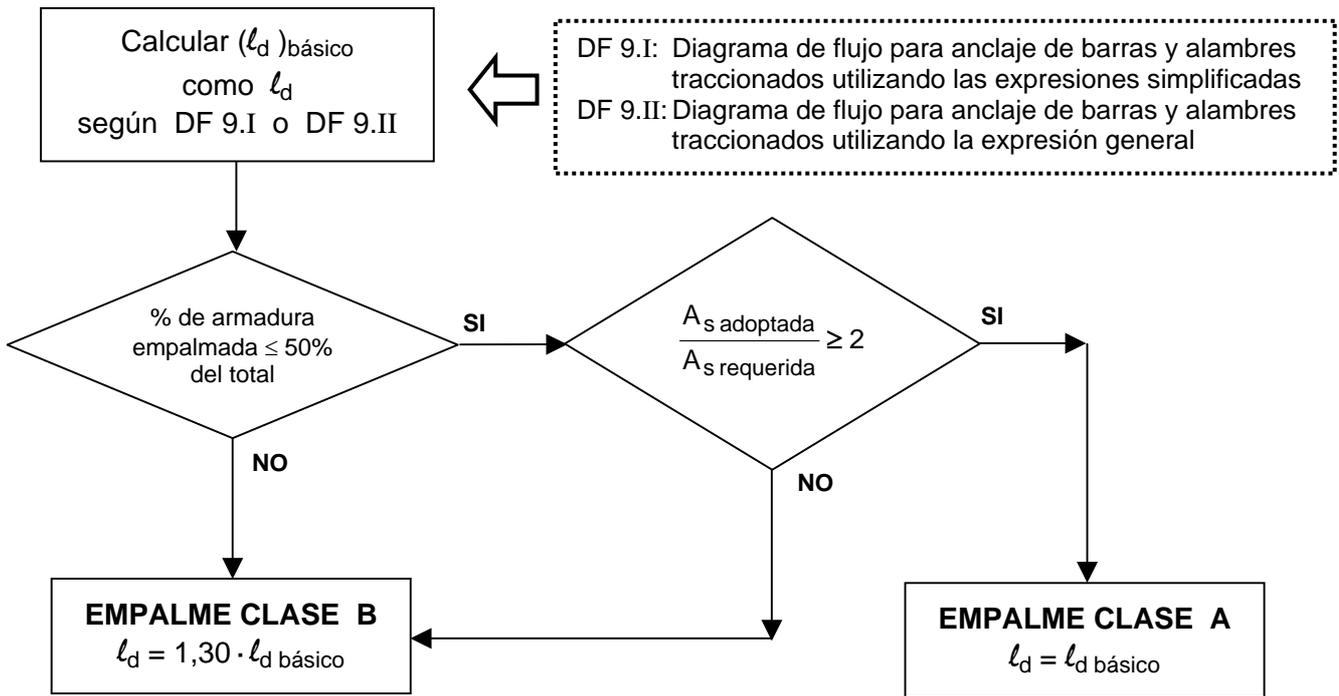
Diagrama de flujo para un acero ADN 420* ($f_y = 420$ MPa) y hormigón de peso normal ($\lambda=1$)



NOTAS:

- 1) En cualquier caso, ℓ_{dh} debe ser mayor que $8 d_b$ o 150 mm.
- 2) Si corresponde, aplicar la corrección por exceso de armadura a los valores finales.
- *) Para aceros diferentes al ADN 420 multiplicar los valores de tabla por el cociente entre la nueva tensión de fluencia especificada y 420 MPa.

DF 9.IV.- Empalme de barras y alambres rectos traccionados

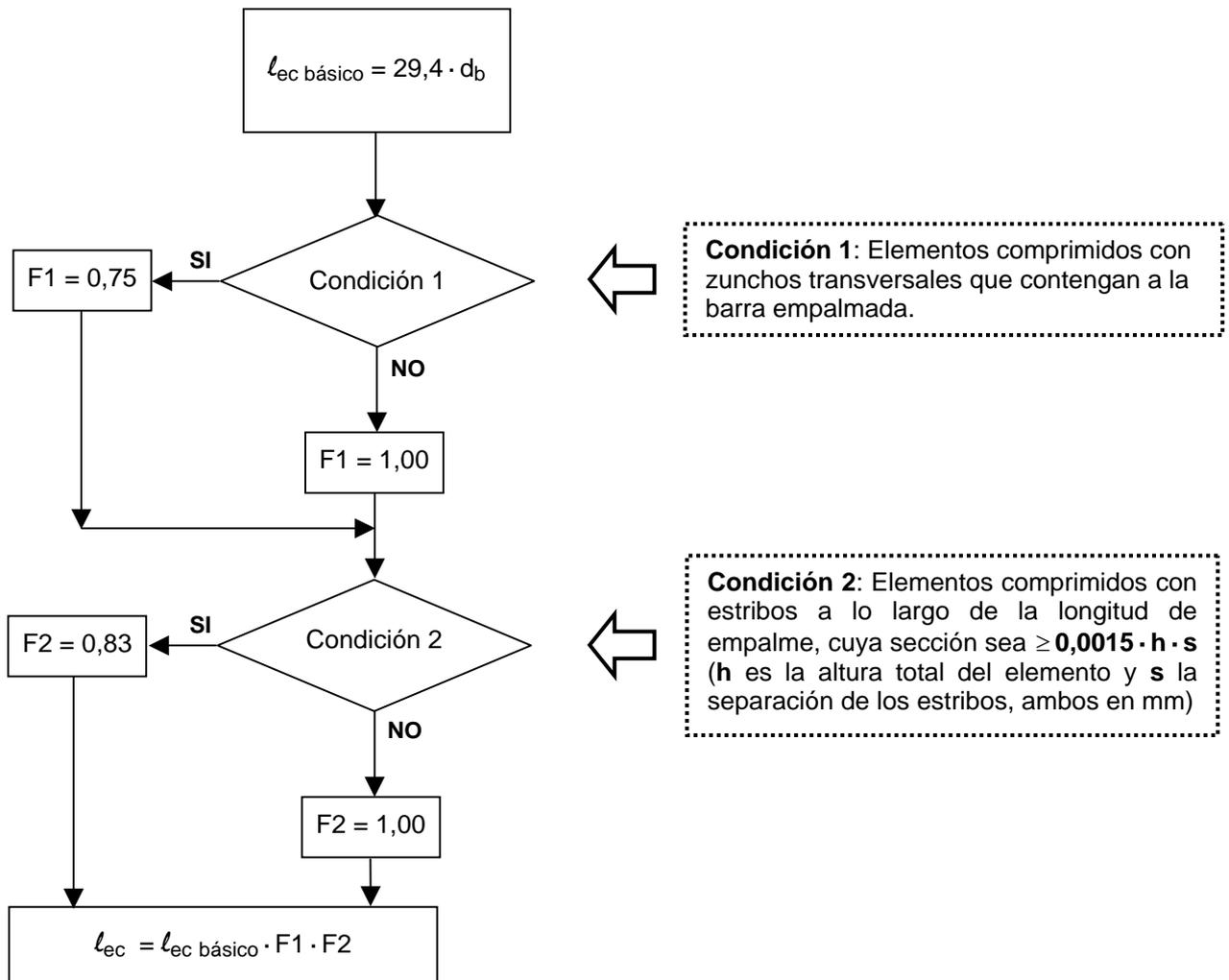


NOTAS:

- 1) En cualquier caso, l_{dh} debe ser mayor o igual que 300 mm.
- 2) NO aplicar la corrección por exceso de armadura a los valores finales.
- 3) **NO aplicar en elementos predominantemente traccionados. En esos casos utilizar soldadura o empalmes mecánicos.**

DF 9.V.- Empalme de barras rectas comprimidas

Diagrama de flujo para hormigones H-20 y superiores, y aceros ADN 420 ($f_y = 420$ MPa).



NOTAS:

- 1) En cualquier caso, l_{ec} debe ser mayor o igual que 300 mm.
- 2) En este tipo de empalme l_{ec} NO varía linealmente con f_y . Para f_y distinto a 420 MPa, ver el Reglamento.

PRETENSADO EN FLEXIÓN

10.1.- Clasificación

El CIRSOC 201-2005, artículo 18.3.3, establece las siguientes clases de elementos pretensados en función de la máxima tensión de tracción que se desarrolle en la zona traccionada por las cargas exteriores y precomprimida por el pretensado:

Clase	Descripción	Valor de la tensión f_t
U	No Fisurados (uncracked)	$f_t \leq 0,7 \cdot \sqrt{f'_c}$
T	Transición (transition)	$0,7 \cdot \sqrt{f'_c} < f_t \leq \sqrt{f'_c}$
C	Fisurados (cracked)	$f_t > \sqrt{f'_c}$

Establece asimismo que las losas pretensadas armadas en dos direcciones deben proyectarse como elementos Clase U.

10.2.- Etapas (Estados ó Niveles)

En lo que sigue se denominará “ t_o ” al tiempo en que se realiza el tesado de los elementos tensores y “ t_∞ ” al tiempo para el que puede suponerse que ya se han producido todas las pérdidas reológicas (fluencia, contracción y relajación).

El CIRSOC 201-2005 habla de “etapas” de carga estableciendo que las tres principales son (artículos C18.2.1 y C18.2.2):

- Etapa de introducción o transferencia del pretensado (t_o y cargas concomitantes)
- Etapa de carga de servicio (t_∞ y cargas de servicio, es decir, no mayoradas)
- Etapa de carga mayorada (t_∞ y cargas mayoradas)

El término “etapa” podría resultar desafortunado dado que da la idea de que una estructura, a lo largo de su vida útil, tendría que recorrer todas las etapas, incluyendo la de carga mayorada lo cual es una situación absolutamente eventual.

Se mencionan otras posibles etapas tales como la carga de fisuración.

10.3.- Pérdidas

10.3.1.- Generalidades

Se denomina pérdida a la diferencia entre la fuerza medida en el gato en el momento del tesado y la fuerza efectiva en un punto cualquiera del cable en un momento cualquiera en el tiempo.

La siguiente Tabla 10.3.1 resume las principales causas de pérdidas (artículo 18.6.1):

Tabla 10.3.1

	Instantáneas	Diferidas
Originadas en el acero	Acuñamiento de anclajes Fricción	Relajación
Originadas en el hormigón	Acortamiento elástico	Fluencia lenta Contracción

Se denominan pérdidas instantáneas a aquellas que se originan durante el proceso de puesta en tensión y anclaje de los elementos tensores y diferidas a aquellas que se desarrollan a través del tiempo (con un fuerte desarrollo en los primeros días y una tendencia a alcanzar su valor total en el curso de unos pocos años).

Si bien existen expresiones para calcular pérdidas, es bien sabido que dichas expresiones sólo aportan una aproximación a los valores reales los que pueden variar mucho de acuerdo a la composición del hormigón, condiciones ambientales, etc. Si la estructura en estudio resultara muy sensible a la magnitud de las pérdidas deberá realizarse un estudio más cuidadoso para obtener valores más realistas de las mismas.

10.3.2.- Expresiones de cálculo

El CIRSOC 201-2005 desarrolla las expresiones correspondientes a pérdidas por fricción en cables de postesado y en sus Comentarios indica referencias bibliográficas donde poder obtener información adicional.

Los fenómenos reológicos (fluencia lenta, contracción y relajación) interactúan entre sí por lo que el cálculo del efecto conjunto es extremadamente complejo. Algunos autores sugieren calcular separadamente los efectos y luego sumarlos.

En lo que sigue transcribiremos las propuestas que se desarrollan en el CIRSOC 201-2005 (sólo pérdidas por fricción) y en la siguiente referencia recomendada por el CIRSOC: *Zia, Paul et al., "Estimating Prestress Losses", Concrete International: Design and Construction, Vol 1, No. 6, June 1979, pp. 32-38.*

10.3.2.1.- Acortamiento elástico (ES: Elastic Shortening of Concrete)

10.3.2.1.1.- Hormigón postesado

Si la armadura estuviera constituida por un único elemento tensor, el acortamiento del hormigón por efecto del proceso de postesado no provocaría una pérdida en la fuerza del cable dado que, al estar apoyado el gato contra la pieza de hormigón, este acortamiento sería compensado por un mayor recorrido del cilindro.

En el caso de existir más de un elemento tensor sí existirán pérdidas producidas por el acortamiento que introduce la puesta en tensión de un cable sobre los cables ya anclados. Estas pérdidas suelen denominarse por "no simultaneidad del pretensado". A los efectos prácticos suele representarse el fenómeno anterior a través de una pérdida de tensión media del conjunto de las armaduras activas igual a la mitad del producto de la

relación entre módulos de elasticidad entre el acero y el hormigón y la tensión que el pretensado y las cargas externas concomitantes en el momento del tesado producen en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores. En realidad, si el número “n” de cables a tesar no es muy grande, en lugar de la mitad del cociente citado habría que tomar una fracción igual a: $(n-1)/(2 \cdot n)$

10.3.2.1.2.- Hormigón pretesado

Cuando se libera la fuerza anclada en los estribos del banco de tesado la adherencia pone en tensión al hormigón. Este, al acortarse produce una pérdida de tensión en el acero que es igual al producto de la relación de módulos de elasticidad entre el acero y el hormigón y la tensión que el pretensado y las cargas externas concomitantes con el momento del tesado producen en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores.

