TORSIÓN EN SECCIONES NO PRETENSADAS

NOTA GENERAL: Las expresiones que figuran en estas notas respetan las unidades utilizadas en el CIRSOC 201-2005 es decir que las tensiones están expresadas en [MPa], las fuerzas es [N], los momentos en [N mm], las longitudes en [mm] y las superficies en [mm^2].

4.1.- Introducción

Las expresiones que da el CIRSOC 201-2005 son válidas para secciones huecas y macizas y para solicitaciones de torsión compuestas con corte, flexión y esfuerzos axiales. Las citadas expresiones están basadas en la analogía del reticulado espacial aplicada a un tubo de paredes delgadas. Para poder aplicar estas expresiones a secciones macizas estas son reemplazadas por secciones huecas equivalentes despreciándose, del lado seguro, la zona central.

A diferencia del corte en la resistencia a torsión no se adopta un reticulado de ángulo fijo y se supone que la totalidad de la solicitación de torsión es resistida por las armaduras longitudinales y transversales.

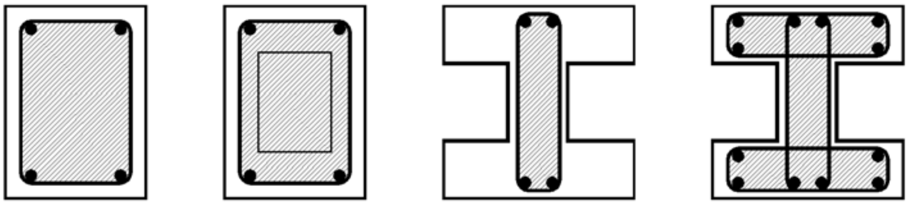
4.2.- Variables geométricas y una limitación

Además de las conocidas, otras variables geométricas derivadas utilizadas en Torsión son:

- $\mathbf{A_{cp}}$ = Es el área delimitada por la frontera exterior de la sección transversal de hormigón. Por lo tanto, si la sección tiene huecos, los mismos no se descuentan.

- $\mathbf{p_{cp}}$ = Perímetro de la frontera exterior de $\mathbf{A_{cp}}$.

- $\mathbf{A_{oh}}$ = Área cuya frontera exterior es el eje de las armaduras transversales más externas que resisten torsión (área encerrada por el eje de los estribos). Una vez más, si la sección tiene huecos, éstos no se descuentan.



NOTAS: - Todos lo estribos son cerrados
- Área sombreada = $\mathbf{A_{oh}}$

- $\mathbf{p_h}$ = Perímetro de la frontera exterior de $\mathbf{A_{oh}}$.

- **A_o** = Área total encerrada por la trayectoria del flujo de corte. Debería determinarse por un análisis detallado pero puede adoptarse igual a 0,85 de **A_{oh}**.

Cuando la sección sea tipo "T", se despreciará el aporte de las alas cuando el valor de (A_{cp}^2 / p_{cp}) sea menor para la sección completa que para el alma rectangular (artículo 11.6.1.1).

En todas las expresiones que se verán de aquí en adelante vale la siguiente limitación:

$$\sqrt{f'_c} \leq 8{,}3\,\text{MPa} \qquad \text{(artículo 11.1.2)}$$

4.3.- Posibilidad de despreciar la torsión

El CIRSOC 201-2005 permite despreciar la torsión cuando el momento torsor mayorado "T_u" sea menor que:

$$T_u = \frac{1}{12} \cdot \phi \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \qquad \text{(artículo 11.6.1.a)}$$

4.4.- Torsión de equilibrio y torsión de compatibilidad

La torsión de equilibrio es aquella cuyos valores son invariantes frente a una variación en la distribución de rigideces de los elementos estructurales, o sea, cuando es una solicitación de una estructura isostática, o de una porción isostática de la estructura. En otras palabras cuando es imprescindible para mantener el equilibrio.

