FLEXIÓN SIMPLE

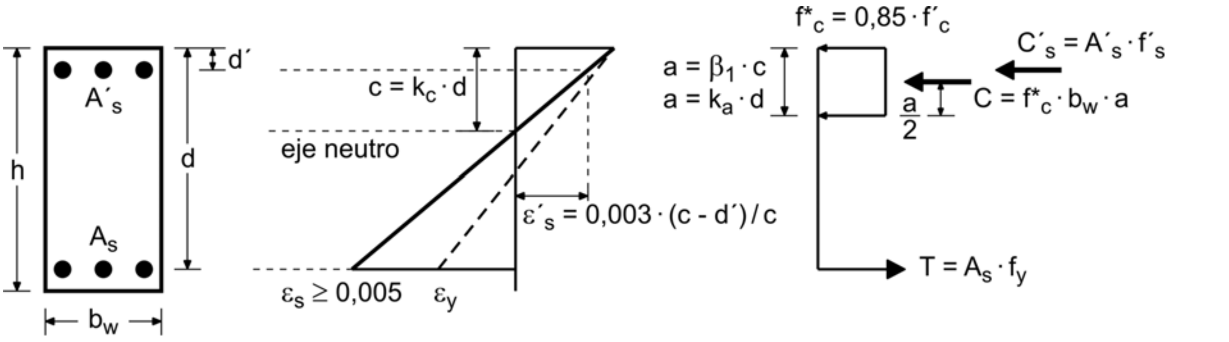


Figura 2.a

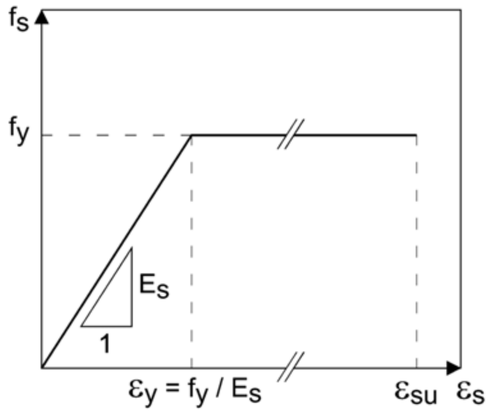


Figura 2.b

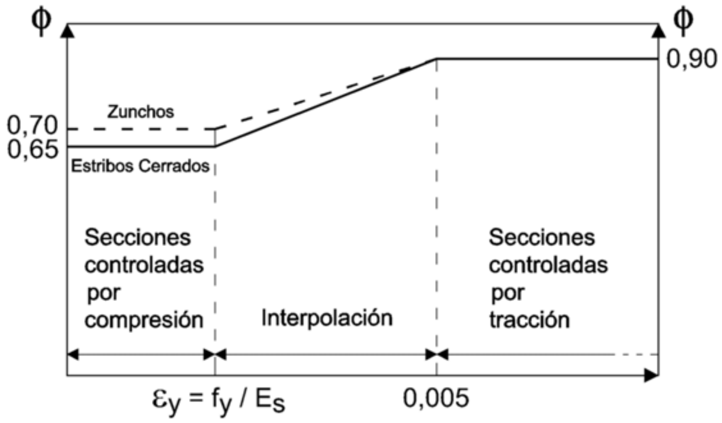


Figura 2.c

2.1.- Generalidades

En las Figuras 2.a, 2.b y 2.c se han resumido gran parte de las hipótesis y de la notación que se utilizarán en la resolución de los ejemplos.

Los ejemplos se han resuelto en base a las siguientes premisas:

a) Las secciones deben verificar la condición resistente (artículo 9.1.1) dada por:

$M_u \leq \phi \cdot M_n$ con

M_u = Resistencia requerida calculada para cargas mayoradas

M_n = Resistencia nominal ("real") de la sección

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia en función del tipo de rotura

b) Las secciones se proyectan para que presenten roturas dúctiles (precedidas por importantes deformaciones y fisuración) por lo que se establece una deformación mínima para el acero más traccionado[1] de 0,005 (esto implica que todos los aceros comerciales se encontrarán en fluencia por tracción). Este tipo de secciones se denominan controladas por tracción (artículo 10.3.4) (Figura 2.c).

[1] Cuando existan varias capas de armaduras la deformación a considerar será la de la capa que se encuentre más alejada del eje neutro. Por ese motivo se habla del "acero más traccionado".

c) En función de la hipótesis anterior, y de acuerdo con la Figura 2.c, el coeficiente ϕ puede tomarse siempre igual a 0,90 (artículo 9.3.2.1).

d) Las secciones inicialmente planas se mantienen planas luego de deformarse (artículo 10.2.2). Esta hipótesis permite aplicar semejanza de triángulos para conocer las deformaciones que experimentan armaduras ubicadas en cualquier posición (Figura 2.a).

e) El hormigón no resiste tracciones (artículo 10.2.5).

f) La deformación de rotura del hormigón es siempre de 0,003 por lo que todos los posibles planos de deformación de la sección transversal se obtienen pivotando alrededor de dicha deformación (Figura 2.a) (artículo 10.2.3).

g) Existe solidaridad resistente entre el acero y el hormigón (adherencia) por lo tanto ambos materiales experimentan iguales deformaciones específicas si se encuentran a igual distancia del eje neutro de deformaciones (puede considerarse redundante con el mantenimiento de las secciones planas).

h) Las tensiones de compresión en el hormigón pueden representarse mediante un bloque de tensiones uniformes de valor $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c$ (artículo 10.2.7.1), siendo "f'_c" la resistencia especificada de compresión del hormigón (Figura 2.a).

i) El eje neutro de tensiones es paralelo al eje neutro de deformaciones y la profundidad "a" del bloque de tensiones en el hormigón está relacionada con la profundidad "c" del eje neutro de deformaciones mediante la expresión: $a = \beta_1 \cdot c$ (artículo 10.2.7.1) (Figura 2.a), donde:

Si $f'_c \le 30$ MPa $\quad \beta_1 = 0{,}85$ y

Si $f'_c > 30$ MPa $\quad \beta_1 = 0{,}85 - 0{,}05 \cdot (f'_c - 30 \text{ MPa}) / 7 \ge 0{,}65$ (art. 10.2.7.3)

j) El acero tiene un comportamiento perfectamente elastoplástico (Figura 2.b). Para deformaciones menores a las de fluencia su tensión se calcula como el producto de su deformación específica por el módulo de elasticidad ($E_s = 200000$ MPa) a partir de allí su tensión es igual a la tensión de fluencia especificada "f_y" (artículo 10.2.4).

k) Si el momento solicitante fuera mayor que el resistido en base a las deformaciones límites establecidas para los materiales ($\varepsilon'_{cu} = 0{,}003$ y $\varepsilon_s \ge 0{,}005$) se recurrirá al uso de armadura comprimida (A'_s) de modo de mantener el eje neutro en su profundidad máxima (artículo 10.3.5.1). Esta profundidad se obtiene por semejanza de triángulos asignando a los materiales las deformaciones límites:

$c = d \cdot 0{,}003 / (0{,}003 + 0{,}005) = 0{,}375 \cdot d$

l) Para asegurar una ductilidad mínima las secciones no podrán proyectarse con una armadura menor que:

Si $f'_c \le 30$ MPa $\quad A_{s\,mín} = 1{,}4 \cdot b_w \cdot d / f_y$

Si $f'_c > 30$ MPa $\quad A_{s\,mín} = \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d / (4 \cdot f_y)$ (artículo 10.5.1)

donde f'_c y f_y se encuentran expresados en MPa.

2.2.- Secciones rectangulares

2.2.1.- Ecuaciones generales de equilibrio

En el caso más general, planteando momentos respecto a la armadura traccionada se tiene (Figura 2.a):

$$M_n = M_c + M'_s = C \cdot (d - a / 2) + C'_s \cdot (d - d')$$

y planteando equilibrio de fuerzas horizontales:

$A_s \cdot f_y = C + C'_s$

2.2.2.- Cuantías límites

a) Cuantía mínima

Dado que la cuantía mínima es la menor armadura a disponer, se estará muy lejos de la cuantía máxima y por lo tanto no se tendrá armadura comprimida, es decir que se tendrá solamente:

$T = A_s \cdot f_y = C = f^*_c \cdot b_w \cdot a = f^*_c \cdot b_w \cdot k_a \cdot d$ y por lo tanto
$k_a = A_s \cdot f_y / (f^*_c \cdot b_w \cdot d)$

Una sección contará con una armadura mayor que la mínima cuando

$$k_a \geq k_{a\ mín} = A_{s\ mín} \cdot f_y / (f^*_c \cdot b_w \cdot d)$$

Si $f'_c \leq 30$ MPa $\quad k_a \geq k_{a\ mín} = 1{,}4 / f^*_c = 1{,}4 / (0{,}85 \cdot f'_c)$
Si $f'_c > 30$ MPa $\quad k_a \geq k_{a\ mín} = 1 / (3{,}4 \cdot \sqrt{f'_c}\ )$

b) Cuantía máxima

Una sección requerirá armadura de compresión cuando la sección de hormigón comprimido sea insuficiente como para equilibrar el momento externo. El momento máximo que puede equilibrar el hormigón se da cuando se alcanza la máxima deformación de compresión en el hormigón (0,003) y la mínima deformación de tracción en el acero (0,005) [2] es decir cuando:

$c_{máx} = 0{,}003 \cdot d / (0{,}003 + 0{,}005) = 0{,}375 \cdot d$ por lo que resulta
$k_{c\ máx} = c_{máx} / d = 0{,}375$ y por lo tanto
$k_{a\ máx} = k_{c\ máx} \cdot \beta_1 = 0{,}375 \cdot \beta_1$

Existen otras razones para limitar la profundidad máxima del eje neutro. Este es el caso de las secciones en las que se pretenda efectuar una redistribución plástica de momentos. El CIRSOC 201-2005, artículo 8.4.3, pide para estos casos una deformación mínima en el acero de 0,0075 y puede ser aún mayor dependiendo del porcentaje de redistribución que se desee. Volveremos más adelante sobre este tema. En esta serie de ejemplos se tomará como cuantía máxima la correspondiente a la deformación de 0,005 en el acero más traccionado.

2.2.3.- Cálculo de armaduras

$M_n = M_u / \phi = M_u / 0{,}9$

[2] Si bien el CIRSOC 201-2005 permite llegar a una deformación mínima de 0,004 simultáneamente indica una reducción del factor "ϕ" que vuelve antieconómicas soluciones con deformaciones menores a 0,005.

En primera instancia supondremos que no es necesario disponer armadura comprimida:

$M_n = f^*_c \cdot b_w \cdot a \cdot (d - a/2) = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a/2)$ y llamando

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2)$ resulta

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2}$

a) Si $k_a \leq k_{a\,mín}$ se adopta $A_s = A_{s\,mín} = f^*_c \cdot b_w \cdot k_{a\,mín} \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$

b) Si $k_{a\,mín} < k_a \leq k_{a\,máx}$ se calcula $A_s = f^*_c \cdot b_w \cdot k_a \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$

c) Si $k_a > k_{a\,máx}$ se requerirá el uso de armadura comprimida, es decir $A'_s > 0$

El máximo momento que podrá tomar la sección comprimida de hormigón es:

$M_c = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a\,máx} \cdot (1 - k_{a\,máx}/2)$

por lo que el momento remanente deberá ser tomado por la armadura comprimida:

$\Delta M_n = M'_s = M_n - M_c = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d')$ donde la tensión "f'_s" surge de

$\varepsilon'_s = 0{,}003 \cdot (c - d') / c$

Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y = f_y / E_s = f_y / 200000$ MPa entonces $f'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$
Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$ entonces $f'_s = f_y$

por lo que se puede despejar la armadura comprimida como:

$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$

finalmente, de la sumatoria de fuerzas se obtiene

$A_s = f^*_c \cdot b_w \cdot k_{a\,máx} \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$

Si en cualquier situación se deseara conocer la deformación de la armadura más traccionada esta se obtiene por semejanza de triángulos como:

$\varepsilon_s = 0{,}003 \cdot (d - c) / c = 0{,}003 \cdot (1 - k_c) / k_c$ con $k_c = k_a / \beta_1$

2.3.- Secciones con alas ("T" y "L")

2.3.1.- Geometrías

Las Figuras 2.3.1.1.a) á c) muestran los tres tipos de secciones con alas que contempla el CIRSOC 201-2005: Viga "T" bajo losa, Viga "L" bajo losa y Viga "T" aislada.