10.3.2.1.3.- Expresiones de cálculo

$$ES = K_{es} \cdot E_s \cdot \frac{f_{cir}}{E_{ci}}$$

$$f_{cir} = K_{cir} \cdot f_{cpi} - f_g$$

donde

$K_{es} = 1,0$ para elementos pretesados

$K_{es} = 0,5$ para elementos postesados en los que los cables son tesados en forma consecutiva. En cualquier otro caso K_{es} variará entre 0 y 0,5

E_s = Módulo de elasticidad de los elementos tensores (del orden de 196000 MPa)

E_{ci} = Módulo de elasticidad del hormigón en el momento del tesado = $4700 \cdot \sqrt{f'_c}$ siendo f'_c la resistencia del hormigón en el momento del tesado

f_{cir} = Tensión de compresión neta en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores inmediatamente después de haberse aplicado la totalidad del pretensado

f_{cpi} = Tensión en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores producida por la fuerza de tesado consideradas solamente las pérdidas por fricción y por acuñamiento de anclajes

f_g = Tensión en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores debido al peso propio y otras cargas presentes en el momento del pretensado

$k_{cir} = 0,9$ para elementos pretesados y $1,0$ para elementos postesados

En el caso de elementos con cables no adherentes la expresión a utilizar será:

$$ES = K_{es} \cdot E_s \cdot \frac{f_{cpa}}{E_{ci}}$$

donde

f_{cpa} = Tensión media en el hormigón a lo largo de la longitud de elemento a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores inmediatamente después de haberse aplicado la totalidad del pretensado.

10.3.2.2.- Contracción del hormigón (SH: Shrinkage of Concrete)

La contracción es la deformación que sufre una pieza de hormigón por movimientos del agua no fijada químicamente al gel de cemento. Aunque el fenómeno más conocido es la pérdida de agua con la consiguiente disminución de volumen, existe también el fenómeno opuesto denominado hinchamiento o expansión.

Obviamente, desde el punto de vista práctico interesa solamente la contracción que se produce desde el momento del tesado hasta el momento en que se desea conocer el pretensado efectivo.

Dado que la mayoría de los elementos pretesados son puestos en tensión a edades muy tempranas, los efectos de la contracción son mucho más importantes que en elementos postesados.

Las variables que intervienen en la evaluación de la contracción son muchas pero la bibliografía propuesta por el CIRSOC considera solamente las siguientes¹:

- i) RH: Humedad media del ambiente que rodea al elemento
- ii) V/S: Relación entre la sección transversal de la pieza y su perímetro (en rigor se trata de la relación Volumen/Superficie). En algunos textos se la denomina "espesor ficticio".
- iii) Tiempo transcurrido desde la finalización del curado húmedo hasta la aplicación del pretensado

La expresión que propone es la siguiente:

$$SH = 8,2 \times 10^{-6} \cdot K_{sh} \cdot E_s \cdot \left(1 - 0,024 \cdot \frac{V}{S}\right) \cdot (100 - RH)$$

donde

$K_{sh} = 1,0$ para elementos pretesados

K_{sh} = Para elementos postesados se extrae de la Tabla 10.3.2.2.1

E_s = Módulo de elasticidad de los elementos tensores (del orden de 196000 MPa)

V/S = Está expresado en centímetros

RH = Debería determinarse en cada caso. Una orientación puede tomarse de la Tabla 10.3.2.2.2

¹ Deja de lado variables tales como la cuantía de armaduras pasivas, la composición del hormigón y el tiempo transcurrido desde el momento del tesado.

Tabla 10.3.2.2.1

Tiempo en días (*)	1	3	5	7	10	20	30	60
K_{sh}	0,92	0,85	0,80	0,77	0,73	0,64	0,58	0,45
(*) Tiempo medido desde la finalización del curado húmedo hasta la puesta en tensión								

Tabla 10.3.2.2.2

Ambiente	Humedad relativa media en %
En aire muy húmedo	90
En general al aire libre	70
En aire seco (p.e. en ambientes interiores secos)	50

10.3.2.3.- Fluencia lenta del hormigón (CR: Creep of Concrete)

De forma simplificada se engloban en el concepto de fluencia todas las deformaciones diferidas, elásticas y plásticas, que dependen de la tensión. También en forma simplificada, y siempre que la tensión actuante no sea demasiado elevada (digamos no superior al 40 o 50% de la tensión de rotura), la deformación de fluencia puede suponerse proporcional a la deformación elástica instantánea.

En rigor la fluencia lenta se ve afectada por prácticamente los mismos factores que la contracción aunque la bibliografía recomendada por el CIRSOC hace un abordaje bastante simplificado a través de la expresión:

$$CR = K_{cr} \cdot \frac{E_s}{E_c} \cdot (f_{cir} - f_{cds})$$

donde

K_{cr} = 2,0 para elementos pretesados y 1,6 para elementos postesados

E_s = Módulo de elasticidad de los elementos tensores (del orden de 196000 MPa)

E_c = Módulo de elasticidad del hormigón a 28 días = $4700 \cdot \sqrt{f'_c}$

f_{cir} = Tensión de compresión neta en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores inmediatamente después de haberse aplicado la totalidad del pretensado (ver el punto 10.3.2.1.3)

f_{cds} = Tensión en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores debida a todas las cargas permanentes que se agregan luego del tesado

La diferencia entre los valores de K_{cr} para elementos pretesados y postesados admite el mismo comentario respecto a las edades del hormigón en el momento del tesado que se hizo en el caso de contracción.

10.3.2.4.- Relajación de los cables (RE: Relaxation of Tendons)

La única pérdida significativa que presenta el acero en el tiempo es la relajación, es decir, la pérdida de tensión a deformación constante.

El valor de la relajación depende del tipo de acero, de la tensión de tesado, del tiempo transcurrido desde la puesta en tensión y de la temperatura. Asimismo depende de la interrelación con las otras pérdidas diferidas.

La bibliografía propuesta por el CIRSOC utiliza la siguiente expresión:

$$RE = [K_{re} - J \cdot (SH + CR + ES)] \cdot C$$

k_{re} = Valores básicos de relajación

J = Factor de interacción para la reducción de tensión debido a otras pérdidas

C = Factor por nivel de tensión (f_{pi} / f_{pu})

donde K_{re} y J se extraen de la siguiente Tabla 10.3.2.4.1 en la que se ha realizado una adaptación parcial de los aceros para pretensado que se indican en el artículo 3.6 del Reglamento.

Tabla 10.3.2.4.1

Tipo de elemento tensor	Relevado de tensiones	K_{re} [MPa]	J
Cordón de 3 alambres C-1950	Térmico (Relajación Normal – RN)	144	0,16
Cordón de 3 alambres C-1800		133	0,15
Cordón de 3 alambres C-1750		130	0,14
Cordón de 3 alambres C-1650		122	0,13
Alambre de acero APL-1700	Termomecánico (Baja relajación – BR)	31	0,04
Cordón de 7 alambres C-1900		35	0,04

El coeficiente “C” puede obtenerse a partir de las expresiones que figuran en la siguiente Tabla 10.3.2.4.2 (en el trabajo original no figuran expresiones sino valores):

Tabla 10.3.2.4.2

f_{pi} / f_{pu}	Acero de Relajación Normal	Acero de Baja Relajación
$0,60 \leq f_{pi} / f_{pu} < 0,70$	$0,49 + 5 \cdot (f_{pi} / f_{pu} - 0,60)$	$0,33 + 4 \cdot (f_{pi} / f_{pu} - 0,60)$
$0,70 \leq f_{pi} / f_{pu} \leq 0,80$	$1,00 + 9 \cdot (f_{pi} / f_{pu} - 0,70)$	$0,75 + 5 \cdot (f_{pi} / f_{pu} - 0,70)$

En la Tabla 10.3.2.4.2:

f_{pi} = Tensión en los elementos tensores producida por $f_{pi} = P_{pi} / A_{ps}$

P_{pi} = Fuerza de pretensado en la sección en estudio descontadas solamente las pérdidas por fricción y por acuíñamiento de anclajes, pero antes de ES, CR, SH y RE

A_{ps} = Sección transversal de los elementos tensores

10.3.2.5.- Fricción

Este tipo de pérdidas se da solamente en elementos postesados y se producen durante la puesta en tensión de los cables.

La puesta en tensión de la armadura implica su alargamiento y por lo tanto un desplazamiento relativo respecto a las vainas. Existen tres causas de pérdidas por rozamiento (fricción):

- rozamiento en curva
- rozamiento en recta
- rozamiento en desviadores (pretensado externo)

El CIRSOC 201-2005, artículo 18.6.2.1, propone la siguiente expresión para el cálculo de las pérdidas por fricción:

$$P_{px} = P_{pj} \cdot e^{-(K \cdot \ell_{px} + \mu_p \cdot \alpha_{px})}$$

Si el valor del paréntesis resultara menor o igual que 0,3 la expresión anterior se podrá reemplazar por la siguiente expresión aproximada:

$$P_{px} = P_{pj} \cdot (1 + K \cdot \ell_{px} + \mu_p \cdot \alpha_{px})^{-1}$$

donde

P_{pj} = Fuerza de tesado en el extremo desde donde se efectúa el tesado

P_{px} = Fuerza de tesado evaluada a una distancia " ℓ_{px} " del extremo desde donde se efectúa el tesado

K = Coeficiente de desviación accidental (rozamiento parásito o rozamiento en recta) por metro lineal de cable

ℓ_{px} = Longitud de cable medida desde el extremo desde donde se efectúa el pretensado

μ_p = Coeficiente de fricción por curvatura (o en curva)

α_{px} = Suma de los valores absolutos de las variaciones angulares (desviaciones sucesivas), medidas en radianes, que se producen en el cable a lo largo de ℓ_{px}

Los valores K y μ_p deben obtenerse en forma experimental. Los fabricantes que tienen un sistema de pretensado dan los valores correspondientes a sus sistemas aunque éstos pueden variar fuertemente de acuerdo con la calidad de ejecución de los trabajos en obra.

El CIRSOC 201-2005, tabla C18.6.2, da algunos valores orientadores para los coeficientes anteriores. Estos valores son reproducidos en la siguiente Tabla 10.3.2.5.1:

Tabla 10.3.2.5.1

Condición del cable	Tipo de acero de pretensado	Coefficiente de desviación o curvatura accidental K	Coefficiente de fricción por curvatura μ_p
Cables inyectados en vainas metálicas	Cables de alambre	0,0033 – 0,0049	0,15 – 0,25
	Barras de alta resistencia	0,0003 – 0,0020	0,08 – 0,30
	Cordones de 7 alambres	0,0016 – 0,0066	0,15 – 0,25
Cables no adherentes cubiertos con Mastic	Cables de alambre	0,0033 – 0,0066	0,05 – 0,15
	Cordones de 7 alambres		
Cables no adherentes pre-encontrados	Cables de alambre	0,0010 – 0,0066	
	Cordones de 7 alambres		

Dado que el valor de K depende de la flexibilidad de la vaina, cuando se utilicen conductos rígidos, puede suponerse $K = 0$. También puede hacerse esta suposición cuando se utilicen aceros de gran diámetro dispuestos en conductos semirígidos.

10.3.2.6.- Acuñaamiento de los anclajes

Para producir la transferencia de esfuerzos del gato a los anclajes, se disminuye gradualmente la fuerza que el gato ejerce sobre los elementos tensores por lo que éstos tienden a acortarse. Un dispositivo de anclaje ideal sería aquel que impida totalmente que durante la transferencia se produzcan acortamientos de los elementos tensores en el interior de la pieza que se está pretensando. Los anclajes reales (sobre todo los constituidos por cuñas) permiten un cierto deslizamiento que en nuestro medio suele denominarse “acuñaamiento”. Los proveedores de sistemas de pretensado dan datos referentes a los deslizamientos esperables para cada uno de sus sistemas de anclaje (Δ_{set}). Dado que los corrimientos tienden a producir movimientos relativos entre los elementos tensores y las vainas, se ponen en juego fuerzas de rozamiento que, si las piezas que se están pretensando son suficientemente largas, terminan por anular los efectos del acuñaamiento a una cierta distancia del apoyo activo (Figura 10.3.2.6.1). A los efectos prácticos puede suponerse que la fricción actúa con igual intensidad tanto en el proceso de alargamiento como en el de acortamiento del cable. En la Figura 10.3.2.6.1 se han indicado con “p” a la pendiente de la curva que indica la variación de la fuerza en los elementos tensores. Puede demostrarse que, si la pendiente es constante e igual para la carga que para la descarga, valen las siguientes expresiones:

$$\Delta_{set} = (\text{Área rayada en la Figura 10.3.2.6.1}) / (A_{ps} \cdot E_{ps})$$

$$\text{Longitud afectada} = (\Delta_{set} \cdot A_{ps} \cdot E_{ps} / p)^{1/2}$$

$$\Delta P_{\text{corrimiento}} = \text{Longitud afectada} \cdot 2 \cdot p$$

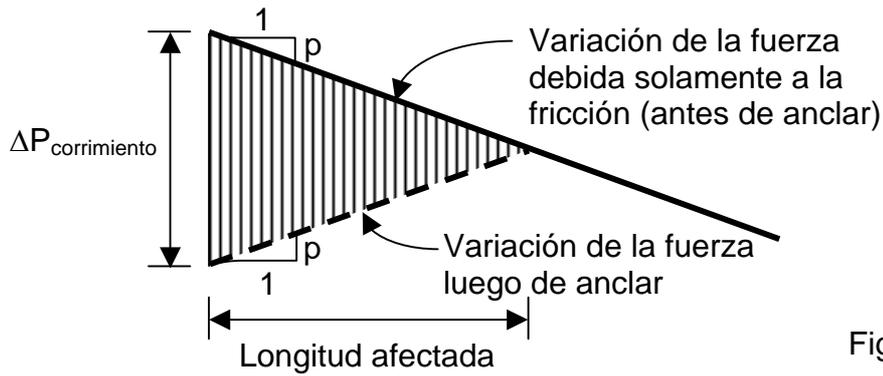


Figura 10.3.2.6.1

10.4.- Tensiones admisibles bajo estados de servicio

10.4.1.- En el hormigón

Para facilitar la identificación de las secciones críticas se utiliza como ejemplo un caso particular consistente en una viga pretensada, postesada con un cable parabólico con excentricidad no nula en los apoyos².