La torsión de compatibilidad, en cambio, puede ser reducida si se disminuye la rigidez torsional de los elementos de la estructura. En este caso, los torsores se pueden reducir, en las secciones de máxima solicitación a un valor:

$$T_u = \frac{1}{3} \cdot \phi \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \cdot \sqrt{1 + \frac{3 \cdot N_u}{A_g \cdot \sqrt{f'_c}}} \qquad \text{(artículo 11.6.2.2.c)}$$

donde

A_g = Área total o bruta de la sección
N_u = Carga axial mayorada. Positiva si es de compresión

Una disminución de la rigidez torsional debe ir acompañada siempre de la correspondiente redistribución de solicitaciones (aumento de momentos flectores, en general).

La mayor parte de los reglamentos internacionales permite despreciar la torsión de compatibilidad es decir, adoptar rigidez torsional nula. Esta posibilidad también estaría incluida en el CIRSOC 201-2005 en el artículo 8.6.1 cuando dice respecto a las rigideces que "se puede adoptar cualquier conjunto de hipótesis razonables".

4.5.- Condición resistente

Manteniendo el formato utilizado para el resto de las solicitaciones, el CIRSOC 201-2005, artículo 9.1.1, exige que se verifique la condición resistente dada por:

$$T_u \leq \phi \cdot T_n \qquad \text{con}$$

T_u = Resistencia requerida calculada para cargas mayoradas
T_n = Resistencia nominal de la sección
ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia en función del tipo de rotura, que coincide con el correspondiente a Corte:

$$\phi = 0{,}75$$

4.6.- Secciones críticas

La condición resistente debe verificarse por lo menos en las siguientes secciones críticas (en solicitaciones compuestas puede haber secciones más desfavorables que las que se listan a continuación):

a) Elementos <u>NO</u> pretensados (artículo 11.6.2.4):

- En general, a una distancia "d" de la cara del apoyo
- Cuando exista un momento torsor concentrado dentro de una distancia "d" desde la cara del apoyo (por ejemplo un apeo de una ménsula) la sección crítica se tomará directamente en la cara del apoyo.

b) Elementos pretensados (artículo 11.6.2.5):

Ídem al punto anterior reemplazando "d" por "h/2".

4.7.- Momento torsor de fisuración

$$T_{cr} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \qquad \text{(artículo C11.6.1)}$$

4.8.- Verificación de bielas comprimidas y fisuración (artículo 11.6.3.1)

Secciones macizas: $$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{T_u \cdot p_h}{1{,}7 \cdot A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \cdot \left(\frac{V_c}{b_w \cdot d} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c}\right)$$

Secciones huecas: $$\left(\frac{V_u}{b_w \cdot d}\right) + \left(\frac{T_u \cdot p_h}{1{,}7 \cdot A_{oh}^2}\right) \leq \phi \cdot \left(\frac{V_c}{b_w \cdot d} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c}\right)$$

4.9.- Resistencia nominal a torsión y cálculo de armaduras

4.9.1.- Notación

- **A_ℓ** : Es la armadura longitudinal neta para torsión (debe descontarse la armadura necesaria para resistir flexión).
- **$f_{y\ell}$** : Tensión de fluencia especificada del acero de la armadura longitudinal.
- **A_t / s** : Es la armadura transversal neta para torsión (debe descontarse la armadura necesaria para resistir corte), considerando la sección de una rama de los estribos cerrados y adecuadamente empalmados, de manera tal que su aporte sea constante en todo el perímetro de los mismos.
- **f_{yt}** : Tensión de fluencia especificada del acero de la armadura transversal (estribos).

La armadura longitudinal neta para torsión debe distribuirse de manera uniforme en el perímetro de la sección, ya que se encuentra traccionada en su totalidad.

4.9.2.- Ángulo de las diagonales comprimidas

El CIRSOC 201-2005, artículo 11.6.3.6, establece que el ángulo de las diagonales comprimidas debe verificar: $30º \leq \theta \leq 60º$. Asimismo, dice que puede adoptarse:

$\theta = 37{,}5º$ para elementos pretensados con una fuerza efectiva de pretensado mayor que el 40% de la resistencia a tracción de la armadura longitudinal

$\theta = 45º$ para elementos no pretensados o pretensados que no cumplan la condición del punto anterior

Si son conocidas las armaduras puede calcularse:

$$\operatorname{tg}(30°) \leq \operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{\frac{\left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}{\left(\frac{A_\ell}{p_h} \cdot f_{y\ell}\right)}} \leq \operatorname{tg}(60°)$$

Si bien el CIRSOC 201-2005 no hace ninguna referencia explícita al tema, dado que las armaduras de corte se calculan partiendo de una inclinación de fisuras de 45º, este parece un ángulo lógico cuando se analizan fenómenos combinados de corte y torsión.