Las condiciones que da el CIRSOC para el cálculo del ancho efectivo "b" a emplear en los cálculos resistentes es:

2.3.1.1.- Para Vigas "T" bajo losa (artículo 8.10.2)

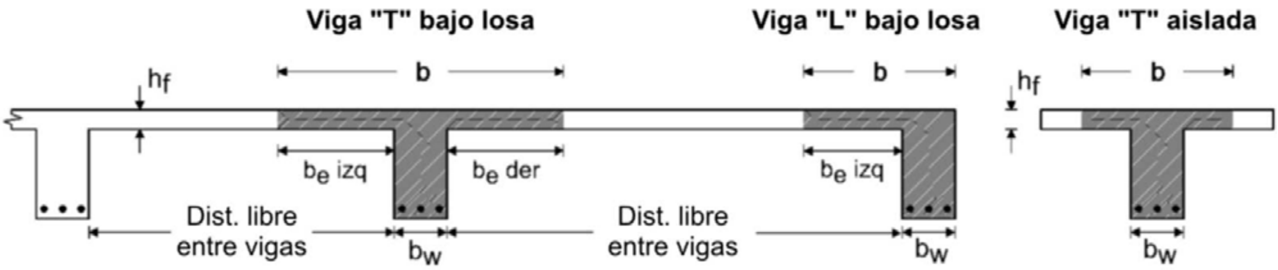
a) $b = b_w + b_{e\ izq} + b_{e\ der}$
b) $b \leq$ Luz de la viga / 4
c) $b_{e\ (izq\ ó\ der)}$ = mínimo ($8 \cdot h_f$; ½ distancia libre a viga adyacente)

2.3.1.2.- Para Vigas "L" bajo losa (artículo 8.10.3)

a) $b = b_w + b_e$
b) b_e = mínimo ($6 \cdot h_f$; ½ distancia libre a viga adyacente ; Luz de la viga / 12)

2.3.1.3.- Para Vigas "T" aisladas (artículo 8.10.4)

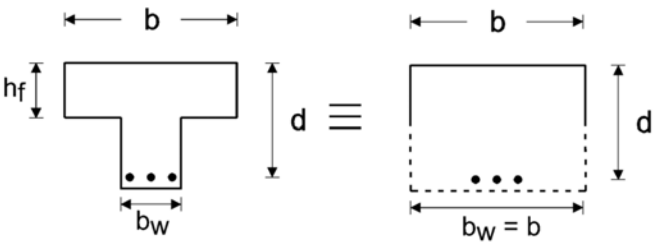
a) $h_f \geq b_w / 2$
b) $b \leq 4 \cdot b_w$



(a) (b) (c)

Figura 2.3.1.1

2.3.2.- Alturas relativas entre alas y alma



si $h_f \geq 0{,}375 \cdot \beta_1 \cdot d$

Figura 2.3.2.1

Al limitar la profundidad máxima del eje neutro de deformaciones a "$c = 0{,}375 \cdot d$" cualquier sección transversal en la que se verifique que "$h_f \geq 0{,}375 \cdot \beta_1 \cdot d$" puede analizarse como si se tratara de una sección rectangular de ancho constante "b" (Figura 2.3.2.1) dado que el eje neutro de tensiones siempre caerá en la zona de ancho "b".

2.3.3.- Cuantías límites

a) Cuantía mínima

En estos casos es más complicado establecer referencias en términos de "k_a" dado que la cuantía mínima **siempre** se calcula en base a "b_w", y "k_a" se calcula en base a "b". En estos casos resulta más práctico, al finalizar los cálculos, comparar la armadura obtenida con la armadura mínima reglamentaria.

b) Cuantía máxima

Como veremos enseguida, los cálculos de secciones con alas pueden presentar dos situaciones: que el eje neutro de tensiones caiga dentro de las alas o que corte solamente al nervio. Las situaciones de cuantía máxima se dan cuando el eje neutro de tensiones corta solamente al nervio[3]. En estas condiciones el momento resistente de la sección puede dividirse en un momento tomado por las alas y otro tomado por el nervio (ver más adelante). Una sección requerirá armadura de compresión cuando la sección de hormigón comprimido del nervio sea insuficiente como para equilibrar la parte del momento externo que le toca resistir. El momento máximo que puede equilibrar el hormigón del nervio se da cuando se alcanza la máxima deformación de compresión en el hormigón y la mínima deformación de tracción en el acero necesaria para mantener la condición de $\phi = 0{,}90$, es decir cuando:

$c_{máx} = 0{,}003 \cdot d / (0{,}003 + 0{,}005) = 0{,}375 \cdot d$ por lo que resulta
$k_{c\ máx} = c_{máx} / d = 0{,}375$ y por lo tanto
$k_{a\ máx} = k_{c\ máx} \cdot \beta_1 = 0{,}375 \cdot \beta_1$

Valen los comentarios realizados para secciones rectangulares con referencia a situaciones en las que se requieran mayores deformaciones mínimas en el acero más traccionado.

2.3.4.- Cálculo de armaduras

$M_n = M_u / \phi = M_u / 0{,}9$

De acuerdo con la posición que adopte el eje neutro de tensiones pueden presentarse dos situaciones (Figuras 2.3.4.1 y 2.3.4.2):

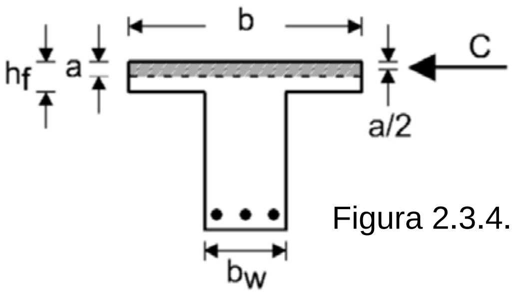


Figura 2.3.4.1

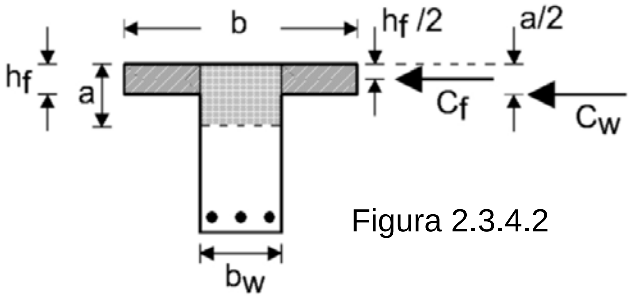


Figura 2.3.4.2

Figura 2.3.4.1: El eje neutro de tensiones cae dentro de la placa por lo que la sección puede calcularse como rectangular de ancho constante e igual a "b".

[3] Ya comentamos que si "$h_f \geq 0{,}375 \cdot \beta_1 \cdot d$" la sección puede analizarse como rectangular. Si no se la analizara como rectangular podría darse algún caso en el que el eje neutro cayera en la placa para la condición de cuantía máxima.

Figura 2.3.4.2: El eje neutro de tensiones corta sólo al nervio. La sección se divide en "alas" y "alma". La fuerza y el momento equilibrado por las alas son conocidos por lo que el momento que debe tomar el alma se obtiene por diferencia con el momento solicitante.

Para iniciar el cálculo se supondrá en primera instancia que no es necesario disponer armadura comprimida y que el eje neutro de tensiones se encuentra dentro de las alas es decir se asume que la sección se comporta como una sección rectangular de ancho "b":

Al suponerse $a \leq h_f$ debe verificarse que $k_a \leq h_f / d$

$M_n = f^*_c \cdot b \cdot a \cdot (d - a/2) = f^*_c \cdot b \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a/2)$ y llamando

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2)$ resulta

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2}$

a) Si $k_a \leq h_f /d$ se calcula $A_s = f^*_c \cdot b \cdot k_a \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$
y se verifica que $A_s \geq A_{s\,mín}$
Si no se verificara se adopta $A_s = A_{s\,mín}$

b) Si $k_a > h_f / d$

La fuerza que toman las alas vale: $C_f = f^*_c \cdot (b - b_w) \cdot h_f$

El momento (respecto a "A_s") tomado por las alas vale: $M_{nf} = C_f \cdot (d - h_f/2)$

La armadura necesaria para equilibrar C_f vale: $A_{sf} = C_f / f_y$

El momento a equilibrar con el hormigón del alma vale : $M_{nw} = M_n - M_{nf}$

De aquí en adelante el cálculo del alma se efectúa como en una sección rectangular aislada para lo cual será necesario recalcular "k_a" para el momento solicitante "M_{nw}". Al finalizar el cálculo se deberá adicionar a la armadura "A_{sw}" la armadura "A_{sf}" necesaria para equilibrar las compresiones en las alas.

En primera instancia supondremos que no es necesario disponer armadura comprimida es decir que $k_a \leq k_{a\,máx} = 0{,}375 \cdot \beta_1$

$M_{nw} = f^*_c \cdot b_w \cdot a \cdot (d - a/2) = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a/2)$ y llamando

$m_n = M_{nw} / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2)$ resulta

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2}$

b.1) $k_a \leq k_{a\,máx}$ se calcula $A_{sw} = f^*_c \cdot b_w \cdot k_a \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$
$A_s = A_{sw} + A_{sf}$

b.2) Si $k_a > k_{a\,máx}$ se requerirá el uso de armadura comprimida, es decir $A'_s > 0$

Fijamos la posición del eje neutro en: $c_{máx} = k_{c\,máx} \cdot d = 0{,}375 \cdot d$

El máximo momento que podrá tomar la sección comprimida de hormigón es:

$M_c = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a\,máx} \cdot (1 - k_{a\,máx} / 2)$

por lo que el momento remanente deberá ser tomado por la armadura comprimida:

$\Delta M_n = M'_s = M_{nw} - M_c = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d')$ donde la tensión "f'_s" surge de

$\varepsilon'_s = 0{,}003 \cdot (c_{máx} - d') / c_{máx} = 0{,}003 \cdot (k_{c\,máx} - d' / d) / k_{c\,máx}$

Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y = f_y / E_s = f_y / 200000$ MPa entonces $f'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$
Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$ entonces $f'_s = f_y$

por lo que se puede despejar la armadura comprimida como:

$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$

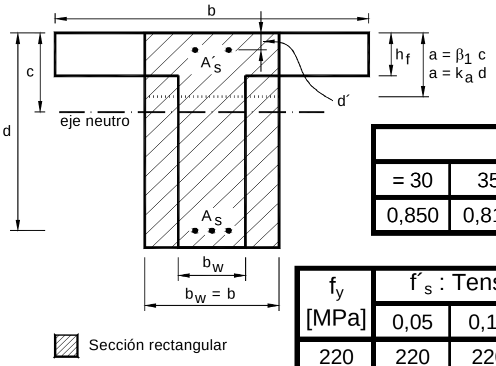
finalmente, de la sumatoria de fuerzas se obtiene

$A_s = f^*_c \cdot b_w \cdot k_{a\,máx} \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y + A_{sf}$

Como en el caso de secciones rectangulares, si en cualquier situación se deseara conocer la deformación de la armadura más traccionada esta se obtiene por semejanza de triángulos como:

$\varepsilon_s = 0{,}003 \cdot (d - c) / c = 0{,}003 \cdot (1 - k_c) / k_c$ con $k_c = k_a / \beta_1$

TABLA AUXILIAR Nº 1
FLEXIÓN SIMPLE: CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES Y CON ALAS



$M_u = \phi\ M_n$
$M_u = 0{,}90\ M_n$

β_1 en función de f'_c [MPa]						
= 30	35	40	45	50	55	60
0,850	0,814	0,779	0,743	0,707	0,671	0,650

f_y [MPa]	f'_s : Tensión de A'_s en [MPa] para d'/d =						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
220	220	220	220	220	200	120	40
420	420	420	360	280	200	120	40
500	500	440	360	280	200	120	40

Cuantía mínima	f'_c [MPa]	m_n	k_a
		Para valores menores m_n ~ k_a	
Si m_n es menor que el valor indicado para la resistencia de hormigón utilizada, adoptar cuantía mínima	60	0,037	0,038
	55	0,039	0,040
	50	0,041	0,042
	45	0,043	0,044
	40	0,045	0,047
	35	0,048	0,050
	30	0,053	0,055
		0,058	0,060
	25	0,064	0,066
		0,068	0,070
		0,077	0,080
	20	0,079	0,082
		0,086	0,090
		0,095	0,100
		0,104	0,110
		0,113	0,120
		0,122	0,130
		0,130	0,140
		0,139	0,150
		0,147	0,160
		0,156	0,170
		0,164	0,180
		0,172	0,190
		0,180	0,200
		0,188	0,210
		0,196	0,220
Doble armadura	f'_c [MPa]	0,204	0,230
		0,211	0,240
Si m_n es mayor que el valor indicado para la resistencia de hormigón utilizada, adoptar doble armadura	60	0,214	0,244
	55	0,220	0,252
		0,226	0,260
	50	0,230	0,265
		0,234	0,270
	45	0,240	0,279
		0,241	0,280
		0,248	0,290
	40	0,249	0,292
		0,255	0,300
	35	0,259	0,305
		0,262	0,310
	= 30	0,268	0,319

A) SECCIONES RECTANGULARES (y con alas para $h_f / d = \beta_1\ 0{,}375$)

$m_n = M_n / (0{,}85\ f'_c\ b_w\ d^2)$ obtener k_a de la tabla

si
- $k_a = k_{a\ mín}$ adoptar $k_a = k_{a\ mín}$
- $k_{a\ mín} < k_a = k_{a\ máx}$ adoptar $k_a = k_a$ de tabla
- $k_a > k_{a\ máx}$ corresponde doble armadura

Armadura simple: $A_s = k_a\ 0{,}85\ f'_c\ b_w\ d / f_y$

Armadura doble: Obtener de tablas $k_{a\ máx}$, $m_{n\ máx}$ y f'_s

$\Delta M_n = M_n - m_{n\ máx}\ 0{,}85\ f'_c\ b_w\ d^2$

$A'_s = \Delta M_n / [(d - d')\ f'_s]$

$A_s = k_{a\ máx}\ 0{,}85\ f'_c\ b_w\ d / f_y + A'_s\ f'_s / f_y$

B) SECCIONES CON ALAS ("T" y "L" con $h_f / d = \beta_1\ 0{,}375$)