En los párrafos siguientes se resumen las tensiones admisibles fijadas por el CIRSOC 201-2005. En ellos todas las tensiones admisibles se expresan como módulos (sin signos). Cabe acotar que esas tensiones podrían superarse mediante una justificada demostración experimental.

10.4.1.1.- En el momento del tesado (t_0)

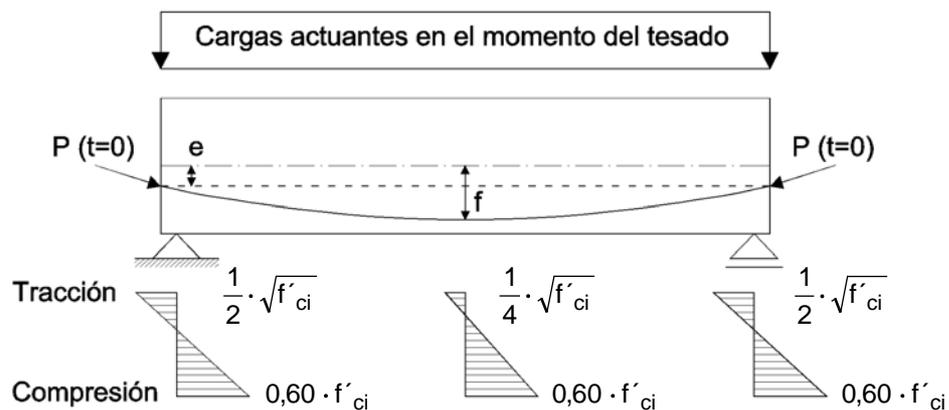


Figura 10.4.1.1

El CIRSOC 201-2005, artículo 18.4.1, denomina a este momento "etapa de introducción o transferencia del pretensado".

² Para hacer más claro el dibujo se ha forzado la escala vertical.

- a) Tensión normal de compresión $\leq 0,60 \cdot f'_{ci}$
- b) Tensión de tracción (en general) $\leq \frac{1}{4} \cdot \sqrt{f'_{ci}}$
- c) Tensión de tracción en extremos simplemente apoyados $\leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{f'_{ci}}$

Donde f'_{ci} es la resistencia del hormigón en el momento del tesado.

En elementos postesados los cálculos deben tener en consideración la pérdida de sección originada por la presencia de las vainas sin inyectar (utilizar la sección neta de hormigón en lugar de la sección bruta).

En rigor, las tensiones admisibles de tracción no son máximas absolutas dado que el CIRSOC 201-2005, artículo C18.4.1.b y c, permite que sean superadas pero en esos casos obliga a disponer armadura adherente (tesa o no tesa) capaz de absorber la fuerza total de la zona traccionada calculada en la suposición de sección no fisurada. La tensión a utilizar para el cálculo de estas armaduras será $0,6 \cdot f_y$ pero menor o igual que 200 MPa.

10.4.1.2.- Bajo cargas de servicio y t_{∞}

El CIRSOC 201-2005, artículo 18.4.2, denomina a esta situación “etapa de servicio”.

Las cargas de servicio varían desde un valor mínimo denominado “carga de larga duración” y un valor máximo denominado “carga total”.

Se establece que para elementos pretensados Clase U y T solicitados a flexión:

- a) Tensión normal de compresión debida al pretensado más cargas de larga duración $\leq 0,45 \cdot f'_c$
- b) Tensión normal de compresión debida al pretensado más la carga total $\leq 0,60 \cdot f'_c$

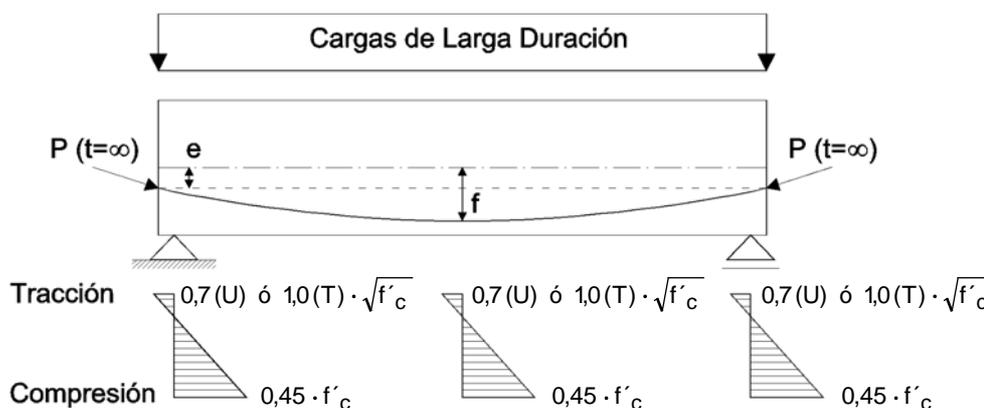


Figura 10.4.1.2.1

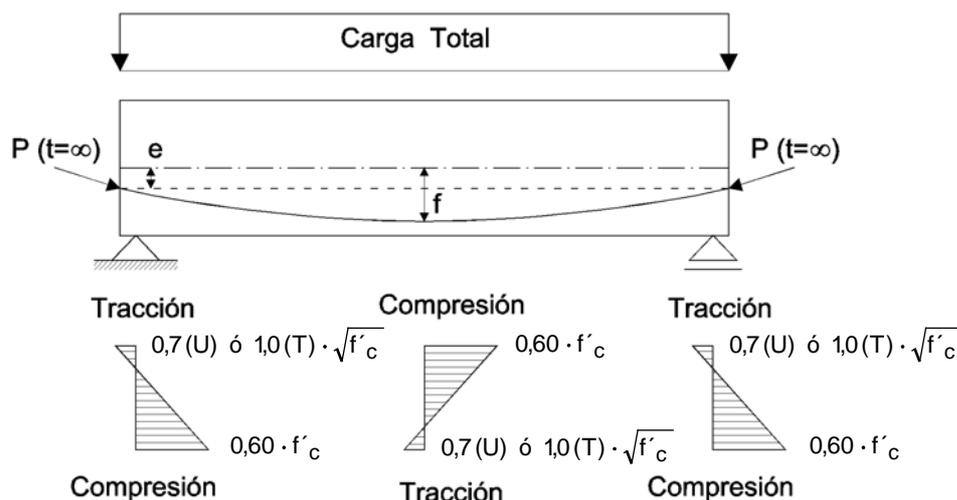


Figura 10.4.1.2.2

Las tensiones se calculan en base a secciones no fisuradas y luego de que se han producido la totalidad de las pérdidas de pretensado.

Las tensiones de tracción máximas son las vistas en la definición de hormigones Clase U y T.

10.4.2.- En el acero

EL CIRSOC 201-2005, artículo 18.5.1, impone los siguientes límites a las tensiones en el acero de pretensado:

- Debidas a la acción directa de la fuerza aplicada por el gato

\leq	$0,94 \cdot f_{py}$
\leq	$0,80 \cdot f_{pu}$
\leq	máximo valor recomendado por el fabricante del acero de pretensado o de los dispositivos de anclaje
- Inmediatamente después de la transferencia del pretensado

\leq	$0,82 \cdot f_{py}$
\leq	$0,74 \cdot f_{pu}$
- En los dispositivos de anclaje y acoplamiento de cables de postesado inmediatamente después de la transferencia de la fuerza de tesado

\leq	$0,70 \cdot f_{pu}$
--------	---------------------

en las expresiones anteriores:

f_{py} = Tensión de fluencia especificada para el acero de pretensado
 f_{pu} = Tensión de tracción especificada para el acero de pretensado

10.5.- Resistencia a flexión

10.5.1.- Equilibrio y compatibilidad en secciones pretensadas

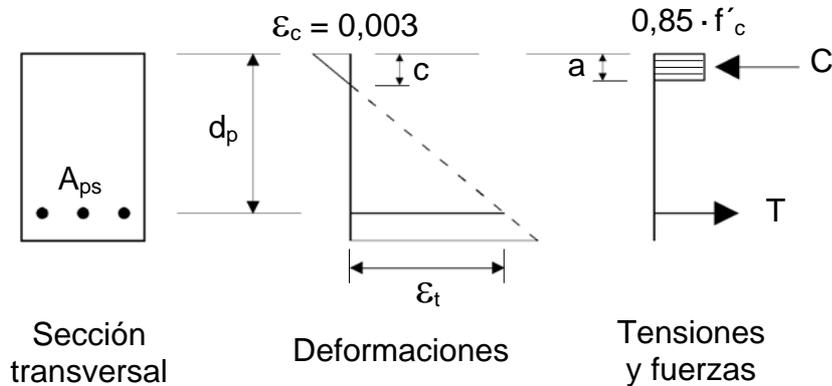


Figura 10.5.1.1

En la Figura 10.5.1.1 se muestran los diagramas de deformaciones y tensiones correspondientes a una sección pretensada en el momento de la rotura ($M = M_n$). Como puede apreciarse el aspecto de los diagramas no difiere del utilizado para el cálculo de la resistencia a flexión de elementos no pretensados.

En pretensado siguen utilizándose las siguientes hipótesis:

- El hormigón tiene una deformación de rotura igual a 0,003
- Mantenimiento de las secciones planas
- Resistencia nula del hormigón traccionado
- Puede adoptarse un bloque uniforme de tensiones en el hormigón con un valor constante igual a $0,85 \cdot f'_c$
- La profundidad del bloque anterior es: $a = \beta_1 \cdot c$
siendo

c = profundidad del eje neutro de deformaciones

$\beta_1 = 0,85$ si $f'_c \leq 30$ MPa

$\beta_1 = 0,85 - 0,05 \cdot (f'_c - 30 \text{ MPa}) / 7 \geq 0,65$ si $f'_c > 30$ MPa

Al analizar secciones pretensadas no es conocida la tensión del acero de pretensado aunque si existieran además armaduras no tesas en ellas sí podrá suponerse que se ha alcanzado la tensión " f_y " dado que son de aplicación los límites de deformaciones vistos en flexión de secciones no pretensadas.

El diagrama tensiones-deformaciones de una armadura de pretensado no presenta un escalón claro de fluencia que permita asumir un diagrama bilineal como los vistos en los casos de armaduras no tesas (Figura 10.5.1.2).

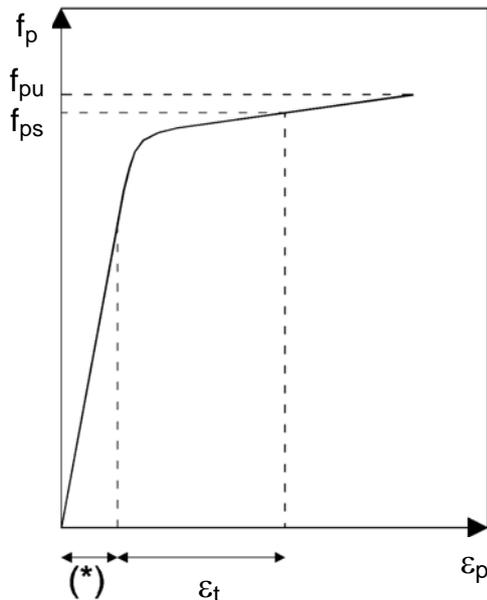


Figura 10.5.1.2

En secciones pretensadas la deformación del acero está compuesta por el pre-estiramiento producido por el pretensado indicado con (*) en la Figura 10.5.1.2 más la denominada deformación efectiva “ ϵ_t ”. La suma de ambas deformaciones originará una tensión “ f_{ps} ” que no necesariamente será igual a la resistencia “ f_{pu} ”.

El cálculo de la deformación indicada con (*) es relativamente complejo y está más allá del alcance de estas notas pero, a los fines prácticos, puede suponerse que esa tensión es aproximadamente igual a la deformación correspondiente a la tensión efectiva de pretensado “ f_{pe} ”³:

$$\frac{P_{pe}}{A_{ps} \cdot E_{ps}}$$

En cuanto a “ ϵ_t ”, esa es la deformación que queda pendiente resolver.