4.9.3.- Resistencia nominal

Las siguientes expresiones equivalentes pueden utilizarse para el cálculo de la resistencia nominal, ver los artículos 11.6.3.6 y 11.6.3.7:

$$T_n = \frac{2 \cdot A_o \cdot A_t \cdot f_{yt}}{s} \cdot \cot g\,(\theta)$$

$$T_n = \frac{2 \cdot A_o \cdot A_\ell \cdot f_{y\ell}}{p_h \cdot \cot g\,(\theta)}$$

$$T_n = 2 \cdot A_o \cdot \sqrt{\left(\frac{A_\ell}{p_h} \cdot f_{y\ell}\right) \cdot \left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}$$

Tal como se ha visto, el CIRSOC 201-2005 admite que, en forma aproximada, "A_o" sea reemplazado por el valor "0,85 · A_{oh}" con lo que las expresiones anteriores se transforman en:

$$T_n = \frac{1{,}7 \cdot A_{oh} \cdot A_t \cdot f_{yt}}{s} \cdot \cot g\,(\theta)$$

$$T_n = \frac{1{,}7 \cdot A_{oh} \cdot A_\ell \cdot f_{y\ell}}{p_h \cdot \cot g(\theta)}$$

$$T_n = 1{,}7 \cdot A_{oh} \cdot \sqrt{\left(\frac{A_\ell}{p_h} \cdot f_{y\ell}\right) \cdot \left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}$$

4.9.4.- Armaduras para resistir torsión

Para los estados combinados de Torsión + Flexión + Corte (es prácticamente imposible que la torsión aparezca aislada), las armaduras se obtienen por adición:

4.9.4.1.- Armadura transversal

Suponiendo un estribado en dos ramas, la cantidad de armadura correspondiente a cada una de las ramas se obtiene como:

Estribado TOTAL (una cara) = $[A_t / s]_{TORSIÓN}$ + $[A_v / s]_{CORTE} / 2$

A_t / s = armadura de alma calculada para suponiendo que sólo hay torsión
A_v / s = armadura de alma calculada para suponiendo que sólo hay corte

En la expresión anterior "A_t / s" no merece ningún comentario dado que de los cálculos siempre se obtiene el estribado correspondiente a una cara. En el caso de "A_v / s" este término se refiere a la armadura total de corte por lo que en la expresión anterior deben hacerse las consideraciones necesarias para sumar solamente la armadura dispuesta en una cara.

4.9.4.2.- Armadura longitudinal

En los problemas prácticos las armaduras longitudinales de las secciones no serán simétricas ni se encontrarán uniformemente distribuidas en las caras o concentradas en las esquinas.

Al analizar la armadura longitudinal conviene recordar que las roturas por torsión pueden producirse con cualquiera de las caras de la sección traccionada. Para que ninguna de las caras resulte más débil que las demás conviene definir el concepto de “armadura neta de torsión”. Las expresiones de “T_n” vistas anteriormente parten de la existencia de cuatro armaduras longitudinales ubicadas en las esquinas de la sección resistente por lo que podría pensarse que, a los efectos de la torsión, cada cara cuenta con una armadura igual a “$A_\ell/2$”. Razonando inversamente podemos decir que la armadura neta disponible para resistir torsión es igual al doble de la armadura dispuesta sobre la cara menos armada.

Este concepto resulta interesante cuando se tienen problemas de torsión combinada con flexión en los que hay que asegurar que en cada cara esté disponible en forma efectiva por lo menos una armadura igual a “$A_\ell/2$” para resistir torsión. En las caras traccionadas por la flexión habrá que agregar armadura para que esto sea posible y en las comprimidas por la flexión la armadura necesaria por torsión podrá disminuirse (obviamente no es obligatorio hacerlo).