$m_n = M_n / (0{,}85\ f'_c\ b\ d^2)$ obtener k_a de la tabla

$A_{s\ mín} = k_{a\ mín}\ 0{,}85\ f'_c\ b_w\ d / f_y$

B.1) Rectangular: $k_a = h_f / d$

$A_s = k_a\ 0{,}85\ f'_c\ b\ d / f_y$ (Verificar si $A_s = A_{s\ mín}$)

B.2) Nervio y alas

$M_{nf} = 0{,}85\ f'_c\ h_f\ (b - b_w)\ (d - h_f / 2)$

$A_{sf} = M_{nf} / [(d - h_f / 2)\ f_y]$

$M_{nw} = M_n - M_{nf}$

$m_n = M_{nw} / (0{,}85\ f'_c\ b_w\ d^2)$ obtener k_a de la tabla

si
- $k_a = k_{a\ máx}$ adoptar $k_a = k_a$ de tabla
- $k_a > k_{a\ máx}$ corresponde doble armadura

Armadura simple:

$A_s = k_a\ 0{,}85\ f'_c\ b_w\ d / f_y + A_{sf}$ Verificar si $A_s = A_{s\ mín}$

Armadura doble: Obtener de tablas $k_{a\ máx}$, $m_{n\ máx}$ y f'_s

$\Delta M_n = M_{nw} - m_{n\ máx}\ 0{,}85\ f'_c\ b_w\ d^2$

$A'_s = \Delta M_n / [(d - d')\ f'_s]$

$A_s = k_{a\ máx}\ 0{,}85\ f'_c\ b_w\ d / f_y + A'_s\ f'_s / f_y + A_{sf}$

EJEMPLOS FLEXIÓN SIMPLE

2.I.- SECCIÓN RECTANGULAR

<u>Ejemplo 2.I.1</u>

Enunciado: Calcular las armaduras de una sección rectangular para las siguientes condiciones:

Materiales: - Hormigón: H–25 (f'_c = 25 MPa)
- Acero: ADN 420 (f_y = 420 MPa)

Sección transversal: - b_w = 0,12 m ; h = 0,40 m

Estribos: - Recubrimiento: c_c = 0,02 m
- Diámetro estimado: d_{be} = 6 mm

Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: d_b = 16 mm

Solicitación: - M_u = 52 kNm

Resolución analítica:

Para f'_c = 25 MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c$ = 21,25 MPa = 21250 kN/m^2
- β_1 = 0,85
- $k_{a\ mín}$ = 1,4 / f^*_c (MPa) = 0,06588

M_n = Momento nominal = M_u / ϕ = 52 kNm / 0,9 = 57,78 kNm

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2$ = 0,40 m – 0,02 m – 0,006 m – 0,008 m = 0,366 m

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2)$ = 57,78 kNm / (21250 kN/m^2 · 0,12 m · 0,366^2 m^2) = 0,16915

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}16915)^{1/2} = 0{,}18655 > k_{a\ mín}$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}18655 / 0{,}85 = 0{,}219 < 0{,}375 \Rightarrow A'_s = 0$

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y$ = 0,18655 · 21,25 MPa · 120 mm · 366 mm / 420 MPa = 415 mm^2 (4,15 cm^2)

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

Ingresando a la tabla con:

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2)$
m_n = 57,78 kNm / (0,85 · 25000 kN/m^2 · 0,12 m · 0,366^2 m^2) = 0,16915

Se obtiene:
Sin interpolar: k_a = 0,190

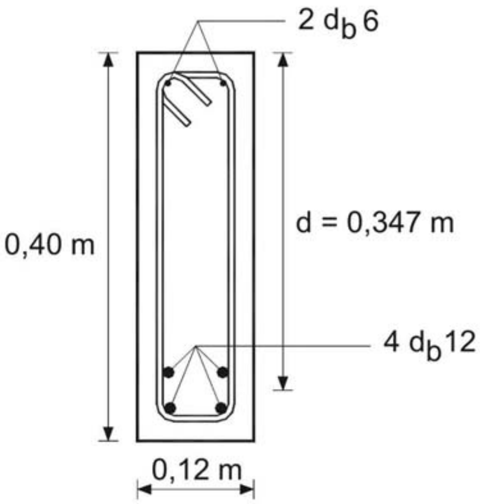
Interpolando: $k_a = 0{,}180 + (0{,}190 – 0{,}180) \cdot (0{,}16915 – 0{,}164) / (0{,}172 – 0{,}164) =$
$k_a = 0{,}18644$

Como se observa, aún sin interpolar el error obtenido es menor al 2% por lo que podría utilizarse el valor leído en forma directa.

El valor de “k_a” obtenido se encuentra, según los límites indicados en la tabla, por encima de la cuantía mínima y por debajo de los valores que requieren de doble armadura por lo que resulta:

$A_s = k_a \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}18644 \cdot 0{,}85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} =$
$A_s = 414 \text{ mm}^2$ ($4{,}14 \text{ cm}^2$)

Armado:



Los cálculos anteriores fueron realizados tomando:

d = 0,366 m

La altura útil resultante, luego de adoptar armaduras y separaciones, ha sido:

d = 0,347 m

Rehaciendo los cálculos se llegaría a:

$A_s = 443 \text{ mm}^2 < 4\ d_b12 = 452 \text{ mm}^2$

Ejemplo 2.I.2

Enunciado: Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 16$ kNm

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 21{,}25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
- $\beta_1 = 0{,}85$
- $k_{a\,mín} = 1{,}4 / f^*_c \text{ (MPa)} = 0{,}06588$

M_n = Momento nominal = $M_u / \phi = 16 \text{ kNm} / 0{,}9 = 17{,}78 \text{ kNm}$

$d = h – c_c – d_{be} – d_b / 2 = 0{,}40 \text{ m} – 0{,}02 \text{ m} – 0{,}006 \text{ m} – 0{,}008 \text{ m} = 0{,}366 \text{ m}$

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 17{,}78 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0{,}12 \text{ m} \cdot 0{,}366^2 \text{ m}^2) = 0{,}05205$

$k_a = 1 – (1 – 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 – (1 – 2 \cdot 0{,}05205)^{1/2} = 0{,}05348 < k_{a\,mín}$

Se adopta por lo tanto $k_a = k_{a\,mín}$

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}06588 \cdot 21{,}25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 146 \text{ mm}^2$

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

M_n = Momento nominal = $M_u / \phi = 16 \text{ kNm} / 0{,}9 = 17{,}78 \text{ kNm}$

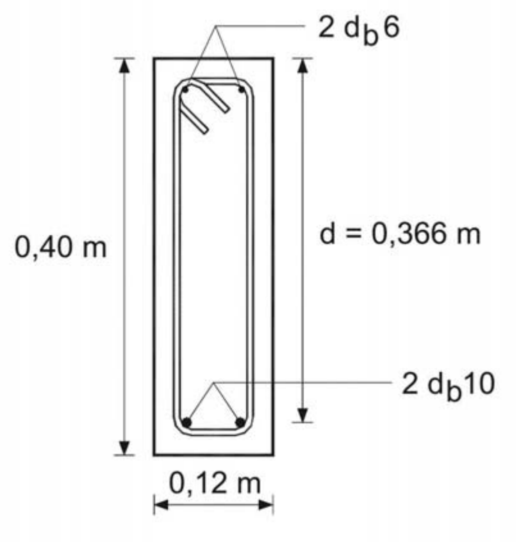
$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40 \text{ m} - 0{,}02 \text{ m} - 0{,}006 \text{ m} - 0{,}008 \text{ m} = 0{,}366 \text{ m}$

Ingresando a la tabla con:

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 17{,}78 \text{ kNm} / (0{,}85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0{,}12 \text{ m} \cdot 0{,}366^2 \text{ m}^2) =$
$m_n = 0{,}05205$

Se obtiene un valor de "k_a" que es menor que el valor límite correspondiente a la cuantía mínima para la resistencia utilizada. Se adopta por lo tanto: $k_a = k_{a\ mín} = 0{,}066$

$A_s = A_{s\ mín} = k_{a\ mín} \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y$
$A_s = 0{,}066 \cdot 0{,}85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 147 \text{ mm}^2$



Armado:

La altura útil utilizada en el cálculo coincide con la obtenida al armar la sección.

Ejemplo 2.I.3

Enunciado: Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y M_u = 100 kNm. De ser necesaria armadura comprimida se supondrá que la distancia de la fibra más comprimida de hormigón al centro de gravedad de la armadura comprimida es $d' = 0{,}03$ m.

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 21{,}25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
- $\beta_1 = 0{,}85$
- $k_{a\ mín} = 1{,}4 / f^*_c \text{ (MPa)} = 0{,}06588$

M_n = Momento nominal = $M_u / \phi = 100 \text{ kNm} / 0{,}9 = 111{,}11 \text{ kNm}$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40\ m - 0{,}02\ m - 0{,}006\ m - 0{,}008\ m = 0{,}366\ m$

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 111{,}11\ kNm / (21250\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}366^2\ m^2) = 0{,}32528$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}32528)^{1/2} = 0{,}40886 \quad > \quad k_{a\ mín}$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}40886 / 0{,}85 = 0{,}481 \quad > \quad 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad A'_s > 0$

Se fija $k_c = 0{,}375$ por lo tanto:
- $k_a = k_{a\ máx} = k_c \cdot \beta_1 = 0{,}375 \cdot 0{,}85 = 0{,}31875$
- $c = 0{,}375 \cdot 0{,}366\ m = 0{,}137\ m$

por lo que la sección de hormigón comprimido tomará un momento constante igual a:

$M_c = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a\ máx} \cdot (1 - k_{a\ máx} / 2)$
$M_c = 21250\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}366^2\ m^2 \cdot 0{,}31875 \cdot (1 - 0{,}31875 / 2) = 91{,}53\ kNm$

El momento a tomar con "A'_s" será: $\Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$

$\Delta M_n = 111{,}11\ kNm - 91{,}53\ kNm = 19{,}58\ kNm$ por lo que

$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$
$A'_s = [19{,}58\ kNm / (420\ MPa \cdot (0{,}366\ m - 0{,}03\ m))] \cdot 1000\ (mm^2\ MN/(m^2\ kN)) = 139\ mm^2$

El valor de f'_s utilizado en la expresión anterior surge de plantear semejanza de triángulos a partir de una deformación igual a 0,003 en la fibra de hormigón más comprimida.

$\varepsilon'_s = 0{,}003 \cdot (0{,}137\ m - 0{,}03\ m) / 0{,}137\ m = 0{,}0023 > \varepsilon_y = f_y / E_s = 0{,}0021 \Rightarrow$
$f'_s = f_y = 420\ MPa$

y por lo tanto se tiene:

$A_s = k_{a\ máx} \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$
$A_s = 0{,}31875 \cdot 21{,}25\ MPa \cdot 120\ mm \cdot 366\ mm / 420\ MPa + 139\ mm^2 \cdot 420\ MPa / 420\ MPa$
$A_s = 708\ mm^2 + 139\ mm^2 = 847\ mm^2$

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

M_n = Momento nominal = $M_u / \phi = 100\ kNm / 0{,}9 = 111{,}11\ kNm$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40\ m - 0{,}02\ m - 0{,}006\ m - 0{,}008\ m = 0{,}366\ m$

Ingresando a la tabla con:

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 111{,}11\ kNm / (0{,}85 \cdot 25000\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}366^2\ m^2)$
$m_n = 0{,}32528$

se observa que el valor de "m_n" es mayor que el aceptado para armadura simple por lo que se dispondrá armadura doble. Según la tabla, para $f'_c = 25\ MPa$:
$m_{n\ máx} = 0{,}268$ y $k_{a\ máx} = 0{,}319$

$M_c = m_{n\,máx} \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2 = 0{,}268 \cdot 0{,}85 \cdot 25000\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}366^2\ m^2$
$M_c = 91{,}54\ kNm$

El momento a tomar con A'_s será: $\Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$

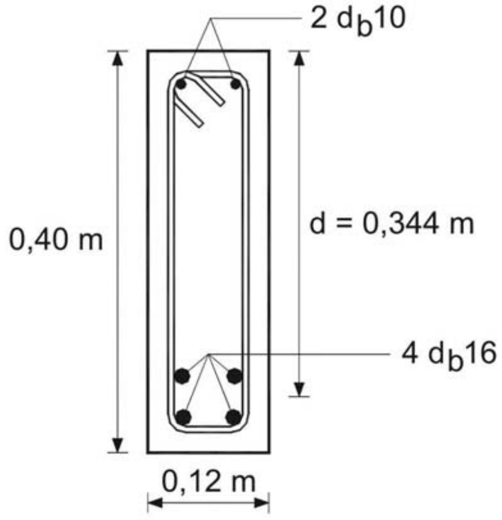
$\Delta M_n = 111{,}11\ kNm - 91{,}54\ kNm = 19{,}57\ kNm$

Según la tabla auxiliar, una armadura con $f_y = 420$ MPa y $d' / d = 0{,}03\ m / 0{,}366\ m = 0{,}08$ se encuentra en fluencia para relaciones de "d´ / d" menores que 0,10 por lo tanto, se tendrá que $f'_s = f_y$.

