

MODELOS DE BIELAS

13.1.- Generalidades

Los modelos de bielas fueron utilizados desde los comienzos de la Teoría del Hormigón Armado (Ritter – Mörsch) para el estudio del corte y de la torsión. Si bien su uso podría generalizarse a cualquier sector de una estructura de hormigón armado, el Apéndice A del CIRSOC 201-2005 los indica especialmente para el análisis de los sectores de una estructura en los que no se verifique la hipótesis de mantenimiento de las secciones planas. Estos sectores reciben el nombre de Regiones “D”. Históricamente las actualmente denominadas Regiones “D” (vigas de gran altura, ménsulas cortas, nudos de pórticos, etc.) eran abordadas a través de expresiones empíricas que tenían como principal desventaja el estar desarrolladas para geometrías y cargas muy específicas por lo que no podía generalizarse su uso.

13.2.- Pasos propuestos en el Apéndice A del CIRSOC 201-2005

13.2.1.- Definir y aislar cada una de las Regiones “D”

El primer paso de este método de análisis consiste en la identificación de aquellas zonas de la estructura en las que no pueda suponerse válido el mantenimiento de las secciones planas y por lo tanto no sean de aplicación las expresiones de dimensionamiento que da el cuerpo principal del Reglamento. A estas zonas la bibliografía internacional las denomina Regiones “D” (por “disturbed”, perturbadas) en contraposición con las zonas restantes a las que las denomina Regiones “B” (por Bernoulli¹).

Las perturbaciones que dan lugar a la aparición de regiones “D” pueden tener básicamente dos orígenes: discontinuidades en la función carga (p.e. cargas concentradas provenientes de reacciones o anclajes de pretensado) y discontinuidades geométricas (p.e. nudos de pórticos o pasajes de tuberías por el alma de vigas).

Identificados los motivos que generan la aparición de regiones “D” (discontinuidades de cargas o de geometría) restaría cuantificar la extensión de dichas zonas. Schlaich [Referencia (3)] propone determinar dicha extensión por aplicación del principio de Saint Venant con ciertos procedimientos de superposición sobre los que no nos extenderemos. El resultado práctico de dicha aplicación a estructuras de barras conduce a que las regiones “D” se extiendan una longitud aproximadamente igual a la mayor dimensión de la sección transversal de la pieza medida a partir de la discontinuidad. En la Figura 13.2.1 se ven algunas aplicaciones de este criterio práctico a piezas con diferentes secciones transversales, condiciones de carga y relaciones altura–luz.