10.5.2.- Solución general: compatibilidad y equilibrio

En secciones no pretensadas, al poder asumirse que el acero se encuentra en fluencia, resulta posible plantear una ecuación cuadrática que resuelve el problema.

En secciones pretensadas, suelen ser conocidos:

- La sección de acero de pretensado “ A_{ps} ” pues el camino más frecuente de cálculo consiste en despejar la fuerza de pretensado de modo de verificar las condiciones tensionales para “ t_o ” y “ t_∞ ”. Al ser conocida la fuerza de pretensado, se elige un sistema de pretensado y la armadura “ A_{ps} ” se obtiene a partir de las tensiones admisibles de tesado en el acero.
- El diagrama tensiones-deformaciones del acero⁴

10.5.2.1.- Elementos con cables adherentes

En este caso puede realizarse un cálculo iterativo consistente en:

- Aumentar gradualmente “ ϵ_t ” hasta llegar a que se igualen las fuerzas en las armaduras y en el hormigón ($T = C$). La tensión “ f_{ps} ” en el acero de pretensado se calcula para cada valor de “ ϵ_t ” adicionándole a esta deformación la deformación correspondiente al pre-estiramiento.
- Calcular “ M_n ” para la condición del punto anterior
- Verificar si $M_u \leq \phi \cdot M_n$. Los valores de “ ϕ ” son los vistos para flexión en secciones no pretensadas.

³ Cabe comentar que el CIRSOC 201-2005 no hace referencia a la forma de calcular las deformaciones en el acero.

⁴ Para facilitar los cálculos estos diagramas pueden representarse a través de ecuaciones como la función modificada de Ramberg-Osgood o cualquier otra que aproxime razonablemente bien a los diagramas reales.

- iv) Si la condición anterior se verifica el cálculo se da por terminado
- v) Si la seguridad resulta insuficiente existirán dos caminos: agregar armaduras no tesas o bien agregar armaduras tesas y bajar la tensión de pretensado. En cualquier caso habrá que repetir los cálculos desde el punto i). La primera solución (utilizar armaduras pasivas) suele resultar conveniente pues adicionalmente ayuda al control de la fisuración.

Este procedimiento de cálculo es fácilmente programable incluso en planillas de cálculo.

10.5.2.2.- Elementos con cables no adherentes

Para el cálculo no es posible hacer un análisis “de sección” para determinar la tensión en la armadura. En efecto, al no existir adherencia el cable no experimenta fuertes incrementos de tensión en coincidencia con las fisuras tal como es el caso de los cables adherentes. No es válido plantear aquí compatibilidad de deformaciones a nivel de una sección porque al no haber adherencia el cable no sufre alargamientos locales sino un alargamiento global producto de la deformación general de la pieza. El abordaje analítico para calcular la tensión en las armaduras en forma “exacta” es bastante laborioso e implica un análisis no lineal en el que intervienen las deformaciones de la pieza y del cable (teniendo en cuenta la variación del módulo de elasticidad con la deformación). Este análisis suele realizarse a través de iteraciones.

10.5.3.- Solución aproximada

El CIRSOC 201-2005 obvia el cálculo de “ ε_t ” proponiendo expresiones aproximadas para el cálculo de “ f_{ps} ”. Si se considera “dato” a la tensión en el acero pueden aplicarse las expresiones de cálculo directo vistas al analizar secciones no pretensadas.

Las expresiones aproximadas que veremos a continuación sólo son de aplicación cuando la tensión de pretensado efectiva verifica $f_{se} \geq 0,5 \cdot f_{pu}$ (artículo 18.7.2)

10.5.3.1.- Cables adherentes

La expresión propuesta por el CIRSOC 201-2005, artículo 18.7.2.a, intenta ser muy general⁵ por lo que, como contrapartida, está sujeta a algunas restricciones.

La expresión propuesta es:

$$f_{ps} = f_{pu} \cdot \left\{ 1 - \frac{\gamma_p}{\beta_1} \cdot \left[\rho_p \cdot \frac{f_{pu}}{f'_c} + \frac{d}{d_p} \cdot (\varpi - \varpi') \right] \right\}$$

donde

- f_{ps} = Tensión de la armadura tesa para el cálculo de la resistencia nominal
- f_{pu} = Tensión de tracción especificada para el acero de pretensado

⁵ Incluye la presencia de armaduras pasivas traccionadas y comprimidas.

f_{py} = Tensión de fluencia especificada para el acero de pretensado
 γ_p = Este factor tiene en cuenta la forma del diagrama tensiones-deformaciones de los aceros (relajación normal, baja relajación, etc.) el cual está caracterizado por el cociente f_{py}/f_{pu}

si $\gamma_p = 0,55$ para $f_{py}/f_{pu} \geq 0,80$	<i>Artículos</i> <i>10.0</i> <i>y</i> <i>C18.5.1</i>	(barras conformadas de pretensado)
si $\gamma_p = 0,40$ para $f_{py}/f_{pu} \geq 0,85$		(barras, alambres y cordones de relajación normal)
si $\gamma_p = 0,28$ para $f_{py}/f_{pu} \geq 0,90$		(alambres y cordones de baja relajación)

β_1 = Factor que relaciona la profundidad del eje neutro con la profundidad del bloque rectangular de tensiones utilizado para los cálculos de resistencia a flexión:

Si $f'_c \leq 30$ MPa: $\beta_1 = 0,85$

Si $f'_c > 30$ MPa: $\beta_1 = 0,85 - 0,05 \cdot (f'_c - 30 \text{ MPa}) / 7 \geq 0,65$

ρ_p = Cuantía de armadura tesa = $A_{ps} / (b \cdot d_p)$

b = Ancho del borde comprimido de la sección

d = Distancia desde la fibra más comprimida hasta el baricentro de la armadura no tesa

d_p = Distancia desde la fibra más comprimida hasta el baricentro de la armadura tesa

ω = Cuantía mecánica de la armadura traccionada no tesa = $A_s \cdot f_y / (b \cdot d \cdot f'_c)$

ω' = Cuantía mecánica de la armadura comprimida no tesa = $A'_s \cdot f_y / (b \cdot d \cdot f'_c)$

ω_p = Cuantía mecánica de la armadura tesa = $\rho_p \cdot f_{ps} / f'_c$

Cuando se analizan secciones "T" (en general secciones con alas), las cuantías mecánicas deben calcularse para el ancho del alma considerando solamente la cantidad de armadura necesaria para equilibrar las tensiones que se producen en el alma.

La expresión anterior de " f_{ps} " parte de la base de que la armadura de compresión se encuentra en fluencia. Si esto no ocurriera, los resultados quedarían del lado inseguro dado que se estaría sobrevalorando el valor de la tensión en las armaduras de pretensado. Por estos motivos, aún cuando exista armadura comprimida, deben tomarse las siguientes precauciones (artículo 18.7.2.a):

i)
$$\left[\rho_p \cdot \frac{f_{pu}}{f'_c} + \frac{d}{d_p} \cdot (\omega - \omega') \right] \geq 0,17$$
 (controla que el eje neutro no sea muy poco profundo)

ii) Si $d' > 0,15 \cdot d_p$ se adopta $\omega' = 0$ (armadura de compresión muy alejada de la fibra más comprimida y por lo tanto no estará en fluencia por compresión) (artículo C18.7.2)

10.5.3.2.- Cables no adherentes

La experimentación ha demostrado que en estructuras muy esbeltas (p.e. losas en una dirección, placas planas y losas planas) el incremento de tensión que se origina durante el proceso de carga en los elementos no adherentes es menor que el que se produce en estructuras tipo viga. Por este motivo el CIRSOC 201-2005 establece expresiones diferentes de acuerdo con la esbeltez del elemento en análisis⁶.

10.5.3.2.1.- Elementos con relación luz/altura ≤ 35 (artículo 18.7.2.b)

$$f_{ps} = f_{se} + 70 + f'_c / (100 \cdot \rho_p) \quad \text{con } f_{ps} \leq \begin{cases} f_{py} \\ f_{se} + 420 \end{cases}$$

10.5.3.2.2.- Elementos con relación luz/altura > 35 (artículo 18.7.2.c)

$$f_{ps} = f_{se} + 70 + f'_c / (300 \cdot \rho_p) \quad \text{con } f_{ps} \leq \begin{cases} f_{py} \\ f_{se} + 200 \end{cases}$$

10.6.- Cuantías límites en flexión

10.6.1.- Cuantía mínima

El CIRSOC 201-2005, artículo 18.8.2, indica que:

“La cantidad total de armadura tesa y no tesa debe ser la adecuada para desarrollar una carga mayorada igual, como mínimo, a 1,2 veces la carga de fisuración determinada en base al módulo de rotura, f_r ”

Indica asimismo que la prescripción anterior se puede obviar en los siguientes casos:

- losas armadas en dos direcciones, postesadas sin adherencia; y
- elementos solicitados a flexión en los cuales los valores de sus resistencias a flexión y corte sean, como mínimo, el doble de los prescritos por las condiciones de seguridad correspondientes.

A pesar de que la prescripción del CIRSOC 201-2005 habla de “cargas” el párrafo puede leerse interpretando “cargas” por “momentos” por lo que resulta:

$$\phi \cdot M_n \geq 1,2 \cdot M_{cr}$$

donde

M_{cr} = Momento de fisuración⁷ calculado para las cargas que producen una tensión máxima de tracción igual a f_r

⁶ La experiencia parecería indicar que se han tomado precauciones excesivas para el caso de los elementos más esbeltos.

⁷ Obviamente en este cálculo interviene el pretensado por lo que se trata de un caso de flexión compuesta.

$$f_r = \text{Módulo de rotura del hormigón o resistencia a la tracción por flexión} = 0,7 \cdot \sqrt{f'_c}$$

10.6.2.- Cuantía máxima

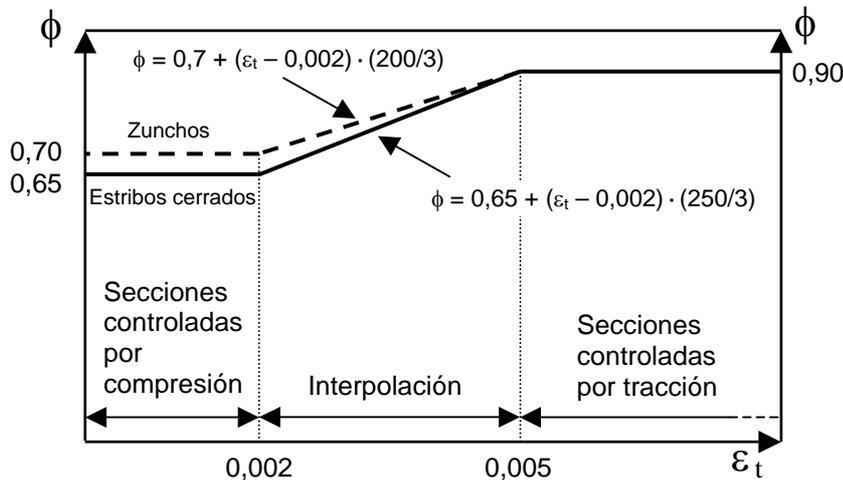


Figura 10.6.2.1
(adoptada de la
figura 9.3.2 del
CIRSOC 201-2005)

Estrictamente hablando, como en el caso de secciones no pretensadas, el CIRSOC 201-2005 no establece una cuantía máxima de armaduras. Utilizando como parámetro de referencia a la deformación efectiva en la armadura de tracción (ϵ_t) establece que existen tres tipos de secciones: controladas por tracción, de transición y controladas por compresión (ver flexión en secciones no pretensadas). En el gráfico 10.6.2.1 se resumen los criterios ya vistos para la adopción del coeficiente de minoración “ ϕ ” a aplicar al momento nominal “ M_n ” para la verificación de la condición: $M_u \leq \phi \cdot M_n$ para armaduras pasivas con “ $f_y = 420 \text{ MPa}$ ”.

Si se han utilizado las expresiones aproximadas dadas por el CIRSOC 201-2005 puede determinarse, en forma aproximada, la deformación efectiva a partir de:

$$\epsilon_t = (f_{ps} - f_{pe}) / E_{ps}$$

donde

ϵ_t = Deformación efectiva de tracción en las armaduras

f_{ps} = Tensión de la armadura tesa para el cálculo de la resistencia nominal

f_{pe} = Tensión efectiva en la armadura de pretensado después de producidas todas las pérdidas

E_{ps} = Módulo de elasticidad de las armaduras de pretensado

Si se desea aprovechar al máximo la resistencia de los materiales ($\phi = 0,90$) convendrá limitar la deformación efectiva a valores mayores a 0,005 por lo que, si se considera una deformación de rotura en el hormigón de 0,003, la profundidad del eje neutro deberá ser:

$$c \leq \frac{0,003}{0,003 + 0,005} \cdot d_p = 0,375 \cdot d_p$$

Debe recordarse que la deformación efectiva es la que corresponde al acero más traccionado de modo que si hubiera armadura no tesa con un valor de "d" mayor que "d_p", en la expresión anterior correspondería utilizar la deformación efectiva de dicha armadura la que puede obtenerse por semejanza de triángulos al ser conocida la deformación de rotura del hormigón y la de la armadura tesa.