$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$
$A'_s = [19{,}57\ kNm / (420\ MPa \cdot (0{,}366\ m - 0{,}03\ m))] \cdot 1000\ (mm^2\ MN/(m^2\ kN)) = 139\ mm^2$

$A_s = k_{a\,máx} \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$
$A_s = 0{,}319 \cdot 0{,}85 \cdot 25\ MPa \cdot 120\ mm \cdot 366\ mm / 420\ MPa + 139\ mm^2 \cdot 420\ MPa / 420\ MPa$
$A_s = 709\ mm^2 + 139\ mm^2 = 848\ mm^2$

Armado:



Luego de armada la sección se observa que:

d = 0,344 m (utilizado en el cálculo: 0,366m)

d – d´ = 0,313 m (utilizado en el cálculo: 0,336 m)

Rehaciendo los cálculos se llega a:

$A'_s = 230\ mm^2 > 2\ d_b10 = 158\ mm^2$

$A_s = 896\ mm^2 > 4\ d_b16 = 804\ mm^2$

Por lo que deberían modificarse las armaduras adoptadas. Ejercicio que se deja a cargo del lector.

Ejemplo 2.I.4

Enunciado: Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 100$ kNm. Se tratará de evitar el uso de armadura comprimida.

Para comenzar los cálculos utilizaremos la altura útil "d = 0,344 m" obtenida en el ejemplo anterior.

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 21{,}25\ MPa = 21250\ kN/m^2$
- $\beta_1 = 0{,}85$
- $k_{a\,mín} = 1{,}4 / f^*_c\ (MPa) = 0{,}06588$

M_n = Momento nominal = M_u / ϕ = 100 kNm / 0,9 = 111,11 kNm

d = 0,344 m

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2)$ = 111,11 kNm / (21250 kN/m^2 · 0,12 m · 0,344^2 m^2) = 0,36821

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}36821)^{1/2} = 0{,}48660 \;\; > \;\; k_{a\,mín}$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}48660 / 0{,}85 = 0{,}572 \quad > \quad 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad A'_s > 0 \quad$ ó $\quad \phi < 0{,}90$

Como se ha comentado, en la resolución de estos ejemplos se ha adoptado como criterio general la utilización de armadura comprimida en lugar de intentar soluciones con "ϕ" variable. En este ejemplo se demostrará que las soluciones con "ϕ" variable resultan "imposibles" debido a un efecto de compensación que existe entre el incremento que experimenta el momento "M_n" al aumentar la profundidad del eje neutro "c" y la disminución de "ϕ", lo que da lugar a la aparición de un "momento tope" prácticamente constante e independiente de la profundidad del eje neutro una vez que éste ha superado la posición dada por: $c = 0{,}375 \cdot d$.

El camino elegido para poner de manifiesto el fenómeno consiste en un proceso de sucesivos aumentos de la profundidad del eje neutro de deformaciones "c".

Para cada valor de "c" se calculará:

$k_c = c / d$
a = Profundidad del eje neutro de tensiones = $\beta_1 \cdot c = 0{,}85 \cdot c$
M_n = Momento nominal = $f^*_c \cdot b \cdot a \cdot (d - a / 2)$
ε_s = Deformación específica de "A_s" = $0{,}003 \cdot (d - c) / c$
$\phi = 0{,}65 + 0{,}25 \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_y) / (0{,}005 - \varepsilon_y) = 0{,}65 + 0{,}25 \cdot (\varepsilon_s - 0{,}0021) / (0{,}005 - 0{,}0021)$
$M_u = \phi \cdot M_n$

c [m]	k_c	a [m]	C [kN]	M_n [kNm]	ε_s	ϕ	M_u [kNm]
0,12900	0,37500	0,10965	279,61	80,86	0,00500	0,900	72,77
0,13072	0,38000	0,11111	283,34	81,73	0,00489	0,891	72,81
0,13760	0,40000	0,11696	298,25	85,16	0,00450	0,857	72,97
0,14752	0,42883	0,12539	319,74	89,95	0,00400	0,813	73,16
0,15480	0,45000	0,13158	335,53	93,35	0,00367	0,785	73,28
0,20259	0,58893	0,17220	439,12	113,25	0,00209	0,650	73,55

La tabla anterior llega hasta valores de "c" muy altos, de hecho llega hasta el punto en que la armadura "A_s" dejaría de estar en fluencia por tracción. Independientemente de cualquier consideración reglamentaria, a partir de este punto las roturas se producirían con la armadura más traccionada en régimen elástico - roturas poco dúctiles - y además se estaría desaprovechando parte de la resistencia del acero. En definitiva, se puede afirmar entonces que, a partir de "$c = 0{,}375 \cdot d$", el momento que se puede equilibrar con armadura simple crece en forma despreciable con el aumento de la profundidad del eje neutro por lo que la opción más razonable - y en general la única - consiste en disponer armadura doble.

Ejemplo 2.I.5

Enunciado: Calcular las armaduras, constituidas por mallas soldadas de alambres conformados, de una sección rectangular perteneciente a una losa armada en una dirección para las siguientes condiciones:

Materiales: - Hormigón: H–20 (f'_c = 20 MPa)
- Acero: AM 500 N (f_y = 500 MPa)

Sección transversal: - b_w = 1,00 m ; h = 0,09 m

Armadura principal: - Recubrimiento: c_c = 0,02 m
- Diámetro estimado: d_b = 12 mm
- De ser necesaria armadura comprimida se supondrá que la distancia de la fibra de hormigón más comprimida al centro de gravedad de la armadura comprimida es d´ = 0,023 m.

Solicitación: - M_u = 17,1 kNm (en rigor kNm/m)

Resolución analítica:

Para f'_c = 20 MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 17$ MPa = 17000 kN/m^2
- $\beta_1 = 0{,}85$
- $k_{a\ mín} = 1{,}4 / f^*_c$ (MPa) = 0,08235

M_n = Momento nominal = M_u / ϕ = 17,1 kNm / 0,9 = 19 kNm

d = Altura útil = h – c_c – d_b / 2 = 0,09 m – 0,02 m – 0,006 m = 0,064 m

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 19 \text{ kNm} / (17000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1{,}0 \text{ m} \cdot 0{,}064^2 \text{ m}^2) = 0{,}27286$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}27286)^{1/2} = 0{,}326 \;>\; k_{a\ mín}$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}326 / 0{,}85 = 0{,}38353 \;>\; 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad A'_s > 0$

Se fija $k_c = 0{,}375$ por lo tanto:
- $k_a = k_{a\ máx} = k_c \cdot \beta_1 = 0{,}375 \cdot 0{,}85 = 0{,}31875$
- $c = 0{,}375 \cdot 0{,}064 = 0{,}024$ m

por lo que la sección de hormigón comprimido tomará un momento constante igual a:

$M_c = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a\ máx} \cdot (1 - k_{a\ máx} / 2)$
$M_c = 17000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1{,}00 \text{ m} \cdot 0{,}064^2 \text{ m}^2 \cdot 0{,}31875 \cdot (1 - 0{,}31875 / 2)$
$M_c = 18{,}66$ kNm

El momento a tomar con A'_s será: $\Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$

ΔM_n = 19 kNm – 18,66 kNm = 0,34 kNm por lo que

$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$
$A'_s = [0{,}34 \text{ kNm} / (25 \text{ MPa} \cdot (0{,}064 \text{ m} - 0{,}023 \text{ m}))] \cdot 1000 \text{ (mm}^2 \text{ MN/(m}^2 \text{ kN))}$
$A'_s = 334 \text{ mm}^2$

El valor de f'_s utilizado en la expresión anterior surge del siguiente planteo de semejanza de triángulos que parte de suponer una deformación máxima en el hormigón comprimido de 0,003:

$\varepsilon'_s = 0{,}003 \cdot (0{,}024\ m - 0{,}023\ m) / 0{,}024\ m = 0{,}000125 < \varepsilon_y = f_y / E_s = 0{,}0025 \Rightarrow$
$f'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s = 0{,}000125 \cdot 200000 = 25\ MPa$

y por lo tanto se tiene:

$A_s = k_{a\,máx} \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y =$
$A_s = 0{,}31875 \cdot 17\ MPa \cdot 1000\ mm \cdot 64\ mm / 500\ MPa + 334\ mm^2 \cdot 25\ MPa / 500\ MPa =$
$A_s = 694\ mm^2 + 17\ mm^2 = 711\ mm^2$ (en rigor las armaduras estarían en mm^2/m)

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

M_n = Momento nominal = $M_u / \phi = 17{,}1\ kNm / 0{,}9 = 19\ kNm$

d = Altura útil = $h - c_c - d_b / 2 = 0{,}09\ m - 0{,}02\ m - 0{,}006\ m = 0{,}064\ m$

Ingresando a la tabla con:

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 19\ kNm / (0{,}85 \cdot 20000\ kN/m^2 \cdot 1{,}00\ m \cdot 0{,}064^2\ m^2)$
$m_n = 0{,}27286$

se observa que el valor de "m_n" es mayor que el aceptado para armadura simple por lo que se dispondrá armadura doble. Según la tabla, para $f'_c = 20\ MPa$ se tiene:
$m_{n\,máx} = 0{,}268$ y $k_{a\,máx} = 0{,}319$

El momento a tomar con A'_s será: $\Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$

donde M_c es el máximo momento que puede tomar la sección de hormigón comprimido

$M_c = m_{n\,máx} \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2 = 0{,}268 \cdot 0{,}85 \cdot 20000\ kN/m^2 \cdot 1{,}00\ m \cdot 0{,}064^2\ m^2$
$M_c = 18{,}66\ kNm$

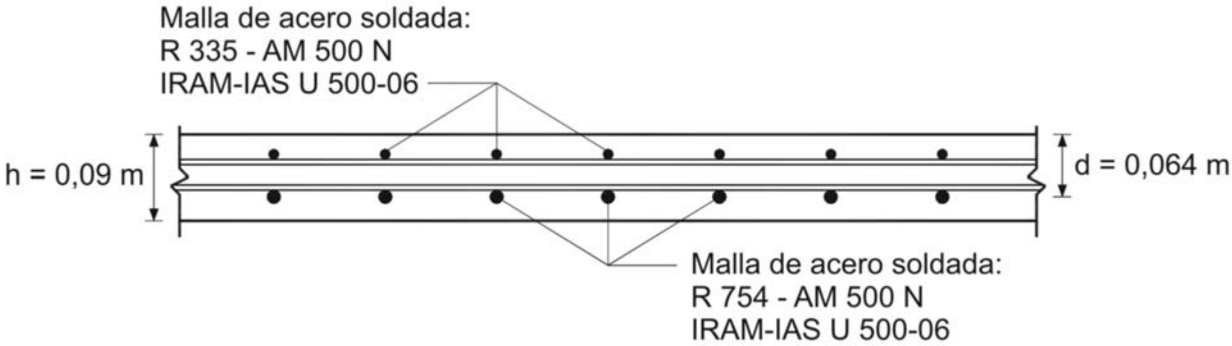
$\Delta M_n = 19\ kNm - 18{,}66\ kNm = 0{,}34\ kNm$

Obtendremos la tensión de A'_s de la tabla auxiliar para $f_y = 500\ MPa$ y $d' / d = 0{,}023\ m / 0{,}064\ m = 0{,}35938$. La tensión se obtiene por extrapolación y vale 25 MPa

$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$
$A'_s = [0{,}34\ kNm / (25\ MPa \cdot (0{,}064\ m - 0{,}023\ m))] \cdot 1000\ (mm^2\ MN/(m^2\ kN)) = 334\ mm^2$

$A_s = k_{a\,máx} \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y =$
$A_s = 0{,}319 \cdot 0{,}85 \cdot 20\ MPa \cdot 1000\ mm \cdot 64\ mm / 500\ MPa + 334\ mm^2 \cdot 25\ MPa / 500\ MPa$
$A_s = 694\ mm^2 + 17\ mm^2 = 711\ mm^2$

Armado:



La altura útil utilizada en el cálculo coincide con la obtenida al armar la sección.

Ejemplo 2.I.6

Enunciado: Calcular M_u para la siguiente viga

Materiales:	- Hormigón: H–25 (f'_c = 25 MPa)
	- Acero: ADN 420 (f_y = 420 MPa)
Sección transversal:	- b_w = 0,12 m ; h = 0,40 m
Estribos:	- Recubrimiento c_c = 0,02 m
	- Diámetro estimado d_{be} = 6 mm
Armadura longitudinal:	- $A_s = 2\ d_b16$; $A'_s = 0$

Resolución analítica:

Para f'_c = 25 MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25$ MPa = 21250 kN/m^2
- $\beta_1 = 0,85$
- $k_{a\ mín} = 1,4 / f^*_c$ (MPa) = 0,06588

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40\ m - 0,02\ m - 0,006\ m - 0,008\ m = 0,366\ m$

Suponiendo que la sección no se encuentra sobredimensionada con armadura simple[4] se tendrá que:

$M_u = \phi \cdot M_n = 0,90 \cdot M_n$

[4] Si la armadura "A_s" fuera mayor que la necesaria para equilibrar la fuerza desarrollada por la sección de hormigón comprimido para una deformación máxima de 0,003 en el hormigón y de 0,005 en el acero traccionado, habría que aplicar un coeficiente de reducción de resistencia "ϕ" menor que 0,90. En estas condiciones la armadura que se coloque en exceso de la necesaria para producir el equilibrio anteriormente mencionado resulta inefectiva dado que el incremento de momento resistente que se produce en términos de "M_n" se ve más que contrarrestado por la disminución de "ϕ" obteniéndose secciones que cada vez presentan menores "M_u".