En una sección como la indicada en la Figura a) deben hacerse las consideraciones indicadas en la Figura b) para asegurar la resistencia simultánea a flexión y torsión llamando “A_s” y “A'_s” a las armaduras traccionadas y comprimidas necesarias por flexión.

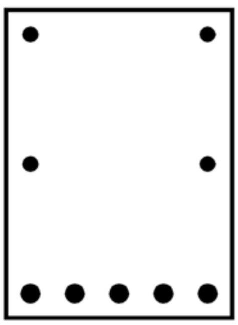


Figura a)

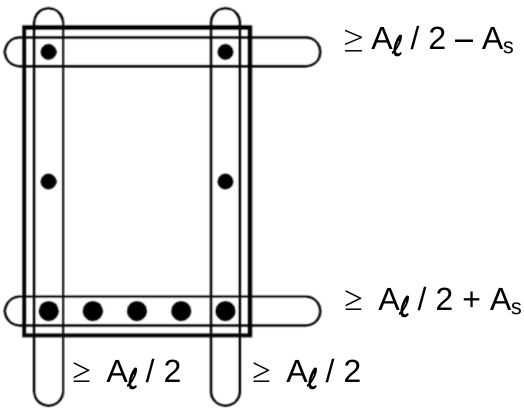


Figura b)

Podría pensarse en que lo que se hace es distribuir por partes iguales en cada cara la armadura necesaria por torsión y luego se la corrige en las caras inferior y superior debido a las fuerzas del par que equilibra la flexión. En rigor, el CIRSOC 201-2005 no suma y resta armaduras sino fuerzas pero el trabajo en términos de armaduras es prácticamente equivalente y operativamente mucho más cómodo.

Las condiciones impuestas a las caras laterales en la Figura b) no son explícitas en el CIRSOC 201-2005. Intentan evitar algunas situaciones que pueden presentarse al no utilizar armaduras concentradas en las cuatro esquinas. En todo caso son conservadoras y el proyectista podrá evaluar la conveniencia de su utilización.

4.10.- Armaduras mínimas y separaciones máximas reglamentarias

4.10.1.- Armadura mínima transversal (estribado mínimo)

En todas las zonas donde el momento torsor no pueda ser despreciado habrá que colocar un estribado mínimo que deberá verificar:

$$\left(A_v + 2 \cdot A_t\right) = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w \cdot s}{f_{yt}} \geq \frac{0{,}33 \cdot b_w \cdot s}{f_{yt}} \qquad \text{(artículo 11.6.5.2)}$$

donde "A_v" es el área total de armadura de corte y "A_t" es el área de armadura de torsión correspondiente a una cara. Asimismo "f_{yt}" es la tensión de fluencia especificada para las armaduras de alma.

4.10.2.- Armadura mínima longitudinal neta para torsión

En todas las zonas donde el momento torsor no pueda ser despreciado habrá que disponer un área de armadura longitudinal de torsión mínima dada por:

$$A_{\ell,\text{mín}} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}}{f_{y\ell}} - \left[\frac{A_t}{s}\right] \cdot p_h \cdot \frac{f_{yt}}{f_{y\ell}} \qquad \text{(artículo 11.6.5.3)}$$

en la expresión anterior "$f_{y\ell}$" es la tensión de fluencia especificada para la armadura longitudinal y además (A_t / s) no debe tomarse menor que "b_w / (6 · f_{yt})". En esta última expresión debe recordarse que el CIRSOC 201-2005 siempre expresa las medidas lineales en [mm] y las tensiones en [MPa].

El diámetro de la armadura longitudinal deberá verificar la condición:

$$d_b \geq \text{máx}\ (s / 24 \ ; \ 10 \text{ mm})$$

y la separación máxima entre barras o alambres deberá ser menor que 0,30 m (artículo 11.6.6.2).