10.7.- Armadura adherente mínima

Si no existiera armadura adherente los elementos tenderían a trabajar como arcos atirantados muy rebajados, en lugar de como elementos de hormigón armado. Por otra parte, las fisuras se abrirían sin ningún tipo de control.

Los elementos sin armadura adherente presentan una ductilidad muy baja y una escasa capacidad de disipar energía (son muy poco aptos para zonas sísmicas).

Por estas razones los reglamentos establecen que la mayoría de las estructuras pretensadas con cables no adherentes⁸ deben contener una cantidad mínima de armadura adherente.

El CIRSOC 201-2005, artículo 18.9.2, indica que la armadura adherente mínima se debe determinar con la expresión:

$$A_s = 0,004 \cdot A_{ct}$$

donde

A_{ct} = Área parcial de la sección transversal comprendida entre el eje baricéntrico de la sección total y el borde más traccionado (Figura 10.7.1)

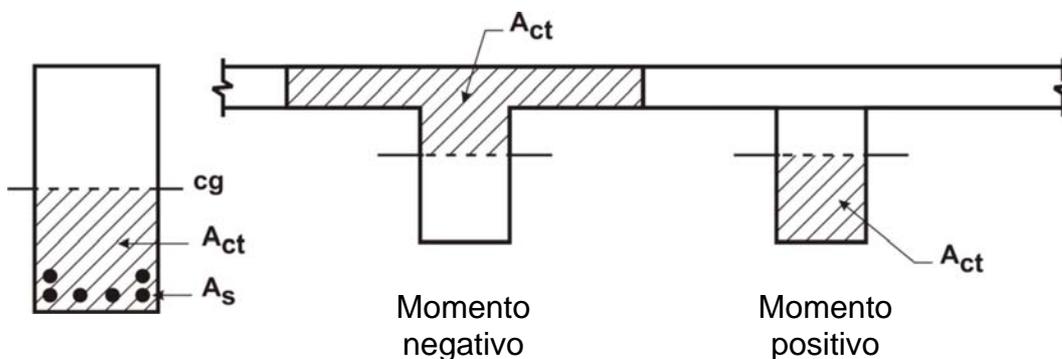


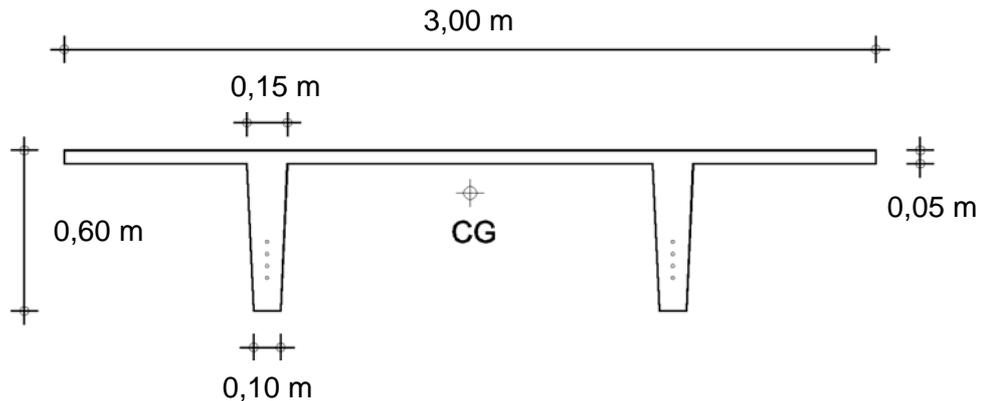
Figura 10.7.1

⁸ En el capítulo correspondiente a sistemas de losas planas puede verse una excepción.

PRETENSADO EN FLEXIÓN – EJEMPLOS

Ejemplo 10.I

Enunciado: Determinar las armaduras de pretensado para el siguiente elemento prefabricado que será utilizado como parte de una cubierta para una nave industrial. El elemento será pretensado en banco y los elementos tensores serán rectos. Para disminuir las tracciones originadas por el uso de elementos tensores rectos en la cara superior en las zonas de apoyos se utilizará hormigón pretensado clase “T”.



Materiales:

- Hormigón: H-35 ($f'_c = 35 \text{ MPa}$)

$$E_c = 4700 \cdot f'_c{}^{1/2} = 27806 \text{ MPa}$$

$$f'_{ci} = 24,5 \text{ MPa (en el momento del tesado)}$$

$$E_{ci} = 4700 \cdot f'_{ci}{}^{1/2} = 23264 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{H^e} = 25 \text{ kN/m}^3$$

- Acero:

Armaduras pasivas: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

Armaduras activas: C-1900 Grado 270

$d_{\text{nominal}} = 12,7 \text{ mm}$

Tipo: cordón baja relajación

$f_{pu} = 1864 \text{ MPa}$

$f_{py} = 1682 \text{ MPa}$

$E_{ps} = 195000 \text{ MPa}$

Sección transversal:

$$A_g = \text{sección bruta} = 0,288 \text{ m}^2$$

$$\text{Perímetro} = 8,202 \text{ m}$$

$$I_g = \text{momento inercia} = 0,00914 \text{ m}^4$$

$$y_{\text{inf}} = \text{dist. CG a borde inferior} = 0,44 \text{ m}$$

$$y_{\text{sup}} = \text{dist. CG a borde sup.} = 0,16 \text{ m}$$

$$W_{\text{inf}} = \text{mod. resist. borde inf.} = 0,0208 \text{ m}^3$$

$$W_{\text{sup}} = \text{mod. resist. borde sup.} = 0,0571 \text{ m}^3$$

Esquema y luz de cálculo:

Esquema: Viga simplemente apoyada

Luz entre ejes de apoyos: 15,00 m

Cargas exteriores: $t_{D1} = \text{permanentes en el momento del tesado} = 0,00 \text{ kN/m}$

$t_{D2} = \text{permanentes luego del tesado} = 3,00 \text{ kN/m}$

$$t_{L1} = \text{parte de sobrecarga casi-permanente} = 0,00 \text{ kN/m}$$

$$t_{L2} = \text{resto de sobrecarga} = 6,00 \text{ kN/m}$$

Resolución:

a) Momentos flectores y tensiones

Se calculan los momentos flectores en el centro del tramo y en la denominada “sección de transferencia” que es aquella en la que puede considerarse que los elementos tensores ya han transferido totalmente la carga de pretensado al hormigón. Se supone que dichos elementos tienen 12,7 mm de diámetro. Del lado seguro, se supondrá que la sección de transferencia se encuentra ubicada a 50 veces dicho diámetro del extremo de la viga, es decir: 0,635 m.

$$t_{D0} = \text{Peso propio de la sección de hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,288 \text{ m}^2 = 7,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga actuante en el momento del tesado} = t_{D0} + t_{D1} = 7,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga semi-permanente} = t_{D0} + t_{D1} + t_{D2} + t_{L1} = (7,20 + 3,00) \text{ kN/m} = 10,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga total máxima} = t_{D0} + t_{D1} + t_{D2} + t_{L1} + t_{L2} = (7,20 + 3,00 + 6,00) \text{ kN/m} = 16,20 \text{ kN/m}$$

		Momentos flectores [kNm]		
Sección	Dist. al apoyo izquierdo [m]	En el momento del tesado (t=0)	Luego de pérdidas (t=∞) p/carga	
			Semi-permanente	Total
Transferencia	0,635	32,84	No interesa (*)	No interesa (*)
En L/2	7,50	202,50	286,88	455,63

(*) Las tensiones más desfavorables se producen cuando actúa la mayor carga de pretensado y la menor carga exterior, es decir, en el momento del tesado.

		Tensiones [MPa]		
Sección	Fibra	En el momento del tesado (t=0)	Luego de pérdidas (t=∞) p/carga	
			Semi-permanente	Total
Transferencia	Superior	0,57	No interesa	No interesa
	Inferior	-1,58		
En L/2	Superior	3,54	5,02	7,98
	Inferior	-9,75	-13,81	-21,93

b) Tensiones admisibles

b.1) En el hormigón

		Expresión reglamentaria	Valor en [MPa]
En el momento del tesado $t = 0$	Compresión	$0,60 \cdot f'_{ci}$	14,70
	Tracción en apoyos simples	$0,50 \cdot f'_{ci}{}^{1/2}$	2,47
	Tracción	$0,25 \cdot f'_{ci}{}^{1/2}$	1,24
Luego de pérdidas $t = \infty$	Comp. cargas permanentes	$0,45 \cdot f'_c$	15,75
	Compresión carga total	$0,60 \cdot f'_c$	21,00
	Tracción	$f'_c{}^{1/2}$	5,92

b.2) En el acero de pretensado

Por acción directa del gato	=	mínimo ($0,80 \cdot f_{pu}$; $0,94 \cdot f_{py}$)	=	1491 MPa
Instante de transferencia	=	mínimo ($0,74 \cdot f_{pu}$; $0,82 \cdot f_{py}$)	=	1379 MPa
En anclajes para $t = 0$	=	$0,70 \cdot f_{pu}$	=	1305 MPa

c) Cálculo de la fuerza de pretensado

La fuerza de tesado se dimensiona de modo de que para carga total la tensión en la fibra inferior no supere la tensión de tracción admisible en el centro del tramo (5,92 MPa). El pretensado deberá compensar entonces una tensión igual a la diferencia entre la tensión producida por la totalidad de las cargas y la tensión admisible, es decir: $21,93 - 5,92 = 16,02$ MPa.

La tensión de compresión producida en la fibra inferior de la sección media por la fuerza de tesado vale: $P_e / A_g + P_e \cdot e / W_{inf}$

donde P_e = fuerza de tesado efectiva (luego de pérdidas)
 e = excentricidad media de los elementos tensores = 0,25 m (*)

(*) este valor se adoptó luego de una serie de tanteos.

Con la excentricidad adoptada se obtiene: $P_e = 1032,9$ kN

Para estimar la sección necesaria de acero de pretensado se debe conocer la fuerza de tesado en el momento de la transferencia. Dado que esa fuerza surge del cálculo de pérdidas donde ella misma es un dato de partida, es necesario hacer una estimación que llevará a un cálculo iterativo que converge muy rápidamente. En primera instancia (luego se verificará) se supone que en el momento de la transferencia la fuerza es un 7% superior a la fuerza efectiva. En base a la utilización de cordones de 12,7 mm (98,7 mm² de sección) se obtiene:

$$\text{Cantidad necesaria de cordones} = \frac{1,07 \cdot 1032,9 \text{ kN}}{1379 \text{ MPa} \cdot 98,7 \text{ mm}^2} \cdot 1000 \frac{\text{MN mm}^2}{\text{kN m}^2} = 8,12$$

Se adoptan 8 cordones, es decir: $8 \cdot 98,7 \text{ mm}^2 = 790 \text{ mm}^2$

d) Cálculo de pérdidas

d.1) Pérdidas instantáneas

Dado que se trata de un elemento pretensado pretesado, no existen pérdidas por fricción. Las pérdidas en los anclajes se compensan dando una mayor tensión inicial al gato. Restan entonces, como pérdidas instantáneas, solamente las correspondientes al acortamiento elástico del hormigón en el momento de la transferencia.

$$ES = \text{pérdidas por acortamiento elástico} = K_{es} \cdot E_{ps} \cdot f_{cir} / E_{ci} = 39,54 \text{ MPa}$$

$$K_{es} = 1,00 \text{ (elemento pretensado pretesado)}$$

$$E_{ps} = 195000 \text{ MPa}$$

$$E_{ci} = 23264 \text{ MPa}$$

f_{cir} = tensión de compresión neta en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores inmediatamente después de la transferencia

$$f_{cir} = K_{cir} \cdot f_{cpi} - f_g = 0,90 \cdot 11,40 \text{ MPa} - 5,54 \text{ MPa} = 4,72 \text{ MPa}$$

$$K_{cir} = 0,90 \text{ (elemento pretensado pretesado)}$$

f_{cpi} = tensión en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores debida a la fuerza de tesado descontadas las pérdidas de fricción, acuñamiento y retroceso de anclaje

f_g = tensión en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores debida a las cargas exteriores que actúan en el momento del tesado

P_{pi} = fuerza de tesado descontadas las pérdidas de fricción, acuñamiento y retroceso de anclaje $\approx 1,07 \cdot P_e = 1,07 \cdot 1032,9 = 1105,2 \text{ kN}$

$$\begin{aligned} f_{cpi} &= P_{pi} / A_g + P_{pi} \cdot e^2 / I_g \\ &= [1105,2 \text{ kN} / 0,288 \text{ m}^2 + 1105,2 \text{ kN} \cdot (0,25 \text{ m})^2 / 0,00914 \text{ m}^4] \cdot 0,001 \text{ MN} / \text{kN} = \\ &= 11,40 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$f_g = [202,50 \text{ kNm} \cdot 0,25 \text{ m} / 0,00914 \text{ m}^4] \cdot 0,001 \text{ MN} / \text{kN} = 5,54 \text{ MPa}$$

d.2) Pérdidas diferidas

d.2.1) Contracción del hormigón (SH)

$$SH = 8,2 \cdot 10^{-6} \cdot K_{sh} \cdot E_{ps} \cdot (1 - 0,024 \cdot V/S) \cdot (100 - RH) = 36,61 \text{ MPa}$$

$$K_{sh} = 1,0 \text{ (para elementos pretensados pretesados)}$$

$$E_{ps} = 195000 \text{ MPa}$$

$$V/S = A_g / \text{Perímetro} = 0,288 \text{ m}^2 / 8,202 \text{ m} = 0,0351 \text{ m} \text{ (3,51 cm)}$$