$a = A_s \cdot f_y / (b_w \cdot f^*_c) = 2 \cdot (201\ mm^2 \cdot 10^{-6}\ m^2 / mm^2) \cdot 420\ MPa / (0{,}12\ m \cdot 21{,}25\ MPa)$
$a = 0{,}06621\ m$ por lo tanto

$k_a = a / d = 0{,}06621\ m / 0{,}366\ m = 0{,}18091 > k_{a\ mín}$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}18091 / 0{,}85 = 0{,}213 < 0{,}375 \Rightarrow \varepsilon_s > 0{,}005$ y corresponde $\phi = 0{,}90$

$M_n = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a / 2)$
$M_n = 21250\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}366^2\ m^2 \cdot 0{,}18091 \cdot (1 - 0{,}18091 / 2)$

$M_n = 56{,}20\ kNm \quad \Rightarrow \quad M_u = 0{,}9 \cdot 56{,}20\ kNm = 50{,}58\ kNm$

Se hubiera llegado al mismo resultado haciendo:

a) $M_n = f^*_c \cdot b_w \cdot a \cdot (d - a / 2)$
$M_n = 21250\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}06621\ m \cdot (0{,}366\ m - 0{,}06621\ m / 2) = 56{,}20\ kNm$
b) $z = k_z \cdot d$; $k_z = 1 - k_a / 2 = 1 - 0{,}18091 / 2 = 0{,}90955$; $M_n = A_s \cdot z \cdot f_y = A_s \cdot k_z \cdot d \cdot f_y$
$M_n = 2 \cdot (201\ mm^2 \cdot 10^{-6}\ m^2 / mm^2) \cdot 0{,}90955 \cdot 0{,}366\ m \cdot 420\ MPa \cdot 1000\ kN/MN$
$M_n = 56{,}21\ kNm$

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40\ m - 0{,}02\ m - 0{,}006\ m - 0{,}008\ m = 0{,}366\ m$

Suponiendo que la sección no se encuentra sobredimensionada con armadura simple se tendrá que:

$M_u = \phi \cdot M_n = 0{,}90 \cdot M_n$

Ingresando a la tabla con:

$a = A_s \cdot f_y / (b_w \cdot 0{,}85 \cdot f'_c) = 2 \cdot (201\ mm^2 \cdot 10^{-6}\ m^2 / mm^2) \cdot 420\ MPa / (0{,}12\ m \cdot 0{,}85 \cdot 25\ MPa)$
$a = 0{,}06621\ m$ por lo tanto

$k_a = a / d = 0{,}06621\ m / 0{,}366\ m = 0{,}18091$

Se observa que "k_a" se encuentra entre las cuantías límites por lo que se extrae el valor correspondiente de "m_n":

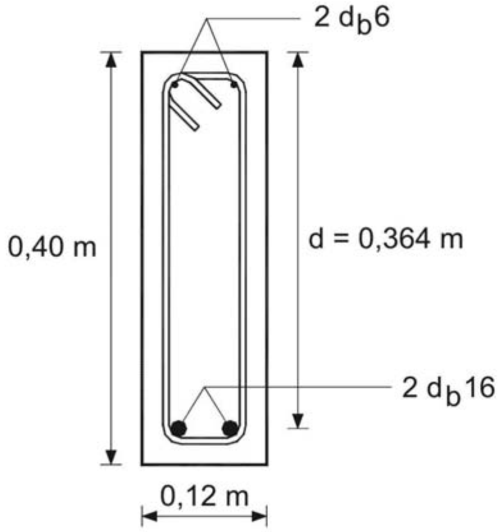
Sin interpolar: $m_n = 0{,}164$
Interpolando: $m_n = 0{,}164 + (0{,}172 - 0{,}164) \cdot (0{,}18091 - 0{,}18) / (0{,}19 - 0{,}18) = 0{,}16473$

El no interpolar en este caso implicaría un error menor al 1%.

$M_n = m_n \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2 = 0{,}16473 \cdot 0{,}85 \cdot 25000\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}366^2\ m^2$
$M_n = 56{,}27\ kNm$

$M_u = 0{,}9 \cdot 56{,}27\ kNm = 50{,}64\ kNm$

Como se observa, el valor es casi coincidente con el arrojado por la resolución analítica.



Armado:

La pequeña diferencia entre la altura útil adoptada en los cálculos (0,366 m) y la altura útil resultante (0,364 m) se debe a que las barras se encuentran apoyadas sobre el comienzo de la zona curva de las esquinas de los estribos. Rehaciendo los cálculos se llega a los siguientes momentos:

$M_n = 55{,}87$ kNm $\Rightarrow M_u = 0{,}9 \cdot M_n = 50{,}28$ kNm

prácticamente iguales a los valores anteriores.

Ejemplo 2.I.7

Enunciado: Calcular M_u para la siguiente sección

Materiales: - Hormigón: H–25 ($f´_c = 25$ MPa)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

Sección transversal: - $b_w = 0{,}12$ m ; $h = 0{,}40$ m

Estribos: - Recubrimiento: $c_c = 0{,}02$ m
- Diámetro estimado: $d_{be} = 6$ mm

Armadura longitudinal: - $A_s = 2\ d_b16$; $A´_s = 2\ d_b16$

Resolución analítica:

Para $f´_c = 25$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f´_c = 21{,}25$ MPa $= 21250$ kN/m^2
- $\beta_1 = 0{,}85$
- $k_{a\ mín} = 1{,}4 / f^*_c$ (MPa) $= 0{,}06588$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40$ m $- 0{,}02$ m $- 0{,}006$ m $- 0{,}008$ m $= 0{,}366$ m

$d´ = c_c + d_{be} + d_{b\ superior} / 2 = 0{,}02$ m $+ 0{,}006$ m $+ 0{,}008$ m $= 0{,}034$ m

Al ser iguales A_s y $A´_s$ esto indica que la sección tiene un dimensionado “arbitrario” y por lo tanto no puede afirmarse que ambas armaduras estarán en fluencia, de hecho podría afirmarse que $A´_s$ no puede estar en fluencia. En estos casos el abordaje más satisfactorio suele ser solucionar el problema por aproximaciones sucesivas dando distintas posiciones al eje neutro hasta lograr el equilibrio interno de fuerzas. Las ecuaciones a considerar son:

$a = \beta_1 \cdot c$

$C = 0{,}85 \cdot f'_c \cdot a \cdot b_w$

$\varepsilon'_s = 0{,}003 \cdot (c - 0{,}034 \text{ m}) / c$ si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y = f_y / E_s = 0{,}0021 \Rightarrow f'_s = f_y = 420$ MPa
si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y \Rightarrow f'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s = \varepsilon'_s \cdot 200000$ MPa

Cabe acotar que en algunos casos de disposición más o menos arbitraria de armaduras, la armadura "comprimida" puede llegar a estar traccionada por lo que se debe estar atento al signo de la deformación.

$C'_s = f'_s \cdot A'_s$

$T = f_y \cdot A_s$

Dado que se está obteniendo la resistencia a flexión simple la resultante de las fuerzas internas debe ser nula, es decir: $T = C + C'_s$

Cuando se verifique la condición anterior el momento resistente se puede calcular tomando momentos respecto a la armadura traccionada como:

$M_n = C \cdot (d - a / 2) + C'_s \cdot (d - d')$

La tabla siguiente muestra el proceso de aproximaciones sucesivas que lleva a la solución

c [m]	ε'_s	f'_s [MPa]	C'_s [kN]	C [kN]	T [kN]	$C'_s + C - T$ [kN]	M_n [kNm]
0,100	0,00198	396,0	159,19	216,75	168,84	207,10	
0,050	0,00096	192,0	77,18	108,38	168,84	16,72	
0,025	-0,00108	-216,0	-86,83	54,19	168,84	-201,48	
0,040	0,00045	90,0	36,18	86,70	168,84	-45,96	
0,045	0,00073	146,7	58,96	97,54	168,84	-12,34	
0,047	0,00083	166,0	66,71	101,87	168,84	-0,25	57,40
0,048	0,00088	175,0	70,35	104,04	168,84	5,55	

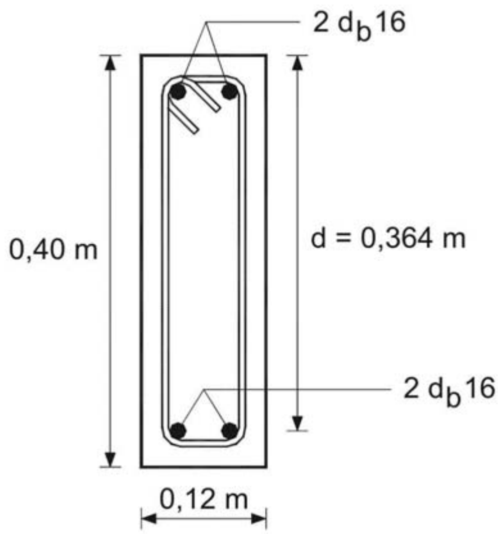
Por lo tanto: $M_u = 0{,}90 \cdot M_n = 0{,}90 \cdot 57{,}40 \text{ kNm} = 51{,}66 \text{ kNm}$

Para casos de armaduras simétricas con recubrimientos usuales puede obtenerse una buena aproximación de "M_n" haciendo:

$M_n \approx A_s \cdot f_y \cdot (d - d')$
$M_n = (402 \text{ mm}^2 \cdot 10\text{-}6 \text{ m}^2 / \text{mm}^2) \cdot (420 \text{ MPa} \cdot 1000 \text{ kN/MN}) \cdot (0{,}366 \text{ m} - 0{,}034 \text{ m})$
$M_n = 56{,}05 \text{ kNm}$

que en este caso arroja un resultado que difiere del "correcto" en alrededor del 2%.

Intentar solucionar este tipo de problemas mediante el uso de tablas es tan laborioso que resulta conveniente abordarlos directamente en forma analítica.



Armado:

Como en el ejemplo anterior, las pequeñas diferencias entre el valor de "d" adoptado en los cálculos y el "real" no tienen significación en los resultados y, por supuesto, tienen implicancias menores a las que surgen de las imperfecciones de colocación inevitables en cualquier obra.

Ejemplo 2.I.8

Enunciado: Calcular la altura total de una viga rectangular de modo de obtener máxima rigidez sin que la misma resulte sobredimensionada en flexión.

Materiales: - Hormigón: H–20 (f'_c = 20 MPa)
- Acero: ADN 420 (f_y = 420 MPa)

Sección transversal: - Por razones de hormigonado se fija $h/b_w \leq 4$ y $b_w \geq 0,12$ m

Estribos: - Recubrimiento: c_c = 0,02 m
- Diámetro estimado: d_{be} = 6 mm

Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: d_b = 12 mm

Solicitación: - M_u = 20 kNm (A los fines del ejercicio se supone que M_u no variará significativamente al modificar la altura de la viga)

Resolución analítica:

Para f'_c = 20 MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 17,00$ MPa = 17000 kN/m²
- $\beta_1 = 0,85$
- $k_{a\,mín} = 1,4 / f^*_c$ (MPa) = 0,08235

$M_n = M_u / \phi = 20 / 0,90 = 22,22$ kNm

Para obtener la mayor rigidez despejaremos la mayor altura útil, es decir, adoptaremos cuantía mínima.

$$M_n = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a / 2) = 17000\ \text{kN/m}^2 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot 0,08235 \cdot (1 - 0,08235 / 2)$$
$$M_n = 1342,31\ \text{kN/m}^2 \cdot b_w \cdot d^2$$

Si adoptamos $b_w = 0{,}12$ m obtendremos:

$d = [22{,}22 \text{ kNm} / (1342{,}31 \text{ kN/m}^2 \cdot 0{,}12 \text{ m})]^{1/2} = 0{,}37$ m

$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0{,}37 \text{ m} + 0{,}02 \text{ m} + 0{,}006 \text{ m} + 0{,}006 \text{ m} = 0{,}402$ m

La altura anterior verifica la condición: $h / b_w = 0{,}40 \text{ m} / 0{,}12 \text{ m} = 3{,}33 < 4$

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0{,}12$ m y $h = 0{,}40$ m

Aunque en este caso no ha sido necesario efectuar redondeos importantes para obtener una altura práctica de construir, recalcularemos la cuantía para obtener la armadura de flexión necesaria[5].

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40 \text{ m} - 0{,}02 \text{ m} - 0{,}006 \text{ m} - 0{,}006 \text{ m} = 0{,}368$ m

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22{,}22 \text{ kNm} / (17000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0{,}12 \text{ m} \cdot 0{,}368^2 \text{ m}^2) = 0{,}08043$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}08043)^{1/2} = 0{,}08395 > k_{a\ mín} = 0{,}08235$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}08395 / 0{,}85 = 0{,}099 < 0{,}375 \Rightarrow A'_s = 0$ lo cual resulta obvio

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}08395 \cdot 17 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 150 \text{ mm}^2$

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

$M_n = M_u / \phi = 20 \text{ kNm} / 0{,}90 = 22{,}22$ kNm

De la tabla se obtiene el "m_n" asociado al "k_a" mínimo (cuantía mínima) correspondiente al hormigón del ejemplo.