4.10.3.- Separación máxima entre estribos

Para el caso de Torsión pura, el CIRSOC 201-2005, artículo 11.6.6.1, especifica:

$$s \leq \begin{cases} p_h / 8 \\ 300 \text{ mm} \end{cases}$$

En el caso más general en que actuara también un esfuerzo de corte, deberían tenerse en cuenta también las separaciones máximas para esta solicitación y adoptar la condición más restrictiva:

Si $\quad V_s \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \qquad s \leq \begin{cases} d/2 \\ 400 \text{ mm} \end{cases}$ (artículo 11.5.5.1)

Si $\quad V_s > \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \qquad s \leq \begin{cases} d/4 \\ 200 \text{ mm} \end{cases}$ (artículo 11.5.5.3)

Cuando la torsión no pueda ser despreciada los estribos deberán ser cerrados y sus extremos estarán adecuadamente anclados. En general los ganchos extremos estarán doblados a 135º salvo que exista confinamiento lateral dado por la presencia de un ala, una losa o algún otro elemento similar en cuyo caso se podrá utilizar ganchos a 90º (artículo 11.6.4.2). Nunca podrá quedar la parte doblada de un gancho paralela a un borde libre de hormigón (ya sea horizontal o vertical).

TORSIÓN – EJEMPLOS

Ejemplo 4.I

Enunciado: Calcular y adoptar las armaduras para la siguiente sección cuadrada de 0,50 m de lado, sometida a las siguientes acciones:

Materiales:
- Hormigón: H–25 (f'_c = 25 MPa)
- Acero: ADN 420 ($f_y = f_{yt}$ = 420 MPa)

Sección transversal:
- b_w = 0,50 m ; h = 0,50 m
- Recubrimiento al eje del estribo = 0,025 m (estimado)
- Rec. al eje de la armadura de flexión = 0,045 m (estimado)
- d = 0,50 m – 0,045 m = 0,455 m

Solicitaciones:

M_U = 140 kNm
V_U = 180 KN
T_U = 71 kNm (de equilibrio)

Resolución:

a) Solicitaciones nominales

$M_n = M_u / \phi = M_u / 0{,}90 = 155{,}6$ kNm
$V_n = V_u / \phi = V_u / 0{,}75 = 240{,}0$ kN
$T_n = T_u / \phi = T_u / 0{,}75 = 94{,}7$ kNm

b) Valores auxiliares

$f'^{1/2}_c$ = 5 MPa = 5000 kN/m^2 < 8,3 MPa
$f'^{1/2}_c \cdot b_w \cdot d$ = 5000 kN/m^2 · 0,50 m · 0,455 m = 1137,5 kN

$V_c = f'^{1/2}_c \cdot b_w \cdot d / 6$ = 5000 kN/m^2 · 0,50 m · 0,455 m / 6 = 189,6 kN
$V_c / (b_w \cdot d) = f'^{1/2}_c / 6$ = 0,83 MPa = 833 kN/m^2

A_{cp} = 0,50 m · 0,50 m = 0,25 m^2
p_{cp} = 2 · (0,50 m + 0,50 m) = 2,00 m

A_{oh} = (0,50 m – 2 · 0,025 m)^2 = 0,2025 m^2
p_h = 2 · 2 · (0,50 m – 2 · 0,025 m) = 1,80 m

c) ¿Es posible despreciar la torsión?

Para poder despreciar la torsión debe ser: $T_u \le \frac{1}{12} \cdot \phi \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{{A_{cp}}^2}{p_{cp}}$

T_u = 71 kNm > 0,75 · 5000 kN/m^2 · (0,25 m^2)^2 / (12 · 2,00 m) = 9,8 kNm

Por lo que la torsión deberá ser tenida en consideración.

d) Verificación de fisuración en el alma y bielas comprimidas

Por tratarse de una sección maciza debe verificarse:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{T_u \cdot p_h}{1{,}7 \cdot A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \cdot \left(\frac{V_c}{b_w \cdot d} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c}\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{180\ \text{kN}}{0{,}5\ \text{m} \cdot 0{,}455\ \text{m}}\right)^2 + \left(\frac{71\ \text{kNm} \cdot 1{,}8\ \text{m}}{1{,}7 \cdot \left(0{,}2025\ \text{m}^2\right)^2}\right)^2} \leq 0{,}75 \cdot \left(833\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} + \frac{2}{3} \cdot 5000\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}\right)$$

$$1996{,}74\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \leq 3125\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Por lo tanto verifica adecuadamente.