RH = 75% (valor correspondiente al emplazamiento de la estructura)

d.2.2) Fluencia del hormigón (CR)

$$CR = K_{cr} \cdot (f_{cir} - f_{cds}) \cdot E_{ps} / E_c = 33,66 \text{ MPa}$$

$$K_{cr} = 2,00 \text{ (para elementos pretensados pretesados)}$$

$$E_{ps} = 195000 \text{ MPa}$$

$$E_c = 27806 \text{ MPa}$$

f_{cds} = tensión en el hormigón a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores debida a las cargas exteriores permanentes que se agregan luego del tesado.

$$f_{cds} = M_{cds} \cdot e / I_g =$$

$$= [(286,88 \text{ kNm} - 202,50 \text{ kNm}) \cdot 0,25 \text{ m} / 0,00914 \text{ m}^4] \cdot 0,001 \text{ MN/kN}$$

$$= 2,31 \text{ MPa}$$

d.2.3) Relajación de los cables (RE)

$$\begin{aligned} RE &= [K_{re} - J \cdot (ES + SH + CR)] \cdot C = \\ &= [35 \text{ MPa} - 0,04 \cdot (39,54 + 36,61 + 33,79) \text{ MPa}] \cdot 1,004 = \\ &= 30,73 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Para cordones de baja relajación se tiene: $K_{re} = 35 \text{ MPa}$
 $J = 0,04$

$$f_{pi} = P_{pi} / A_{ps} = [1105,2 \text{ kN} / 790 \text{ mm}^2] \cdot 1000 \text{ MN mm}^2 / (\text{kN m}^2) = 1400 \text{ MPa}$$

$$f_{pi} / f_{pu} = 1400 / 1864 = 0,751$$

$$C = 0,75 + 5 \cdot (f_{pi} / f_{pu} - 0,70) = 1,004$$

d.3) Resumen de pérdidas y verificación de tensiones en cordones

$$ES = 39,54 \text{ MPa}$$

$$SH = 36,61 \text{ MPa}$$

$$CR = 33,79 \text{ MPa}$$

$$RE = 30,73 \text{ MPa}$$

$$\text{Total Pérdidas} = 140,66 \text{ MPa}$$

La tensión efectiva luego de pérdidas vale:

$$P_e / A_{ps} = [1032,9 \text{ kN} / 790 \text{ mm}^2] \cdot 1000 \text{ MN mm}^2 / (\text{kN m}^2) = 1308,2 \text{ MPa}$$

La tensión luego de anclar en el banco de tesado (luego de pérdidas por acuñamiento, etc.) = 1308,2 MPa + 140,7 MPa = 1448,8 MPa

Como ya se ha visto, la tensión admisible por acción directa del gato es de 1491 MPa lo que da un margen para compensar las pérdidas por acuñamiento, etc.

Si se supone que en el momento de la transferencia se ha producido un cuarto de las pérdidas por relajación, la tensión en dicho momento luego de producida la transferencia (deformación elástica) será: $1448,8 \text{ MPa} - 30,73 \text{ MPa} / 4 = 39,54 \text{ MPa} = 1401,6 \text{ MPa}$
 La tensión anterior resulta alrededor de un 1,6% superior a la tensión admisible obtenida anteriormente cuyo valor es de 1379 MPa. A los efectos de este ejemplo, se considera una diferencia aceptable.

Anteriormente se ha supuesto que en el momento de la transferencia la tensión en los elementos tensores era 1,07 veces mayor que la efectiva. Luego de realizados los cálculos se obtiene: $1401,6 \text{ MPa} / 1308,2 \text{ MPa} = 1,0714$. Este valor podría dar lugar a una iteración pero dado que la diferencia no es sustancial y por razones de espacio, se supondrá que el valor obtenido es satisfactorio.

En definitiva resultan:

$$P_{pi} = \text{Fuerza en el momento de la transferencia} = 1,0714 \cdot P_e = 1106,7 \text{ kN}$$

$$P_e = \text{Fuerza efectiva luego de pérdidas} = 1032,9 \text{ kN}$$

e) Verificación de tensiones en el hormigón (tensiones en [MPa])

					Sección en L/2							
Tiempo		t = 0 (Transferencia)				Tiempo		t = ∞ (luego de pérdidas)				
Sección		Transferencia		Centro tramo		Cargas		Permanentes			Totales	
Fibra		Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	Fibra		Sup.	Inf.	Sup.	Inf.	
P_{pi}/A_g		3,84				P_e/A_g		3,59				
$P_{pi} \cdot e \cdot y / I_g$		-4,84	13,32	-4,84	13,32	$P_e \cdot e \cdot y / I_g$		-4,52	12,43	-4,52	12,43	
$M \cdot y / I_g$		0,57	-1,58	3,54	-9,75	$M \cdot y / I_g$		5,02	-13,81	7,98	-21,93	
Total		-0,43	15,58	2,54	7,41	Total		4,09	2,21	7,04	-5,92	
Trac. Adm.		-2,47	-----	-1,24	-----	Trac. Adm.		-5,92				
Comp. Adm.		14,70				Comp. Adm.		15,75		21,00		

Como puede apreciarse, la sección verifica adecuadamente las tensiones a tiempo infinito y las compresiones en el momento de la transferencia se encuentran ligeramente superadas (6,0%). Nuevamente, a los efectos del ejemplo, se supone admisible esta pequeña diferencia. En un caso real el proyectista evaluará la conveniencia de introducir los cambios que considere necesarios para corregir esta situación.

f) Verificación de la resistencia a flexión

Supondremos (y luego verificaremos) que se trata de una sección controlada por tracción por lo que la condición resistente se expresa como: $M_u \leq \phi \cdot M_n = 0,90 \cdot M_n$

$$\begin{aligned} \text{En este caso: } M_u &= 1,2 \cdot M_D + 1,6 \cdot M_L \\ &= 1,2 \cdot 286,88 \text{ kN} + 1,6 \cdot 168,75 \text{ kNm} = 614,25 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Para el cálculo se utilizará la fórmula aproximada para la determinación de la tensión en el acero de los cordones en el momento de la rotura, es decir:

$$f_{ps} = f_{pu} \cdot \left\{ 1 - \frac{\gamma_p}{\beta_1} \cdot \left[\rho_p \cdot \frac{f_{pu}}{f'_c} + \frac{d}{d_p} \cdot (\omega - \omega') \right] \right\} = 1842 \text{ MPa}$$

Asimismo se supondrá, en primera instancia, que la sección se comporta como rectangular ($a \leq h_f$), que no existe armadura significativa de compresión y que no será necesario adicionar armaduras pasivas.

$$\begin{aligned} f'_c &= 35 \text{ MPa} \\ f_{pu} &= 1864 \text{ MPa} \\ \gamma_p &= 0,28 \text{ (corresponde a aceros de baja relajación)} \\ \beta_1 &= 0,85 - 0,05 \cdot (f'_c - 30 \text{ MPa}) / 7 = 0,814 \\ \rho_p &= A_{ps} / (b \cdot d_p) = 790 \text{ mm}^2 / (3000 \text{ mm} \cdot 410 \text{ mm}) = 0,000642 \\ \rho_p \cdot f_{pu} / f'_c &= 0,0342 \\ b &= 3 \text{ m (3000 mm) (ancho total de la placa superior)} \\ d_p &= y_{sup} + e = 0,16 \text{ m} + 0,25 \text{ m} = 0,41 \text{ m (410 mm) (se adopta el valor medio)} \\ \omega &= \omega' = 0 \end{aligned}$$

La fuerza provista por la armadura vale entonces:

$$T = [1842 \text{ MPa} \cdot 790 \text{ mm}^2] \cdot 0,001 \text{ kN m}^2 / (\text{MN mm}^2) = 1454,69 \text{ kN}$$

La profundidad del eje neutro de tensiones será: $a = T / (0,85 \cdot f'_c \cdot b) = 0,0163 \text{ m}$ valor que resulta inferior a $h_f = 0,05 \text{ m}$ por lo que se convalida la hipótesis de suponer que se trata de una sección que se comporta como rectangular.

El momento nominal vale entonces: $M_n = T \cdot (d_p - a / 2) = 584,57 \text{ kNm}$

por lo que se da que:

$$M_u = 614,25 \text{ kNm} > 0,90 \cdot M_n = 0,90 \cdot 584,57 = 526,11 \text{ kNm}$$

no verificándose en consecuencia la condición resistente.

Se agregan 2 d_b12 en cada nervio, ubicados de modo que su centro de gravedad se encuentre a 0,05 m del borde inferior de la sección.

Suponiendo que las armaduras no tesas se encuentran en fluencia se tendrá:

$$\begin{aligned} T &= 1454,69 \text{ kN} + [4 \cdot 113 \text{ mm}^2 \cdot 420 \text{ MPa}] \cdot 0,001 \text{ kN m}^2 / (\text{MN mm}^2) = \\ &= 1454,69 \text{ kN} + 189,84 \text{ kN} = 1644,53 \text{ kN} \end{aligned}$$

operando igual que antes:

$$a = T / (0,85 \cdot f'_c \cdot b) = 0,0184 \text{ m}$$

$$M_n = T_{armadura \text{ tesa}} \cdot (d_p - a / 2) + T_{armadura \text{ no tesa}} \cdot (h - 0,05 \text{ m} - a / 2) =$$

$$M_n = 1454,69 \text{ kN} \cdot (0,41 - 0,0184 / 2) \text{ m} + 189,84 \text{ kN} \cdot (0,60 - 0,05 - 0,0184 / 2) \text{ m} =$$

$$M_n = 583,02 \text{ kNm} + 102,66 \text{ kNm} = 685,68 \text{ kNm} \quad \text{y ahora sí se verifica}$$

$$M_u = 614,25 \text{ kNm} < 0,90 \cdot M_n = 617,12 \text{ kNm}$$

$$\text{Dado que: } c = a / \beta_1 = 0,0184 \text{ m} / 0,814 = 0,0226 \text{ m}$$

la deformación a nivel del centro de gravedad de los elementos tensores vale

$$\varepsilon_{ps} = 0,003 \cdot (d_p - c) / c = 0,0514 \quad \text{con lo que se verifica que se trata de una sección controlada por tracción } (\varepsilon_{ps} > 0,005)$$

g) Verificación de cuantía mínima

$$\text{La condición a verificar es: } 1,2 \cdot M_{cr} \leq \phi \cdot M_n = 0,90 \cdot M_n = 617,12 \text{ kNm}$$

El momento de fisuración es aquel que luego de descomprimir la fibra inferior produce en ella una tracción igual a f_t siendo: $f_t = 0,7 \cdot f'_c{}^{1/2} = 4,14 \text{ MPa}$

Al verificar las tensiones en el hormigón se vio que el pretensado efectivo producía en la fibra inferior una tensión total igual a: $3,59 \text{ MPa} + 12,43 \text{ MPa} = 16,02 \text{ MPa}$

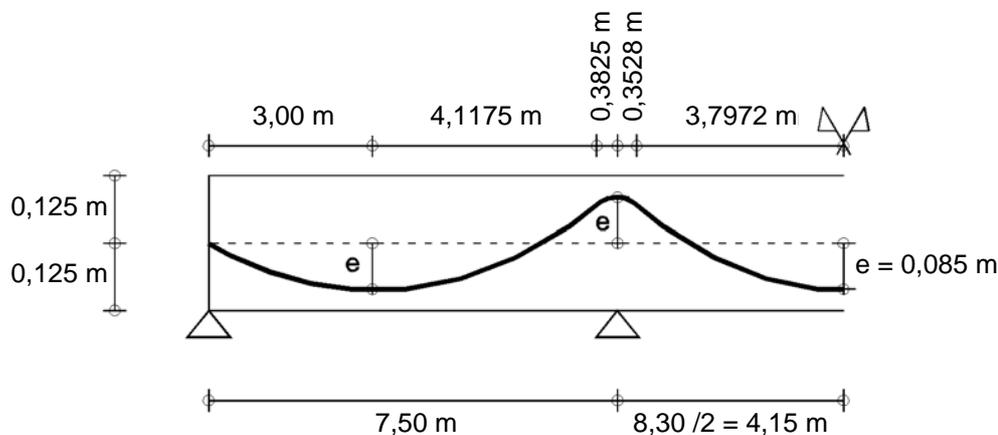
por lo que el momento de fisuración deberá producir una tracción igual a:
 $16,02 \text{ MPa} + 4,14 \text{ MPa} = 20,16 \text{ MPa}$

$$M_{cr} = 20,16 \text{ MPa} \cdot W_{inf} = 20,16 \text{ MPa} \cdot 0,0208 \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ kN} / \text{MN} = 418,76 \text{ kNm}$$

Por lo que la condición: $1,2 \cdot M_{cr} = 1,2 \cdot 418,76 = 502,51 \text{ kNm} \leq \phi \cdot M_n = 617,12 \text{ kNm}$ se verifica adecuadamente.