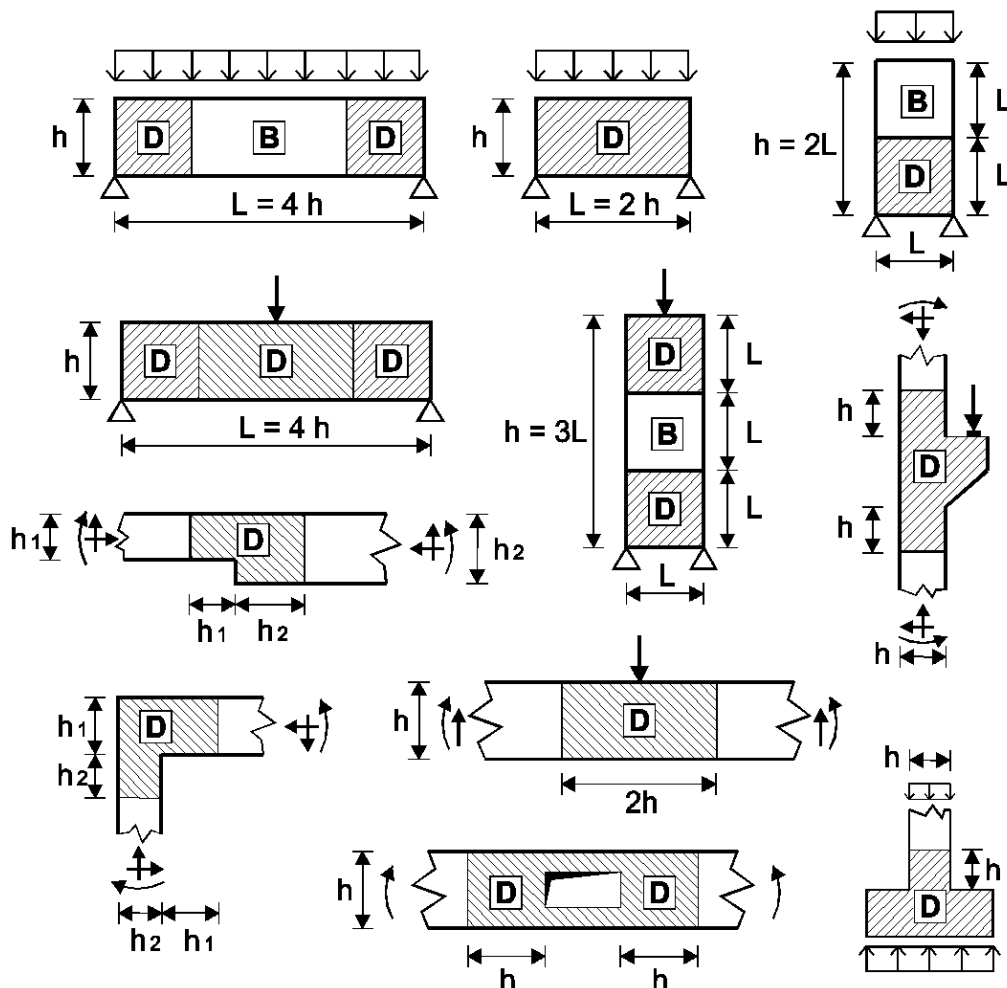
Los textos clásicos de hormigón armado suelen decir que una viga simplemente apoyada de un tramo se considera como “de gran altura” cuando su luz es menor que dos veces su altura total. Esta caracterización se hace a través de una cualidad geométrica sin tener en consideración el tipo de cargas actuantes. Como puede apreciarse en la Figura 13.2.1 la

¹ Haciendo referencia a Daniel Bernoulli (1700-1782), matemático suizo a quien se asocia con la hipótesis de mantenimiento de las secciones planas.

consideración anterior es válida para carga uniforme pero no lo es para una carga puntual.

El término “viga de gran altura” o “ménsula corta” debe indicar entonces que se está tratando con un elemento en el que no puede suponerse que las secciones se mantienen planas y que, por lo tanto, requiere de un tratamiento especial.

SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR



SECCIÓN TRANSVERSAL "T" (con ancho de placa mayor que la altura)

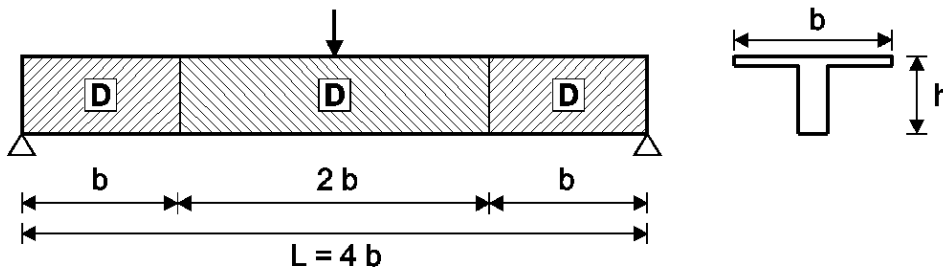


Figura 13.2.1

No identificar que en una zona no se mantienen las secciones planas puede introducir no solamente errores en la cuantificación de las armaduras sino también en su ubicación.

13.2.2.- Determinar los esfuerzos resultantes que actúan sobre los bordes o fronteras de cada una de las Regiones “D”

Sobre una región “D” pueden actuar tres tipos de esfuerzos “externos”:

- a) Acciones exteriores propiamente dichas (por ejemplo cargas concentradas)**
Estas acciones son datos del problema.
- b) Reacciones exteriores**
Usualmente las reacciones se obtienen mediante un cálculo ordinario de la estructura prescindiendo de la existencia o no de las diferentes regiones.
- c) Esfuerzos provenientes de las regiones “B” linderas**
El cuerpo principal del Reglamento permite calcular la resistencia y la ubicación de las resultantes internas de estas regiones.