e) Cálculo de las armaduras necesarias por flexión

$m_n = M_n / (b_w \cdot d^2 \cdot 0{,}85 \cdot f'_c) = 0{,}07074$
$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 0{,}07344$ por lo que $k_c = k_a / 0{,}85 = 0{,}086 < 0{,}375 \Rightarrow A'_s = 0$

$A_s = k_a \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}07344 \cdot 0{,}85 \cdot 25$ MPa $\cdot$ 500 mm $\cdot$ 455 mm / 420 MPa =
$A_s = 845$ mm^2

$A_{s\ mín} = 1{,}4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1{,}4$ MPa $\cdot$ 500 mm $\cdot$ 455 mm / 420 MPa =
$A_{s\ mín} = 758$ mm^2

$A_s > A_{s\ mín}$

f) Cálculo de las armaduras necesarias por corte

$V_s = V_n - V_c = 240{,}0$ kN – 189,6 kN = 50,4 kN

$A_v / s = V_s / (d \cdot f_{yt})$ = [50,4 kN / (0,455 m · 420 MPa)] · 1000 mm^2 MN / (m^2 kN) =
$A_v / s = V_s / (d \cdot f_{yt})$ = 264 mm^2/m

No se verifica aquí cuantía mínima ni se adoptan barras y separaciones pues se utilizará un único estribado que integre las necesidades del corte y de la torsión.

g) Armaduras necesarias para torsión

Como se está dimensionando una pieza de hormigón no pretensado se adopta $\theta = 45°$ además, al utilizar un único acero se tiene $f_{yt} = f_{y\ell} = f_y$

Al utilizar $\theta = 45°$ resulta: $A_\ell / p_h = A_t / s$ por lo que operando con la expresión

$$T_n = \frac{1{,}7 \cdot A_{oh} \cdot A_t \cdot f_{yt}}{s} \cdot \cot g\,(\theta)$$

se obtiene

$A_\ell / p_h = A_t / s = T_n / (1{,}7 \cdot A_{oh} \cdot f_{yt} \cdot \text{cotg}\ (\theta))$
$A_\ell / p_h = A_t / s = [94{,}7\ \text{kNm} / (1{,}7 \cdot 0{,}2025\ \text{m}^2 \cdot 420000\ \text{kN/m}^2 \cdot \text{cotg}\ (45º))] \cdot 10^6\ \text{mm}^2 / \text{m}^2$
$A_\ell / p_h = A_t / s = 655\ \text{mm}^2 / \text{m}$

y en consecuencia

$A_\ell = 655\ \text{mm}^2 / \text{m} \cdot 1{,}8\ \text{m} = 1179\ \text{mm}^2$

La verificación de la cuantía mínima de armadura longitudinal se hace a través de la expresión:

$$A_{\ell,\text{mín}} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}}{f_{y\ell}} - \left[\frac{A_t}{s}\right] \cdot p_h \cdot \frac{f_{yt}}{f_{y\ell}}$$

donde "$f_{y\ell}$" es la tensión de fluencia especificada para la armadura longitudinal y además (A_t / s) no debe tomarse menor que "$b_w / (6 \cdot f_{yt}) = 198\ \text{mm}^2/\text{m}$" valor superado por la armadura calculada.