Ejemplo 10.II

Enunciado: Calcular las pérdidas por fricción que se producen en el cable de la figura perteneciente a un entrepiso sin vigas. En la Figura la escala vertical ha sido forzada (se visualiza 10 veces más grande que en la realidad) para poder apreciar el trazado del cable.



En principio se piensa en ejecutar el tesado desde un solo extremo. Se utilizan cordones, C-1900 Grado 270, de 12,7 mm de diámetro constituidos por 7 alambres de acero de baja relajación. Se utilizan vainas metálicas que luego serán inyectadas.

Resolución:

Para el cálculo de las pérdidas se utilizará la expresión general:

$$P_{px} = P_{pj} \cdot e^{-(K \cdot \ell_{px} + \mu_p \cdot \alpha_{px})}$$

donde

P_{pj} = Fuerza de tesado en el extremo desde donde se efectúa el tesado

P_{px} = Fuerza de tesado en un punto alejado “x” del extremo desde donde se efectúa el tesado

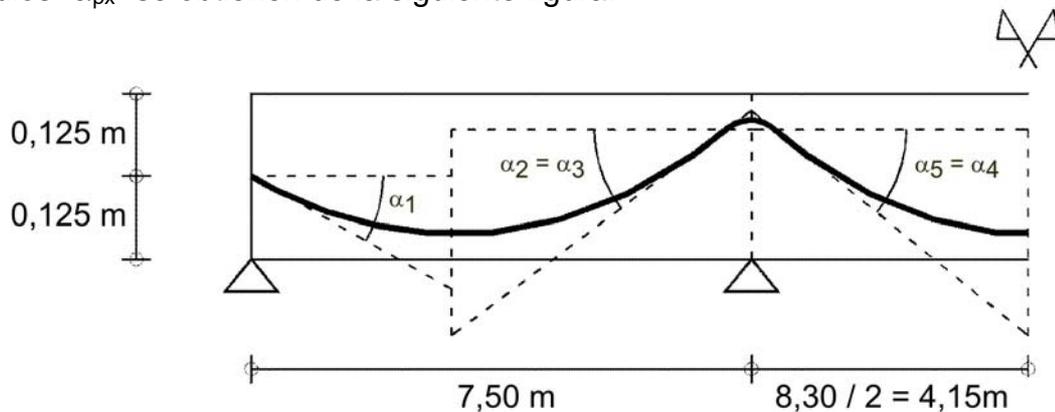
K = Coeficiente de desviación accidental (rozamiento parásito o rozamiento en recta) por metro lineal de cable = 0,0020 / m

ℓ_{px} = Longitud de cable medida desde el extremo desde donde se efectúa el pretensado

μ_p = Coeficiente de fricción por curvatura (o en curva) = 0,20

α_{px} = Suma de los valores absolutos de las variaciones angulares (desviaciones sucesivas), medidas en radianes, que se producen en el cable a lo largo de ℓ_{px}

Los ángulos “ α_{px} ” se obtienen de la siguiente figura:



Parábola	1	2	3	4	5
Long. parcial	3,00	4,1175			3,7972
Long. acum.	3,00	7,1175			11,65
Flecha	0,085	0,1556			0,1556
α_{pi}	0,0567	0,0756			0,0819

Para el cálculo de pérdidas se eligen algunos puntos singulares y luego se supone que entre los mismos se produce una variación lineal.

l_{px} [m]	Δl_{px} [m]	α_{pi} [rad]	$\Sigma \alpha_{pi}$ [rad]	$e^{-(\mu p \cdot \Sigma \alpha_{pi} + K \cdot l_{px})}$
0,00	----	0,0000	0,0000	1,0000
3,00	3,00	0,0567	0,0567	0,9828
7,1175	4,1175	0,0756	0,1322	0,9601
7,50	0,3825	0,0756	0,2078	0,9450
7,8528	0,3528	0,0820	0,2898	0,9290
11,65	3,7972	0,0820	0,3717	0,9070
15,4472	3,7972	0,0820	0,4537	0,8855
15,80	0,3528	0,0820	0,5356	0,8705
16,1825	0,3825	0,0756	0,6112	0,8567
20,30	4,1175	0,0756	0,6868	0,8370
23,30	3,00	0,0567	0,7435	0,8226

La tabla anterior indica que, si la pérdida del 18% que experimenta el extremo correspondiente al anclaje pasivo fuera mayor que lo tolerable, podría pensarse en hacer un tesado desde ambos extremos en cuyo caso la pérdida máxima correspondería al punto medio y sería del orden del 10%.

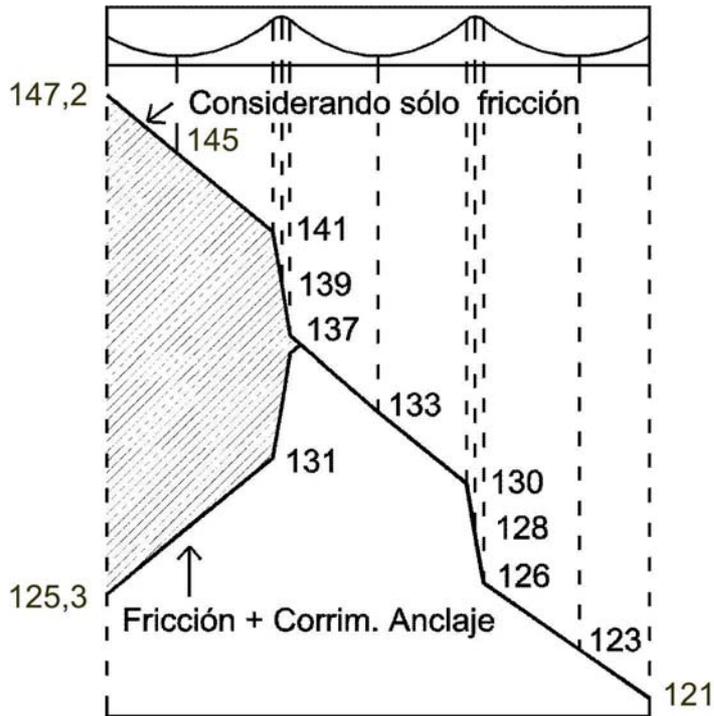
Falta todavía tener en cuenta la pérdida originada por el deslizamiento de los cables dentro del dispositivo de anclaje. En este caso (depende de la patente de pretensado que se esté utilizando) se adopta un corrimiento de $\Delta_{set} = 6$ mm. Este corrimiento produce un acortamiento en el cable que se ve gradualmente impedido por el rozamiento de modo que el efecto se anula para una distancia del anclaje activo.

En el ejemplo anterior se calculó la siguiente tensión admisible para un cordón de baja relajación:

$$\text{Por acción directa del gato} = \text{mínimo } (0,80 \cdot f_{pu} ; 0,94 \cdot f_{py}) = 1491 \text{ MPa}$$

Suponiendo que se tesa el cordón a ese nivel de tensión se tendrá:

$$P_{pj} = 98,7 \text{ mm}^2 \cdot 1491 \text{ MPa} \cdot 0,001 \text{ kN m}^2 / (\text{MN mm}^2) = 147,2 \text{ kN}$$



Suponiendo que la descarga producida por el corrimiento en el anclaje se produce con pendientes "simétricas" a las del proceso de carga, se obtiene un diagrama como el de la figura siguiente. En ella la poligonal superior indica la variación de la fuerza de tesado teniendo en cuenta únicamente las pérdidas por fricción y la inferior representa la variación de dicha fuerza incorporando el corrimiento de anclaje. El área sombreada se ha obtenido por tanteos de modo de verificar la siguiente igualdad:

$$\text{Corrimiento de anclaje} = \frac{\text{Área sombreada}}{(A_{ps} \cdot E_{ps})}$$

El cálculo por iteración conduce a una longitud afectada de aproximadamente 8,10 m es decir, que ingresa ligeramente en el segundo tramo.

Este tipo de cálculo puede hacerse muy rápidamente con un programa de dibujo asistido por computadora.

CORTE EN ELEMENTOS PRETENSADOS

Expresiones generales para el dimensionamiento y verificación de piezas pretensadas

11.1.- Generalidades

Las piezas sometidas a esfuerzos de corte deben verificar la condición resistente dada por:

$$V_u \leq \phi \cdot V_n \quad \text{con} \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículos 9.1.1 y 11.1.1})$$

V_u = Resistencia requerida calculada para cargas mayoradas

V_n = Resistencia nominal de la sección

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia en función del tipo de rotura:

$$\phi = 0,75 \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículo 9.3.2.3})$$

11.2.- Expresión general de cálculo y verificación

La expresión genérica de resistencia nominal que da el CIRSOC 201-2005 es del tipo aditivo, es decir, que se obtiene como suma de las colaboraciones del hormigón y el acero:

$$V_u \leq \phi \cdot V_n = \phi \cdot [V_c + V_s] = 0,75 \cdot [V_c + V_s]$$

donde:

V_c = Resistencia al corte aportada por el hormigón

V_s = Contribución de las armaduras (estribos y barras dobladas)

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia = 0,75

“ V_u ” es el esfuerzo de corte solicitante calculado para las cargas mayoradas, determinado a una distancia no menor que “ $h/2$ ” del filo del apoyo (CIRSOC 201-2005, artículo 11.1.3.2), siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

- Que el apoyo sea directo, es decir, que la reacción de apoyo introduzca compresiones en la cara (generalmente inferior) del elemento.
- Que las cargas se apliquen superiormente (no “colgadas”).
- Que no existan fuerzas concentradas significativas a una distancia del filo del apoyo menor que “ $h/2$ ”.

En caso de que no se cumpla alguna de las condiciones enunciadas, se debe dimensionar con el corte correspondiente al filo del apoyo.

11.3.- Determinación de V_c

El CIRSOC 201-2005, artículos 11.4.2 y 11.4.3, brinda dos tipos de expresiones para evaluar " V_c ", simplificada y general. En estos ejemplos se utilizará solamente la expresión simplificada.

Como en elementos no pretensados, se limita: $\sqrt{f'_c} \leq 8,3\text{MPa}$ (CIRSOC 201-2005, artículo 11.1.2)

La siguiente expresión simplificada puede utilizarse siempre que la fuerza efectiva de pretensado sea mayor o igual que el 40% de la resistencia a tracción de la armadura de flexión (CIRSOC 201-2005, art. 11.4.2 (Exp 11-9)).

$$V_c = (f'_c{}^{1/2} / 20 + 5 \cdot V_u \cdot d_p / M_u) \cdot b_w \cdot d \quad \left\{ \begin{array}{l} \geq f'_c{}^{1/2} \cdot b_w \cdot d / 6 \\ \leq 0,40 \cdot f'_c{}^{1/2} \cdot b_w \cdot d \quad \text{ó el valor} \\ \text{dado en los artículos 11.4.4 u 11.4.5} \\ \text{del Reglamento} \end{array} \right.$$

en la expresión anterior se debe considerar: $V_u \cdot d_p / M_u \leq 1,0$

donde: M_u = Momento mayorado simultáneo con V_u en la sección analizada
 d_p = Distancia desde la fibra más comprimida por el momento exterior hasta el baricentro de la armadura de pretensado

El valor anterior de " V_c " presenta asimismo un valor tope cuando en un elemento pretensado la sección ubicada a una distancia " $h/2$ " de la cara del apoyo se encuentra más cerca del extremo del elemento que la longitud de transferencia del acero de pretensado (se trata de elementos pretensados por adherencia). En estos casos se debe considerar una reducción en la fuerza de pretensado para la determinación del valor " V_{cw} " que se utiliza como tope de " V_c " y cuyo cálculo se verá a continuación. (CIRSOC 201-2005, artículo 11.4.4)

Cuando el pretensado es por adherencia, se define la longitud de transferencia como la longitud existente entre el extremo del elemento, donde la tensión en el cable es igual a cero, hasta el punto del cable donde el pretensado es totalmente efectivo. Se debe suponer que la fuerza de pretensado varía linealmente desde cero en el extremo del acero de pretensado hasta un valor máximo que se ubica a una distancia, a partir del extremo del acero de pretensado, igual a la longitud de transferencia que se supone de 50 diámetros para los cordones y de 100 diámetros para los alambres individuales. (CIRSOC 201-2005, artículo 11.4.4)

$$V_{cw} = 0,30 \cdot (f'_c{}^{1/2} + f_{pc}) \cdot b_w \cdot d_p + V_p \quad (\text{CIRSOC 201-2005, art. 11.4.3.2 (Exp 11-12)})$$

donde:

f_{pc} = Tensión de compresión en el hormigón a nivel del centro de gravedad de la sección que resiste las cargas exteriores luego de ocurridas las pérdidas o bien a nivel de la unión entre el alma y el ala en aquellas secciones en que el centro de gravedad cae dentro de las alas

- V_p = Componente vertical de la fuerza efectiva de pretensado (sólo en aquellos casos en que el cable es poligonal o de trazado curvo)
- d_p = Distancia desde la fibra más comprimida por el momento exterior hasta el baricentro de la armadura de pretensado pero no debe ser menor que $0,80 \cdot h$ (CIRSOC 201-2005, artículo 11.4.3.2)

11.4.- Determinación de V_s

La evaluación de " V_s " se hace directamente a partir del equilibrio de una fisura supuesta a 45° . Aún cuando, debido a las situaciones particulares ya descritas, se deba dimensionar con el valor del corte en el filo del apoyo, el equilibrio de la fisura a 45° puede ser planteado de igual manera ya que la rotura en cualquier caso se producirá a partir de una fisura inclinada.