13.2.3.- Seleccionar el modelo de reticulado (bielas)

Este es indudablemente el paso más complicado del método y el que requiere de mayor conocimiento y entrenamiento.

13.2.3.1.- Requerimientos básicos

El trabajo con modelos de bielas es básicamente una aplicación del Teorema del Límite Inferior del Cálculo Plástico por lo que estos modelos deben verificar:

- a) Equilibrio**
Los modelos pueden ser isostáticos relativos (cadenas cinemáticas que son estables para el estado de cargas en estudio), isostáticos o hiperestáticos. Para facilitar su resolución, aún cuando la estructura sea hiperestática en su conjunto se tiende a la utilización de modelos isostáticos.
- b) Resistencia**
Una vez determinados los esfuerzos en los diferentes elementos los mismos son verificados para asegurar que se satisfaga la condición resistente en todos ellos.
- c) Compatibilidad**
El trazado del modelo debería seguir en lo posible el flujo de tensiones interno de la pieza de modo que no se requiera una redistribución interna de esfuerzos que supere a la ductilidad disponible o bien que genere un cuadro de fisuración inaceptable. Es un criterio aceptado que lo anterior se logra ubicando los puntales y tensores alineados en forma aproximada con las resultantes internas de los flujos de tensiones de tracción y compresión que surgen de un cálculo elástico. Este

criterio debería aplicarse con mayor rigidez cuanto más solicitada se encuentre la región en estudio.

Los nodos se ubican en las zonas en que los esfuerzos internos experimentan cambios bruscos de dirección.

Dado que en muchos casos no se contará con un plexo de isostáticas correspondiente al problema en estudio, el CIRSOC 201-2005, artículos A.2.4 y A.2.5, indica algunas cuestiones de carácter general que tienden a garantizar en forma indirecta la compatibilidad:

- Los tensores pueden cruzar a los puntales
- Los puntales no pueden cruzarse entre sí aunque pueden encontrarse en los nodos.
- El ángulo entre el eje de cualquier puntal y el eje de cualquier tensor que concurran a un mismo nudo no debe ser nunca menor que 25° .

Como puede verse, las condiciones a) y b) se verifican en forma explícita y la condición c) se verificará sólo si el modelo ha sido adecuadamente adoptado lo cual no siempre resulta evidente.

13.2.3.2.- Los modelos y la falta de unicidad

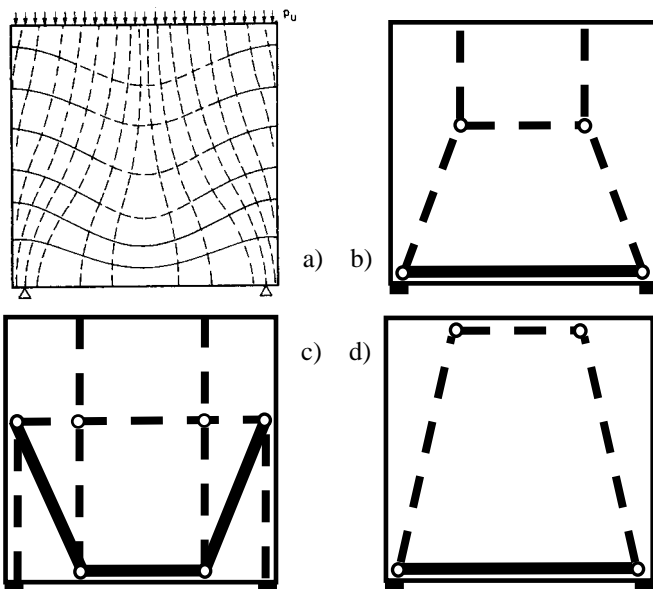


Figura 13.2.3.2.1

Las figuras 13.2.3.2.1.a) a d) muestran una viga y tres posibles modelos representativos de su comportamiento. La pregunta evidente es: cual de ellos elegir?