$k_{a\ mín} = 0{,}082 \Rightarrow m_n = 0{,}079$ y dado que

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2)$ se puede despejar

$b_w \cdot d^2 = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot m_n) = 22{,}22 \text{ kNm} / (0{,}85 \cdot 20000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0{,}079) = 0{,}0165 \text{ m}^3$

adoptando $b_w = 0{,}12$ m queda

$d = (0{,}0165 \text{ m}^3 / 0{,}12 \text{ m})^{1/2} = 0{,}37$ m

$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0{,}37 \text{ m} + 0{,}02 \text{ m} + 0{,}006 \text{ m} + 0{,}006 \text{ m} = 0{,}402$ m

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0{,}12$ m y $h = 0{,}40$ m

---

[5] En este caso no son de esperar diferencias significativas pero éstas pueden ser muy importantes en otras situaciones tales como las losas de edificios en las que redondeos de algunos milímetros resultan significativos frente a su altura total.

Se calculan, utilizando la tabla, las armaduras para la sección anterior.

$d = h – c_c – d_{be} – d_b / 2 = 0{,}40\ m – 0{,}02\ m – 0{,}006\ m – 0{,}006\ m = 0{,}368\ m$

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f´_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22{,}22\ kNm / (0{,}85 \cdot 20000\ kN/m^2 \cdot 0{,}12\ m \cdot 0{,}368^2\ m^2)$
$m_n = 0{,}08043$

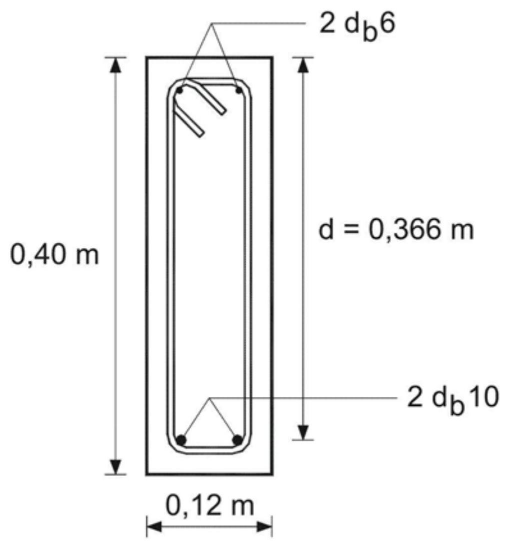
Se obtiene:
Sin interpolar: $k_a = 0{,}082$
Interpolando: $k_a = 0{,}082 + (0{,}090 – 0{,}082) \cdot (0{,}08043 – 0{,}079) / (0{,}086 – 0{,}079) =$
$k_a = 0{,}08363$

Como se observa, aún sin interpolar el error obtenido es menor al 2% por lo que podría utilizarse el valor leído en forma directa.

El valor de “k_a” obtenido se encuentra, según los límites indicados en la tabla, ligeramente por encima de la cuantía mínima y, obviamente, muy por debajo de los valores que requieren de doble armadura por lo que resulta:

$A_s = k_a \cdot 0{,}85 \cdot f´_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}08363 \cdot 0{,}85 \cdot 20\ MPa \cdot 120\ mm \cdot 368\ mm / 420\ MPa$
$A_s = 149\ mm^2$

Armado:



La diferencia entre la altura útil utilizada en los cálculos y la “real” resulta despreciable y sin consecuencias significativas sobre el resultado del ejemplo.

Ejemplo 2.I.9

Enunciado: Por requerimientos arquitectónicos se debe proyectar una viga rectangular de modo de obtener la menor altura posible. Como condición adicional no se recurrirá al uso de armadura de compresión ($A´_s = 0$)[6].

Materiales:
- Hormigón: H–20 ($f´_c = 20\ MPa$)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420\ MPa$)

[6] Cabe acotar que un cálculo de este tipo debería ir acompañado siempre de una verificación de flechas y de rigidez relativa respecto a elementos que utilicen a la viga como apoyo (p.e. losas).

Sección transversal: - Por razones arquitectónicas se fija $b_w \leq 0,25$ m

Estribos: - Recubrimiento: $c_c = 0,02$ m
- Diámetro estimado: $d_{be} = 8$ mm

Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: $d_b = 16$ mm

Solicitación: - $M_u = 20$ kNm (A los fines del ejercicio se supone que M_u no variará significativamente al modificar la altura de la viga)

Resolución analítica:

Para $f'_c = 20$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 17,00$ MPa $= 17000$ kN/m^2
- $\beta_1 = 0,85$
- $k_{a\ mín} = 1,4 / f^*_c$ (MPa) $= 0,08235$

$M_n = M_u / \phi = 20$ kNm $/ 0,90 = 22,22$ kNm

Adoptaremos la máxima cuantía que todavía conduce a $A'_s = 0$ es decir, la correspondiente a una profundidad del eje neutro dada por una deformación máxima en el hormigón de 0,003 y una deformación en el acero traccionado de 0,005.

$k_{c\ máx} = c_{máx} / d = 0,375 \quad \Rightarrow \quad k_a = k_{a\ máx} = \beta_1 \cdot k_{c\ máx} = 0,85 \cdot k_{c\ máx} = 0,31875$

$M_n = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a / 2) = 17000$ kN/m$^2 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot 0,31875 \cdot (1 - 0,31875 / 2)$
$M_n = 4555,13$ kN/m$^2 \cdot b_w \cdot d^2$

Para obtener la mínima altura posible adoptamos el mayor ancho permitido, es decir:

$b_w = 0,25$ m pudiendo ahora despejar

$d = [22,22$ kNm $/ (4555,13$ kN/m$^2 \cdot 0,25$ m$)]^{1/2} = 0,14$ m

$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0,14$ m $+ 0,02$ m $+ 0,008$ m $+ 0,008$ m $= 0,176$ m

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0,25$ m y $h = 0,18$ m

Como en el caso del ejemplo anterior, aunque en este caso no ha sido necesario efectuar redondeos importantes para obtener una altura práctica de construir, recalcularemos la cuantía para obtener la armadura de flexión necesaria.

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,18$ m $- 0,02$ m $- 0,008$ m $- 0,008$ m $= 0,144$ m

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22,22$ kNm $/ (17000$ kN/m$^2 \cdot 0,25$ m $\cdot 0,144^2$ m$^2) = 0,25213$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,25213)^{1/2} = 0,29592 \quad > \quad k_{a\ mín}$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0,29592 / 0,85 = 0,348 \quad < \quad 0,375 \quad \Rightarrow \quad A'_s = 0$

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}29592 \cdot 17$ MPa $\cdot$ 250 mm $\cdot$ 144 mm / 420 MPa = 431 mm^2

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

$M_n = M_u / \phi = 20$ kNm / 0,90 = 22,22 kNm

De la tabla se obtiene el "m_n" asociado al "k_a" máximo (cuantía máxima con armadura simple) correspondiente al hormigón del ejemplo.

$k_{a\ máx} = 0{,}319 \quad \Rightarrow \quad m_n = 0{,}268$ y dado que

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2)$ se puede despejar

$b_w \cdot d^2 = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot m_n) = 22{,}22$ kNm / (0,85 $\cdot$ 20000 kN/m^2 $\cdot$ 0,268) = 0,00488 m^3

Para obtener la mínima altura posible adoptamos el mayor ancho permitido, es decir:

$b_w = 0{,}25$ m pudiendo ahora despejar

$d = (0{,}00488 \text{ m}^3 / 0{,}25 \text{ m})^{1/2} = 0{,}14$ m

$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0{,}14$ m + 0,02 m + 0,008 m + 0,008 m = 0,176 m

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0{,}25$ m y $h = 0{,}18$ m

Se calculan, utilizando la tabla, las armaduras para la sección anterior.

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}18$ m – 0,02 m – 0,008 m – 0,008 m = 0,144 m

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22{,}22$ kNm / (0,85 $\cdot$ 20000 kN/m^2 $\cdot$ 0,25 m $\cdot$ 0,144^2 m^2)
$m_n = 0{,}25213$

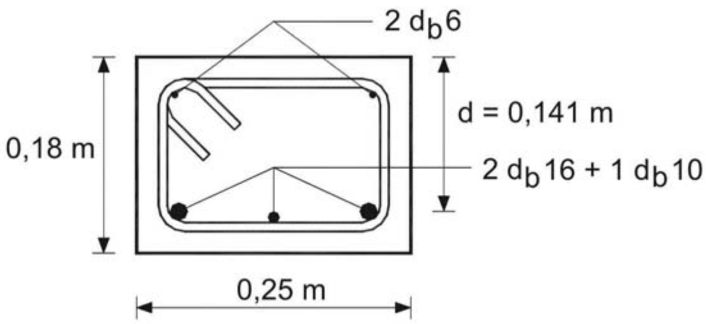
Se obtiene:
Sin interpolar: $k_a = 0{,}300$
Interpolando: $k_a = 0{,}292 + (0{,}300 - 0{,}292) \cdot (0{,}25213 - 0{,}249) / (0{,}255 - 0{,}249) =$
$k_a = 0{,}29617$

Como se observa, aún sin interpolar el error obtenido es algo mayor al 1% por lo que podría utilizarse el valor leído en forma directa.

El valor de "k_a" obtenido se encuentra, según los límites indicados en la tabla, ligeramente por debajo de la cuantía a partir de la que se requiere doble armadura y, obviamente, muy por encima de los valores correspondientes a la cuantía mínima por lo tanto:

$A_s = k_a \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}29617 \cdot 0{,}85 \cdot 20$ MPa $\cdot$ 250 mm $\cdot$ 144 mm / 420 MPa
$A_s = 432$ mm^2

Armado:



Rehaciendo los cálculos para el valor "real" de "d" se llega a:

A_s = 444 mm^2

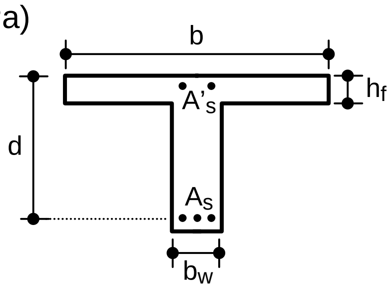
Valor que difiere en sólo un 3% del anteriormente obtenido, resultando adecuadamente cubierto por la armadura adoptada.

2.II.- SECCIONES CON ALAS

Ejemplo 2.II.1

Enunciado: Calcular las armaduras de una viga "T" bajo losa para las siguientes condiciones:

Materiales: - Hormigón: H–25 (f'_c = 25 MPa)
- Acero: ADN 420 (f_y = 420 MPa)



Sección transversal del nervio: - b_w = 0,12 m ; h = 0,40 m

Estribos: - Recubrimiento: c_c = 0,02 m
- Diámetro estimado: d_{be} = 6 mm

Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: d_b = 12 mm

Solicitación: - M_u = 52 kNm

Otras características:
- La viga tiene una luz de 5,50 metros
- Las losas que apoyan sobre la viga tienen un espesor de 0,10 m
- La distancia libre a las vigas paralelas más próximas es de 4,80 m

Determinación del ancho efectivo y espesor de alas

Para completar la geometría de la sección transversal será necesario calcular el ancho efectivo "b" a partir de lo especificado en el CIRSOC 201-2005:

a) b = b_w (ancho del alma) + b_e losa izquierda + b_e losa derecha
b) b $\leq$ Luz de la viga / 4
c) A cada lado del nervio se tendrá que b_e = mínimo (8 · h_f ; ½ distancia libre al alma de la viga adyacente)

La condición c) indica que: b_e = mínimo (8 · 0,10 m ; 4,80 m / 2) = 0,80 m
La condición b) conduce a: $b \leq$ 5,50 m / 4 = 1,375 m
La condición a) resulta en: b = 0,12 m + 0,80 m + 0,80 m = 1,72 m

por lo que decide la condición b) y se adopta: b = 1,37 m

Dado que ambas losas laterales tienen igual espesor se adopta h_f = 0,10 m

Resolución analítica:

Para f'_c = 25 MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 21{,}25$ MPa = 21250 kN/m^2
- $\beta_1 = 0{,}85$

M_n = Momento nominal = M_u / ϕ = 52 kNm / 0,9 = 57,78 kNm

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2$ = 0,40 m – 0,02 m – 0,006 m – 0,006 m = 0,368 m

$A_{s\,mín} = 1{,}4 \cdot b_w \cdot d / f_y$ = 1,4 MPa · 120 mm · 368 mm / 420 MPa = 147 mm^2

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$k_a \leq h_f / d$ = 0,10 m / 0,368 m = 0,272

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2)$ = 57,78 kNm / (21250 kN/m^2 · 1,37 m · 0,368^2 m^2) = 0,01466

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}01466)^{1/2} = 0{,}01476 < 0{,}272$ por lo tanto $a < h_f$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}01476 / 0{,}85 = 0{,}017 < 0{,}375 \Rightarrow A'_s = 0$

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b \cdot d / f_y$ = 0,01476 · 21,25 MPa · 1370 mm · 368 mm / 420 MPa
A_s = 377 mm^2 > $A_{s\,mín}$ = 147 mm^2

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

M_n = Momento nominal = M_u / ϕ = 52 kNm / 0,9 = 57,78 kNm

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2$ = 0,40 m – 0,02 m – 0,006 m – 0,006 m = 0,368 m

En secciones con alas la cuantía mínima recién puede verificarse al contrastarla con la armadura total calculada. De la tabla se obtiene que el valor de "k_a" para calcular la armadura mínima es 0,066.