El criterio de colaboración es simple: las armaduras que contribuyen al equilibrio son todas aquellas que cosen a la fisura en estudio, con la salvedad de que en las barras dobladas solamente se consideran efectivos las 3/4 partes centrales del tramo inclinado (CIRSOC 201-2005, artículo 11.5.7.7), más adelante se verá en detalle.

Finalmente " V_s " puede escribirse como:

$$V_s = V_s \text{ (estribos verticales)} + V_s \text{ (armadura inclinada)}$$

11.4.1.- V_s para estribos verticales

$$V_s = \frac{A_v \cdot d \cdot f_{yt}}{s} \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículo 11.5.7.2})$$

donde:

- d = Altura útil de la sección pero no menor que $0,80 \cdot h$
- s = Separación entre planos de estribado medida sobre el eje de la pieza
- f_{yt} = Tensión de fluencia especificada para el acero de los estribos
- A_v = Área de acero contenida en un plano de estribado = $n \cdot A_{1v}$
- n = Número de ramas
- A_{1v} = Área de una de las ramas de estribo contenida en el plano de estribado

Si una misma fisura cortara estribos de diferentes diámetros y/o con diferentes separaciones, sencillamente se reemplaza el cociente " A_v / s " por la sección total de armadura vertical que corta a la fisura en una longitud " d ".

11.4.2.- V_s para barras dobladas y/o cables curvos

Respecto a las barras dobladas vale lo visto en los ejemplos resueltos para hormigón no pretensado. Aquí no volveremos sobre el tema porque en elementos pretensados no es común el uso de barras dobladas.

Las armaduras de pretensado raramente pueden considerarse como parte de la armadura de alma dado que el reglamento no admite la colaboración de armaduras con una inclinación menor que 30° respecto a la horizontal.

11.4.3.- Limitación de V_s total

Tal como en elementos no pretensados, el CIRSOC 201-2005 no especifica una verificación directa de la fisuración del alma por efecto del corte ni de la resistencia de las bielas comprimidas, pero sí existe una verificación indirecta a través de la limitación al aporte de la armadura total al " V_n " de la fisura. Debe cumplirse:

$$V_s \leq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículo 11.5.7.9})$$

11.4.4.- Estribado mínimo

Para elementos pretensados con una fuerza de pretensado efectiva mayor o igual que el 40% de la resistencia a la tracción de la armadura de flexión el CIRSOC 201-2005, artículos 11.5.6.3 y 11.5.6.4, establece un área mínima de estribos dada por el menor valor entre (A) y (B):

$$\frac{A_v}{s} \geq \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w}{f_{yt}} \geq 0,33 \cdot \frac{b_w}{f_{yt}} \quad (\text{A})$$

lo que equivale a decir que, a los efectos prácticos:

$$\text{Si } f'_c < 30 \text{ MPa} \quad \frac{A_v}{s} \geq 0,33 \cdot \frac{b_w}{f_{yt}}$$

$$\text{Si } f'_c \geq 30 \text{ MPa} \quad \frac{A_v}{s} \geq \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w}{f_{yt}}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{A_{ps} \cdot f_{pu}}{80 \cdot f_{yt} \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{d}{b_w}} \quad (\text{B})$$

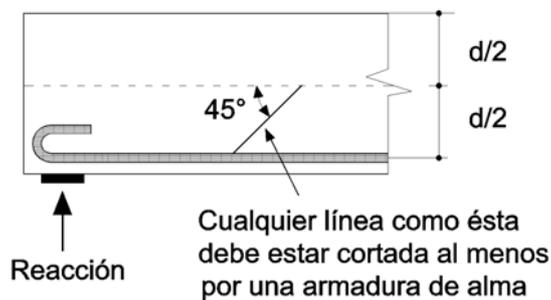
En la expresión (B), "d" es la altura útil de la sección pero no menor que $0,80 \cdot h$

Las áreas anteriores, por unidad de longitud, son válidas sólo si no existen o son despreciables los efectos de torsión.

11.4.5.- Separación máxima de armaduras de alma

Respecto a la presencia y separación de las armaduras de alma el CIRSOC 201-2005, artículos 11.5.5.1 a 11.5.5.3, indica que:

11.4.5.1.- Cualquier línea con las siguientes características:



- 1) Un extremo sobre la armadura principal de tracción
- 2) El otro extremo a "d/2" de la fibra de hormigón más comprimida
- 3) Pendiente 45°
- 4) El extremo inferior es el más próximo a la reacción que define el corte de proyecto

Debe ser cortada por, al menos, una línea de armadura de alma.

11.4.5.2.- Separación máxima para estribos normales al eje del elemento

$$\text{Si: } V_s \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad s \leq \begin{cases} (3/4) \cdot h \\ 400 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Si: } V_s > \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad s \leq \begin{cases} (3/8) \cdot h \\ 200 \text{ mm} \end{cases}$$

11.4.6.- Elementos sin armadura de alma

Si bien en nuestro medio no es común aceptar vigas sin armaduras de alma (aunque sí losas y zapatas sin armaduras de alma), el CIRSOC 201-2005, artículo 11.5.6.1, indica que si se cumplen algunos requisitos es admisible no colocar armadura de alma. Estos requisitos son:

$$V_u \leq \phi \cdot V_c / 2$$

Vigas cuya altura total verifique que: $h \leq$ máximo (250 mm ; $2,5 \cdot h_f$; $0,5 \cdot b_w$)

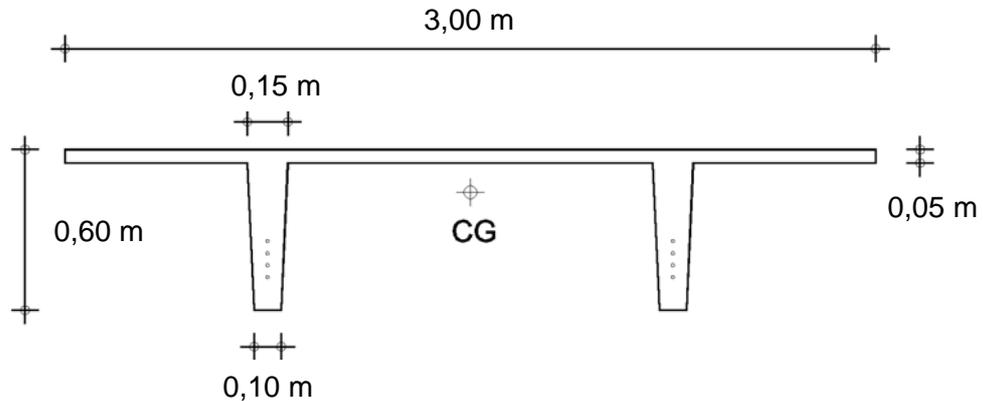
donde "h_f" es la altura del ala en vigas tipo "L" ó "T".

Se transcribe a continuación el comentario C11.5.6.1 del CIRSOC 201-2005: "Aún cuando el esfuerzo de corte mayorado total V_u , sea menor que la mitad (1/2) de la resistencia al corte proporcionada por el hormigón $\phi \cdot V_c$, se recomienda la colocación de alguna armadura en el alma, sobre todo en la totalidad de las almas delgadas de elementos postesados de hormigón

CORTE EN ELEMENTOS PRETENSADOS – EJEMPLO

Ejemplo 11.I

Enunciado: Determinar las armaduras de corte para el siguiente elemento prefabricado que será utilizado como parte de una cubierta para una nave industrial. El elemento será pretensado en banco y los elementos tensores serán rectos.



Materiales:

- Hormigón: H-35 ($f'_c = 35 \text{ MPa}$)
 $E_c = 4700 \cdot f'_c{}^{1/2} = 27806 \text{ MPa}$
 $f'_{ci} = 24,5 \text{ MPa}$ (en el momento del tesado)
 $E_{ci} = 4700 \cdot f'_{ci}{}^{1/2} = 23264 \text{ MPa}$
 $\gamma_H = 25 \text{ kN/m}^3$
- Acero:
 - Armaduras pasivas: ADN 420 ($f_y = f_{yt} = 420 \text{ MPa}$)
 - Armaduras activas: C-1900 Grado 270
 $d_{\text{nominal}} = 12,7 \text{ mm}$
 Tipo: cordón baja relajación
 $f_{pu} = 1864 \text{ MPa}$
 $f_{py} = 1682 \text{ MPa}$
 $E_{ps} = 195000 \text{ MPa}$
 Elementos tensores rectos

Sección transversal:

A_g	= sección bruta	= 0,288 m ²
Perímetro		= 8,202 m
I_g	= momento de inercia	= 0,00914 m ⁴
y_{inf}	= dist. CG a borde inferior	= 0,44 m
y_{sup}	= dist. CG a borde sup.	= 0,16 m
W_{inf}	= mód. resist. borde inf.	= 0,0208 m ³
W_{sup}	= mód. resist. borde sup.	= 0,0571 m ³

Esquema y luz de cálculo:

Esquema: Viga simplemente apoyada
Luz entre ejes de apoyos: 15,00 m

Cargas exteriores:

t_{D1}	= permanentes en el momento del tesado	= 0,00 kN/m
t_{D2}	= permanentes luego del tesado	= 3,00 kN/m
t_{L1}	= parte de sobrecarga casi-permanente	= 0,00 kN/m
t_{L2}	= resto de sobrecarga	= 6,00 kN/m

$$P_e = \text{Fuerza de tesado efectiva (luego de pérdidas)} = 1032,9 \text{ kN}$$

$$e = \text{Excentricidad media de los elementos tensores} = 0,25 \text{ m}$$

Acero de pretensado (cordones $d_b = 12,7 \text{ mm}$): $8 \cdot 98,7 \text{ mm}^2 = 790 \text{ mm}^2$
 Acero pasivo: 2 d_b12 por nervio

Utilizar estribado uniforme

Resolución:

a) Esfuerzos de corte y momentos flectores concomitantes

$$t_{D0} = \text{peso propio de la sección de hormigón} = 25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,288 \text{ m}^2 = 7,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga actuante en el momento del tesado} = t_{D0} + t_{D1} = 7,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga semi-permanente} = t_{D0} + t_{D1} + t_{D2} + t_{L1} = (7,20 + 3,00) \text{ kN/m} = 10,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga total máxima} = t_{D0} + t_{D1} + t_{D2} + t_{L1} + t_{L2} = (7,20 + 3,00 + 6,00) \text{ kN/m} = 16,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga mayorada: } w_u = 1,2 \cdot 10,20 \text{ kN/m} + 1,6 \cdot 6,00 \text{ kN/m} = 21,84 \text{ kN/m}$$

Llamando "x" a la distancia de una sección al eje del apoyo izquierdo se tiene:

$$\text{Esfuerzos de corte: } V_u(x) = w_u \cdot (L/2 - x)$$

$$\text{Momentos flectores: } M_u(x) = w_u \cdot x \cdot (L - x) / 2$$

b) Resistencia aportada por el hormigón

$$\text{Expresión (1): } V_c = (f'_c)^{1/2} / 20 + 5 \cdot V_u \cdot d_p / M_u \cdot b_w \cdot d \quad \text{con} \quad V_u \cdot d_p / M_u \leq 1$$

$$\text{Expresión (2): } f'_c)^{1/2} \cdot b_w \cdot d / 6$$

$$\text{Expresión (3): } 0,40 \cdot f'_c)^{1/2} \cdot b_w \cdot d$$

$$\text{Expresión (4): } V_{cw} = 0,30 \cdot (f'_c)^{1/2} + f_{pc} \cdot b_w \cdot d_p + V_p$$

- En las expresiones (1), (2) y (3), "d" es la distancia desde la fibra extrema comprimida hasta el baricentro de la armadura longitudinal traccionada tesa y no tesa, pero siempre deberá ser mayor o igual que $0,8 \cdot h$
- En la expresión (4), "d_p" será el mayor valor entre la distancia desde la fibra comprimida extrema hasta el baricentro de la armadura pretensada y $0,8 \cdot h = 0,48 \text{ m}$
- Se adopta un ancho medio: $b_w = 2 \cdot 0,125 \text{ m} = 0,25 \text{ m}$
- Al tener un cable recto se tiene: $V_p = 0$
- f_{pc} = Fuerza de pretensado luego de pérdidas / Sección de hormigón
- Se toma siempre (1) \leq mínimo [(3) ; (4)]
- Se puede tomar (1) \geq (2)
- Long. de transferencia = 50 diámetros del cordón = $50 \cdot 12,7 \text{ mm} = 635 \text{ mm}$ (0,635 m)
- En la longitud de transferencia se adopta una variación lineal de f_{pc}

c) Cálculo del estribado

$$V_n = V_u / \phi = V_u / 0,75 = V_c + V_s \quad \Rightarrow \quad V_s = V_n - V_c = n \cdot A_{1v} \cdot d \cdot f_{yt} / s$$