$A_{\ell,\text{mín}} = [5 \cdot 5\ \text{MPa} \cdot 0{,}25\ \text{m}^2 / (12 \cdot 420\ \text{MPa})] \cdot 10^6\ \text{mm}^2/\text{m}^2 – 655\ \text{mm}^2/\text{m} \cdot 1{,}80\ \text{m} =$
$A_{\ell,\text{mín}} = 61\ \text{mm}^2$

Por lo que la armadura calculada verifica cuantía mínima.

h) Adopción de armaduras

h.1) Armadura transversal

Partiendo de un estribado en dos ramas la armadura necesaria es:

$0{,}5 \cdot A_v / s + A_t / s = 0{,}5 \cdot 264\ \text{mm}^2/\text{m} + 655\ \text{mm}^2/\text{m} = 787\ \text{mm}^2/\text{m}$

La cuantía mínima se verifica a través de la expresión:

$$\left(A_v + 2 \cdot A_t\right) = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w \cdot s}{f_{yt}} \geq \frac{0{,}33 \cdot b_w \cdot s}{f_{yt}}$$

Para evitar adoptar una armadura que no verificara cuantía mínima y tener que repetir cálculos se reordena la ecuación anterior para obviar tener que conocer la separación de las armaduras:

$[(A_v + 2 \cdot A_t) / s]_{mín} = [5 \text{ MPa} \cdot 0{,}5 \text{ m} / (16 \cdot 420 \text{ MPa})] \cdot 10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2 =$
$[(A_v + 2 \cdot A_t) / s]_{mín} = 372 \text{ mm}^2/\text{m} \geq 392 \text{ mm}^2/\text{m}$

es decir que la cuantía mínima es de 392 mm^2/m y hay dispuestos $2 \cdot 787 \text{ mm}^2/\text{m} = 1574 \text{ mm}^2/\text{m}$ por lo que dicha cuantía mínima se verifica adecuadamente.

La separación máxima de armaduras, atendiendo solamente a la torsión, será:

$s \leq \text{mínimo } (p_h / 8 \text{ ; } 300 \text{ mm}) = 225 \text{ mm}$

Teniendo en consideración también el corte se verifica que: $V_s \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$ por lo que resulta:

$s \leq \text{mínimo } (d / 2 \text{ ; } 400 \text{ mm}) = 228 \text{ mm}$

La armadura adoptada deberá tener entonces una separación menor que 225 mm.

Se adopta finalmente un estribado en dos ramas d_b12 c / 0,14 m (807 mm^2/m)

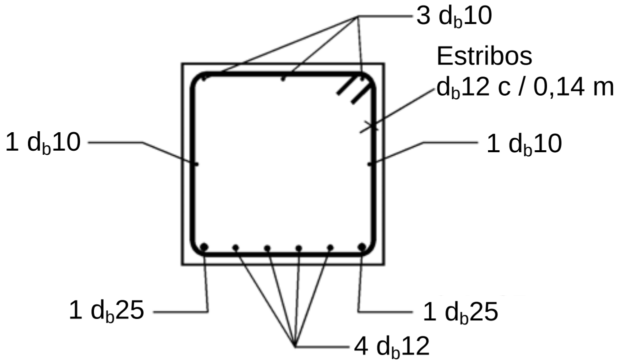
h.2) Armadura longitudinal

La armadura longitudinal debe ser corregida por el efecto de la flexión por lo que resulta:

Armadura cara inferior = $A_\ell / 2 + A_s = 1179 \text{ mm}^2 / 2 + 845 \text{ mm}^2 = 1435 \text{ mm}^2$
Armadura cara superior = $A_\ell / 2 - A_s = 1179 \text{ mm}^2 / 2 - 845 \text{ mm}^2 < 0$ (no necesaria)
Armadura caras laterales = $A_\ell / 2 = 1179 \text{ mm}^2 / 2 = 590 \text{ mm}^2$

Siempre que aparezca torsión habrá que disponer armadura longitudinal en las cuatro esquinas de la sección.

En función del estribado adoptado la armadura longitudinal deberá tener un diámetro mínimo de: $d_b \geq \text{máx } (s / 24 \text{ ; } 10 \text{ mm}) = 10 \text{ mm}$. Por otra parte en estos casos deberá haber armaduras distanciadas no más de 300 mm.



Ejemplo 4.II

Enunciado: Calcular la capacidad a torsión de la sección finalmente adoptada en el Ejemplo 4.I pero considerando ahora que el momento flector actuante es un cuarto del utilizado en dicho ejemplo, es decir:

$$M_u = 140 \text{ kNm} / 4 = 35 \text{ kNm}$$

Se trata de un caso muy poco probable pues sería muy raro que el momento flector pudiera variar sin hacerlo el corte. El ejemplo se ha elegido así porque se trata de poner de manifiesto un comportamiento de la resistencia a torsión que quedaría enmascarado si además se hiciera variar el corte.