$A_{s\,mín} = k_{a\,mín} \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y$ = 0,066 · 0,85 · 25 MPa · 120 mm · 368 mm / 420 MPa
$A_{s\,mín}$ = 147 mm^2

Suponiendo en primera instancia que $a \leq h_f$ se ingresa a la tabla con:

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2) = 57{,}78 \text{ kNm} / (0{,}85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1{,}37 \text{ m} \cdot 0{,}368^2 \text{ m}^2)$
$m_n = 0{,}01466$

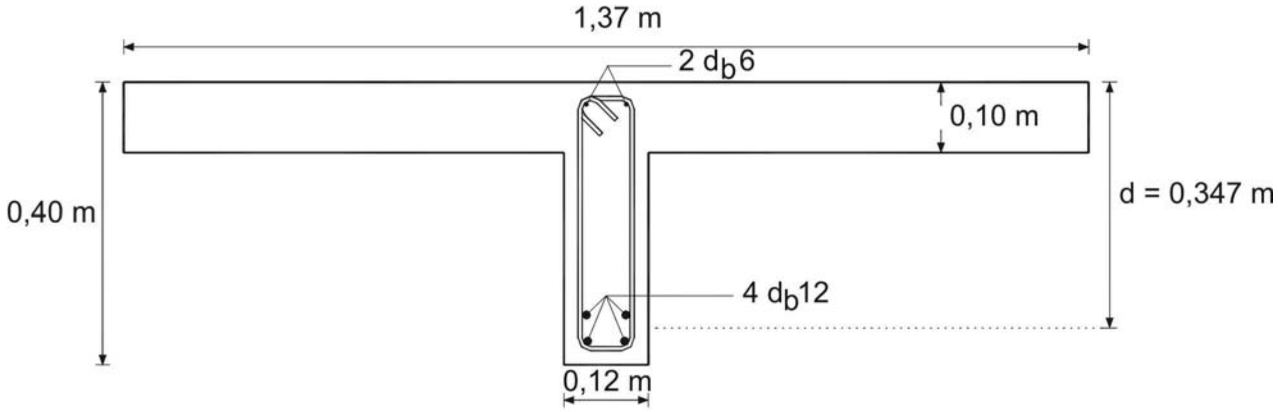
Tal como se indica en la tabla, para valores tan pequeños resulta:

$k_a \approx m_n = 0{,}01466$

El valor de k_a se encuentra claramente por debajo de los valores que requieren doble armadura por lo que resulta:

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b \cdot d / f_y = 0{,}01466 \cdot 0{,}85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 1370 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$
$A_s = 374 \text{ mm}^2 \quad > \quad A_{s\,mín} = 147 \text{ mm}^2$

Armado:



Si se recalcula la armadura con la altura útil $d = 0{,}347$ m se obtiene una armadura:
$A_s = 400 \text{ mm}^2$ la que resulta adecuadamente cubierta por las barras adoptadas.

Ejemplo 2.II.2

Enunciado: Calcular las armaduras de la viga "T" del ejemplo anterior para:

Solicitación: - $M_u = 20$ kNm

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 21{,}25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
- $\beta_1 = 0{,}85$

M_n = Momento nominal = $M_u / \phi = 20 \text{ kNm} / 0{,}9 = 22{,}22 \text{ kNm}$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40 \text{ m} - 0{,}02 \text{ m} - 0{,}006 \text{ m} - 0{,}006 \text{ m} = 0{,}368 \text{ m}$
$A_{s\,mín} = 1{,}4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1{,}4 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 147 \text{ mm}^2$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$k_a \leq h_f / d = 0{,}10\ m / 0{,}368\ m = 0{,}272$

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2) = 22{,}22\ kNm / (21250\ kN/m^2 \cdot 1{,}37\ m \cdot 0{,}368^2\ m^2) = 0{,}00564$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}00564)^{1/2} = 0{,}00565 \quad < \ 0{,}272$ por lo tanto $a < h_f$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}00565 / 0{,}85 = 0{,}007 \quad < \quad 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad A'_s = 0$

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b \cdot d / f_y = 0{,}00565 \cdot 21{,}25\ MPa \cdot 1370\ mm \cdot 368\ mm / 420\ MPa$
$A_s = 144\ mm^2 \quad < \quad A_{s\ mín} = 147\ mm^2$

Por lo tanto se adopta $A_s = A_{s\ mín} = 147\ mm^2$

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

M_n = Momento nominal = $M_u / \phi = 20{,}00\ kNm / 0{,}9 = 22{,}22\ kNm$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40\ m - 0{,}02\ m - 0{,}006\ m - 0{,}006\ m = 0{,}368\ m$

En secciones con alas la cuantía mínima recién puede verificarse al contrastarla con la armadura total calculada. De la tabla se obtiene que el valor de "k_a" para calcular la armadura mínima es 0,066.

$A_{s\ mín} = k_{a\ mín} \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}066 \cdot 0{,}85 \cdot 25\ MPa \cdot 120\ mm \cdot 368\ mm / 420\ MPa$
$A_{s\ mín} = 147\ mm^2$

Suponiendo en primera instancia que $a \leq h_f$ se ingresa a la tabla con:

$m_n = M_n / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2) = 22{,}22\ kNm / (0{,}85 \cdot 25000\ kN/m^2 \cdot 1{,}37\ m \cdot 0{,}368^2\ m^2)$
$m_n = 0{,}00564$

Tal como se indica en la tabla, para valores tan pequeños resulta:

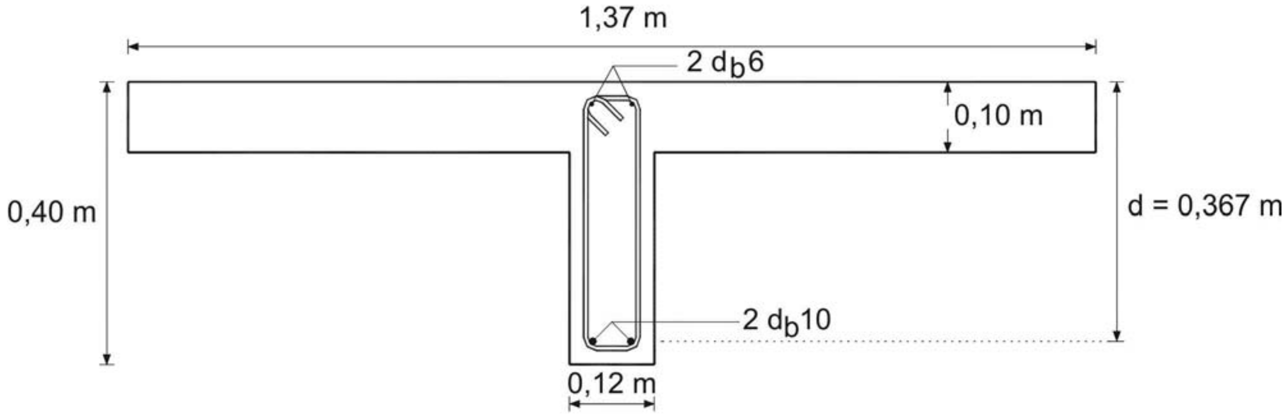
$k_a \approx m_n = 0{,}0056$

El valor de k_a se encuentra claramente por debajo de los valores que requieren doble armadura por lo que resulta:

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b \cdot d / f_y = 0{,}00564 \cdot 0{,}85 \cdot 25\ MPa \cdot 1370\ mm \cdot 368\ mm / 420\ MPa$
$A_s = 144\ mm^2 \ < \ A_{s\ mín} = 147\ mm^2$

Por lo tanto se adopta $A_s = A_{s\ mín} = 147\ mm^2$

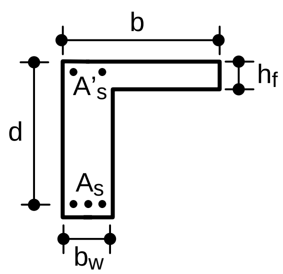
Armado:



Ejemplo 2.II.3

Enunciado: Calcular las armaduras de una viga "L" bajo losa para las siguientes condiciones:

Materiales: - Hormigón: H–25 (f'_c = 25 MPa)
- Acero: ADN 420 (f_y = 420 MPa)



Sección transversal del nervio: - b_w = 0,25 m ; h = 0,40 m

Estribos: - Recubrimiento: c_c = 0,02 m
- Diámetro estimado: d_{be} = 6 mm

Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: d_b = 12 mm

Solicitación: - M_u = 380 kNm

Otras características:
- La viga tiene una luz de 5,00 metros
- La losa que apoya sobre la viga tiene un espesor de 0,09 m
- La distancia libre a la viga paralela más próxima es de 4,20 metros.

Determinación del ancho efectivo y espesor de alas

Para completar la geometría de la sección transversal será necesario calcular el ancho efectivo "b" a partir de lo especificado en el CIRSOC 201-2005:

a) b = b_w (ancho del alma) + b_e
b) b_e = mínimo (6 · h_f ; ½ distancia libre al alma de la viga adyacente; luz viga / 12)

La condición b) indica que: b_e = mínimo (6 · 0,09 m ; 4,20 m / 2 ; 5,00 m / 12) = 0,42 m
La condición a) resulta en: b = 0,25 m + 0,42 m = 0,67 m

Además se tendrá que: $h_f = 0{,}09$ m

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 21{,}25$ MPa $= 21250$ kN/m^2
- $\beta_1 = 0{,}85$

M_n = Momento nominal $= M_u / \phi = 380$ kNm / 0,9 = 422,22 kNm

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0{,}40$ m – 0,02 m – 0,006 m – 0,006 m = 0,368 m

$A_{s\,mín} = 1{,}4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1{,}4$ MPa · 250 mm · 368 mm / 420 MPa = 307 mm^2

Supondremos en principio que $a \le h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$k_a \le h_f / d = 0{,}09$ m / 0,368 m = 0,245

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2) = 422{,}22$ kNm / (21250 kN/m^2 · 0,67 m · 0,368^2 m^2) = 0,21898

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}21898)^{1/2} = 0{,}250 > 0{,}245$ por lo tanto $a > h_f$

La sección no puede considerarse como rectangular por lo que se la descompone en "alma" (subíndice "w") y "ala" (subíndice "f"). La fuerza en el hormigón del ala y el momento que equilibra resultan iguales a:

$C_f = f^*_c \cdot (b - b_w) \cdot h_f = 21250$ kN/m^2 · (0,67 m – 0,25 m) · 0,09 m = 803,25 kN

$M_{nf} = C_f \cdot (d - h_f / 2) = 803{,}25$ kN · (0,368 m – 0,09 m / 2) = 259,45 kNm

La armadura necesaria para equilibrar las compresiones en las alas resulta:

$A_{sf} = C_f / f_y$ = [803,25 kN / (420 MPa)] · 1000 mm^2 MN / (m^2 kN) = 1913 mm^2

El momento a equilibrar con el hormigón del alma resulta:

$M_{nw} = M_n - M_{nf} = 422{,}22$ kNm – 259,45 kNm = 162,77 kNm

$m_n = M_{nw} / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 162{,}77$ kNm / (21250 kN/m^2 · 0,25 m · 0,368^2 m^2) = 0,22625

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}22625)^{1/2} = 0{,}26006$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}26006 / 0{,}85 = 0{,}306 < 0{,}375 \Rightarrow A'_s = 0$

$A_{sw} = k_a \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}26006 \cdot 21{,}25$ MPa · 250 mm · 368 mm / 420 MPa = 1211 mm^2

La armadura total resulta:

$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 1913\ mm^2 + 1211\ mm^2 = 3124\ mm^2 \quad > \quad A_{s\ mín}$

La armadura anterior es extremadamente difícil de ubicar en el ancho del alma. Se debe recurrir al uso de varias capas de armadura. Esto se debe a que la fuerza de compresión de las alas requiere una gran cantidad de armadura para ser equilibrada. Este fenómeno se hace aún más agudo en el caso de vigas "T". Es un caso en el que claramente debe recurrirse a alturas totales de viga mayores.

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

M_n = Momento nominal = M_u / ϕ = 380 kNm / 0,9 = 422,22 kNm

$d = h – c_c – d_{be} – d_b / 2$ = 0,40 m – 0,02 m – 0,006 m – 0,006 m = 0,368 m

En secciones con alas la cuantía mínima recién puede verificarse al conocer la armadura total calculada. De la tabla se obtiene que el valor de "k_a" para calcular la armadura mínima es 0,066.