Resolución:

a) Cálculo de las armaduras necesarias por flexión

En este punto no es necesario verificar cuantías pues la máxima está verificada para un momento mayor en el Ejemplo 4.I y la mínima está cubierta por la armadura dispuesta. Lo que interesa es saber las fuerzas, que moviliza la flexión, reducidas a términos de armaduras.

$M_n = M_u / \phi = M_u / 0{,}9 = 35 \text{ kNm} / 0{,}9 = 38{,}9 \text{ kNm}$

$m_n = M_n / (b_w \cdot d^2 \cdot 0{,}85 \cdot f'_c) = 0{,}01768$
$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 0{,}01784$
$A_s = k_a \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}01784 \cdot 0{,}85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 500 \text{ mm} \cdot 455 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} =$
$A_s = 205 \text{ mm}^2$

b) Armaduras netas disponibles para torsión

b.1) Armadura transversal

Dado que el esfuerzo de corte no ha cambiado, la armadura disponible coincide con la del Ejemplo 4.I. Sin introducir errores significativos utilizaremos la teórica en lugar de la efectivamente colocada.

b.2) Armadura longitudinal

Cara inferior = $2\, d_b25 + 4\, d_b12 - A_s = 1229 \text{ mm}^2$
Cara superior = $3\, d_b10 + A_s = 441 \text{ mm}^2$
Caras laterales = $1\, d_b25 + 2\, d_b10 = 648 \text{ mm}^2$

La armadura longitudinal disponible para torsión resultará entonces igual al doble de la armadura de la cara con menor armadura disponible, es decir:

$$A_\ell = 2 \cdot 441 \text{ mm}^2 = 882 \text{ mm}^2$$

c) Inclinación de las fisuras

La inclinación debe verificar:

$$tg(30°) \leq tg(\theta) = \sqrt{\frac{\left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}{\left(\frac{A_\ell}{p_h} \cdot f_{y\ell}\right)}} \leq tg(60°)$$

Tal como se ha comentado en el enunciado, se está tratando de variar lo menos posible las condiciones del problema anterior de modo de poner de manifiesto la variación de T_u al modificar solamente M_u por ese motivo, sin introducir errores significativos, se tiene:

$A_t / s = 655\ mm^2/m$
$A_\ell / p_h = 882\ mm^2 / 1,80\ m = 490\ mm^2/m$

por lo que la expresión anterior se transforma en

$$0,577 \leq (655\ mm^2 / 490\ mm^2)^{1/2} = 1,156 \leq 1,73$$

Es decir, que el ángulo es aceptable. Operando se obtiene $\theta = 49,1º$

d) Torsor resistente nominal

La expresión a emplear en este caso es:

$$T_n = 1,7 \cdot A_{oh} \cdot \sqrt{\left(\frac{A_\ell}{p_h} \cdot f_{y\ell}\right) \cdot \left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}$$

$T_n = 1,7 \cdot 0,2025\ m^2 \cdot 420000\ kN/m^2 \cdot (490\ mm^2/m \cdot 655\ mm^2/m)^{1/2} / (10^6\ mm^2/m^2) =$
$T_n = 82,0\ kNm$

lo que implica que:

$T_u = \phi \cdot T_n = 0,75 \cdot T_n = 61,5\ kNm$

Valores menores a los del Ejemplo 4.I. Como conclusión puede decirse que, en este caso, al disminuir el momento flector disminuye la capacidad resistente a torsión. Las diferencias hubieran sido mucho mayores si en el Ejemplo 4.I se hubieran adoptado los valores teóricos necesarios en lugar de respetar los diámetros y separaciones máximas para la armadura longitudinal.

La verificación de fisuración del alma es innecesaria dado que al mantenerse el corte y disminuir la torsión mejoran las condiciones ya verificadas en el Ejemplo 4.I.