$A_{s\ mín} = k_{a\ mín} \cdot 0{,}85 \cdot f´_c \cdot b_w \cdot d / f_y$ = 0,066 · 0,85 · 25 MPa · 250 mm · 368 mm / 420 MPa
$A_{s\ mín} = 307\ mm^2$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$k_a \leq h_f / d$ = 0,09 m / 0,368 m = 0,245

se ingresa a la tabla con:

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2)$ = 422,22 kNm / (0,85 · 25000 kN/m^2 · 0,67 m · 0,368^2 m^2) = 0,21898
con lo que se obtiene:

sin interpolar: k_a = 0,252
interpolando: k_a = 0,244 + (0,252 – 0,244) · (0,21898 – 0,214) / (0,220 – 0,214) =
k_a = 0,25064

en cualquier caso k_a > 0,245 por lo tanto $a > h_f$

Como en el caso de la resolución analítica, la sección no puede considerarse como rectangular por lo que se la descompone en "alma" (subíndice "w") y "ala" (subíndice "f"). La fuerza en el hormigón del ala y el momento que equilibra resultan iguales a:

$C_f = 0{,}85 \cdot f´_c \cdot (b – b_w) \cdot h_f$ = 0,85 · 25000 kN/m^2 · (0,67 m – 0,25 m) · 0,09 m = 803,25 kN

$M_{nf} = C_f \cdot (d – h_f /2)$ = 803,25 kN · (0,368 m – 0,09 m / 2) = 259,45 kNm

La armadura necesaria para equilibrar las compresiones en las alas resulta:

$A_{sf} = C_f / f_y = [803{,}25 \text{ kN} / (420 \text{ MPa})] \cdot 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN}) = 1913 \text{ mm}^2$

El momento a equilibrar con el hormigón del alma resulta:

$M_{nw} = M_n - M_{nf} = 422{,}22 \text{ kNm} - 259{,}45 \text{ kNm} = 162{,}77 \text{ kNm}$

$m_n = M_{nw} / (0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 162{,}77 \text{ kNm} / (0{,}85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0{,}25 \text{ m} \cdot 0{,}368^2 \text{ m}^2)$
$m_n = 0{,}22625$

ingresando a la tabla se obtiene

sin interpolar:	$k_a = 0{,}260$
interpolando:	$k_a = 0{,}260 + (0{,}265 - 0{,}260) \cdot (0{,}22625 - 0{,}226) / (0{,}230 - 0{,}226) =$
	$k_a = 0{,}26031$

Se aprecia que la diferencia entre el valor interpolado y el leído en forma directa difiere en mucho menos del 1%.

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}26031 / 0{,}85 = 0{,}306 \quad < \quad 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad A'_s = 0$

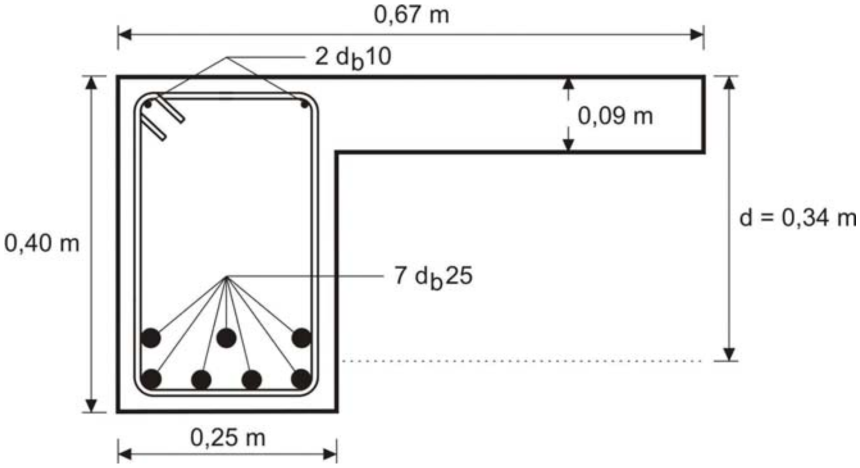
$A_{sw} = k_a \cdot 0{,}85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0{,}26031 \cdot 0{,}85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$
$A_{sw} = 1212 \text{ mm}^2$

La armadura total resulta:

$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 1913 \text{ mm}^2 + 1212 \text{ mm}^2 = 3125 \text{ mm}^2 \quad > \quad A_{s\,mín}$

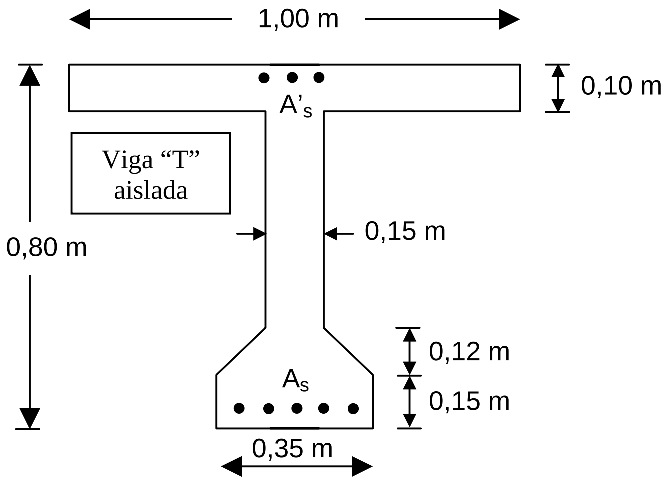
Valen los comentarios hechos al finalizar la resolución analítica.
En términos generales cabe acotar que cuando el eje neutro de tensiones cae dentro del alma, el uso de tablas no resulta sensiblemente más práctico que el abordaje analítico.

Armado:



Luego de un tanteo previo se llega a la distribución de armaduras de la figura.
Si se recalcula la sección para una altura "d = 0,34 m" se llega a una armadura necesaria "A_s = 3439 mm^2" que es adecuadamente cubierta por 7 d_b25 pero aparece además la necesidad de colocar una armadura comprimida "A'_s = 156 mm^2" que se cubre con 2 d_b10.

Ejemplo 2.II.4

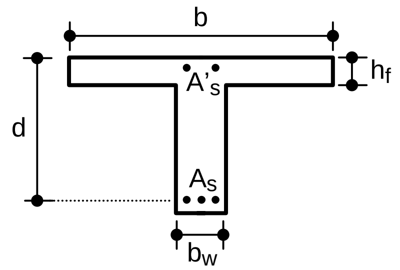


Enunciado: Dimensionar las armaduras de flexión de la sección de la Figura.
La distancia entre el filo de hormigón y el centro de gravedad de las armaduras traccionadas y comprimidas es 0,04 m.

Materiales:
- Hormigón: H–30 (f'_c = 30 MPa)
- Acero: ADN 420 (f_y = 420 MPa)

Estribos:
- Recubrimiento: c_c = 20 mm
- Diámetro estimado: d_{be} = 6 mm

Solicitación: - M_u = 1440 kNm



Determinación del ancho efectivo

Para completar la geometría de la sección transversal será necesario calcular el ancho efectivo "b" a partir de lo especificado en el CIRSOC 201-2005 para vigas aisladas.

El espesor de alas (h_f = 0,10 m) verifica la condición de ser mayor que la mitad del ancho del alma (b_w / 2 = 0,15 m / 2 = 0,075 m)

El ancho efectivo máximo está limitado a cuatro veces el ancho del alma es decir:

$b = 4 \cdot 0{,}15 \text{ m} = 0{,}60 \text{ m}$

por lo que no puede aprovecharse íntegramente el ancho total de losa disponible (1 m).

Resolución analítica:

Para f'_c = 30 MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0{,}85 \cdot f'_c = 25{,}5 \text{ MPa} = 25500 \text{ kN/m}^2$
- $\beta_1 = 0{,}85$

M_n = Momento nominal = M_u / ϕ = 1440 kNm / 0,9 = 1600 kNm

$d = h - 0{,}04 \text{ m} = 0{,}80 \text{ m} - 0{,}04 \text{ m} = 0{,}76 \text{ m}$

$A_{s\ mín} = 1{,}4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1{,}4 \text{ MPa} \cdot 150 \text{ mm} \cdot 760 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 380 \text{ mm}^2$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b" para ello debe verificarse:

$k_a \leq h_f / d = 0{,}10\ m / 0{,}76\ m = 0{,}132$

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2) = 1600\ kNm / (25500\ kN/m^2 \cdot 0{,}60\ m \cdot 0{,}76^2\ m^2) = 0{,}18105$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}18105)^{1/2} = 0{,}20132 \quad > \ 0{,}132$ por lo tanto $a > h_f$

Descomponiendo la sección en alas y alma:

$C_f = f^*_c \cdot (b - b_w) \cdot h_f = 25500\ kN/m^2 \cdot (0{,}60\ m - 0{,}15\ m) \cdot 0{,}10\ m = 1147{,}50\ kN$

$M_{nf} = C_f \cdot (d - h_f / 2) = 1147{,}50\ kN \cdot (0{,}76\ m - 0{,}10\ m / 2) = 814{,}73\ kNm$

La armadura necesaria para equilibrar las compresiones en las alas resulta:

$A_{sf} = C_f / f_y = [1147{,}50\ kN / (420\ MPa)] \cdot 1000\ mm^2\ MN / (m^2\ kN) = 2732\ mm^2$

El momento a equilibrar con el hormigón del alma resulta:

$M_{nw} = M_n - M_{nf} = 1600\ kNm - 814{,}73\ kNm = 785{,}27\ kNm$

$m_n = M_{nw} / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 785{,}27\ kNm / (25500\ kN/m^2 \cdot 0{,}15\ m \cdot 0{,}76^2\ m^2) = 0{,}35544$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0{,}35544)^{1/2} = 0{,}46229$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0{,}46229 / 0{,}85 = 0{,}544 \quad > \quad 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad A'_s > 0$

por lo tanto se necesitará doble armadura

Se fija $k_c = 0{,}375$ por lo tanto:
- $k_a = k_{a\ máx} = k_c \cdot \beta_1 = 0{,}375 \cdot 0{,}85 = 0{,}31875$
- $c = 0{,}375 \cdot 0{,}76\ m = 0{,}285\ m$

por lo que la sección de hormigón comprimido tomará un momento constante igual a:

$M_c = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a\ máx} \cdot (1 - k_{a\ máx} / 2)$

El momento a tomar con A'_s será: $\Delta M_n = M_{nw} - M_c$ es decir,

$\Delta M_n = 785{,}27\ kNm - 25500\ kN/m^2 \cdot 0{,}15\ m \cdot 0{,}76^2\ m^2 \cdot 0{,}31875 \cdot (1 - 0{,}31875 / 2)$
$\Delta M_n = 193{,}28\ kNm$ por lo que

$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$
$A'_s = [193{,}28\ kNm / (420\ MPa \cdot (0{,}76\ m - 0{,}04\ m))] \cdot 1000\ mm^2\ MN / (m^2\ kN) = 639\ mm^2$

El valor de f'_s utilizado en la expresión anterior surge de:

$\varepsilon'_s = 0{,}003 \cdot (0{,}285\ m - 0{,}04\ m) / 0{,}285\ m = 0{,}0026 > \ \varepsilon_y = f_y / E_s = 0{,}0021$
$\Rightarrow\ f'_s = f_y = 420\ MPa$

y por lo tanto se tiene:

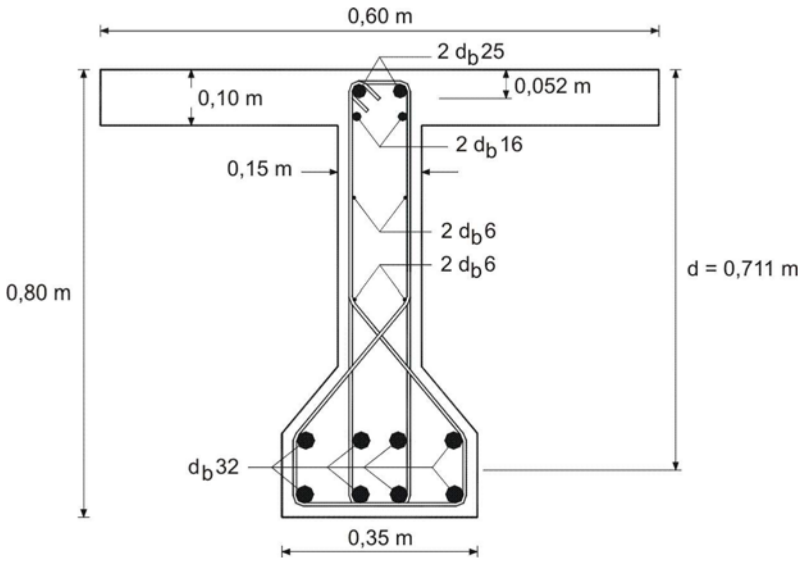
$A_{sw} = k_{a\ máx} \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$
$A_{sw} = 0{,}31875 \cdot 25{,}50\ MPa \cdot 150\ mm \cdot 760\ mm / 420\ MPa + 639\ mm^2 \cdot 420\ MPa / 420\ MPa$
$A_{sw} = 2206\ mm^2 + 639\ mm^2 = 2845\ mm^2$

$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 2732\ mm^2 + 2845\ mm^2 = 5577\ mm^2$

Resolución mediante la tabla auxiliar Nº1:

Como se comentó en el Ejemplo anterior, la resolución mediante tablas no aporta un beneficio significativo en la simplificación de los cálculos. Remitimos al lector a la operatoria utilizada en el Ejemplo anterior.

Armado:



Luego de un tanteo en la adopción de armaduras se llega al esquema de la figura. Recalculando las armaduras con la geometría de la figura se llega a que:

$A'_s = 1168\ mm^2$

$A_s = 5964\ mm^2$

valores adecuadamente cubiertos por las armaduras dispuestas.