Schlaich indica que dado que las estructuras reales tienden a resistir las acciones con el menor trabajo de deformación posible, entre varios modelos posibles habría que elegir el que produzca el menor trabajo interno de deformación.

Dado que los puntales de hormigón son muy rígidos aportan poco al trabajo interno por lo que, si los esfuerzos entre los diferentes tensores fueran del mismo orden podría decirse que el modelo más

adecuado será el que presente menor longitud total de tensores. En caso contrario será el que presente el menor valor de la sumatoria aplicada a todos los tensores del producto de la fuerza en cada tensor por su longitud.

Teniendo en cuenta lo anterior, el modelo más adecuado resultará ser el d) aunque si la pieza estuviera fuertemente solicitada (o no estuviéramos seguros si lo está o no) convendría adoptar el b). En otras palabras, el modelo no es único y podrá variar con el

nivel de sollicitación y de un proyectista a otro. La única forma de llegar a un modelo único sería satisfaciendo enteramente las condiciones de compatibilidad para lo cual habría que introducir las ecuaciones constitutivas de los materiales y resolver enteramente un problema que es no lineal perdiéndose de esta manera la simplicidad del método.

La no unicidad en la solución crea una cierta sensación de fastidio en los proyectistas que, esperando una herramienta de cálculo directo, se encuentran con un amplio rango de posibilidades y libertades que no conducen a una única solución. Se trata de un proceso muy parecido al que enfrentan en el momento de proyectar una estructura al cual ya están acostumbrados y consideran natural.

Los esquemas de Figura 13.2.3.2.2.a) a 13.2.3.2.2.c) han sido analizados por Reineck en la Referencia (1) y corresponden al extremo de una viga que apoya a través de una nariz².

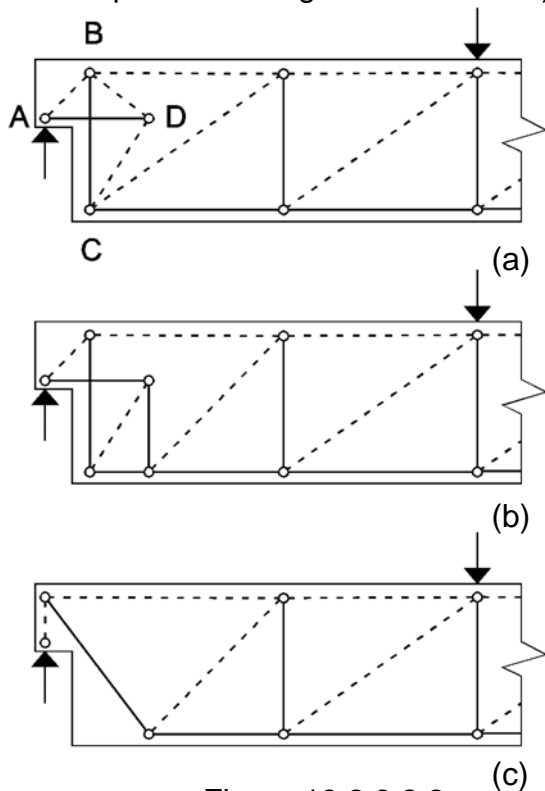


Figura 13.2.3.2.2

Figura 13.2.3.2.2.a): El esquema corresponde a una viga ensayada por Cook y Mitchell (1988). Comparado con el esquema de Figura 13.2.3.2.2.b, presenta una distribución más sencilla de armaduras en las proximidades de la nariz. Dado que los resultados experimentales muestran cerca de la rotura una fisura que, partiendo del vértice de encuentro entre la nariz y el cuerpo de la viga, se extiende diagonalmente cortando el puntal “BD”, el modelo no parece del todo consistente con la configuración de rotura.

Figura 13.2.3.2.2.b): Supera la observación hecha al modelo anterior pero controla deficientemente la apertura de la fisura que conduce a la rotura al no presentar armaduras normales a dicha fisura.

Figura 13.2.3.2.2.c): Supera las dos observaciones hechas a los modelos anteriores pero no es capaz de resistir adecuadamente fuerzas horizontales aplicadas en el apoyo.

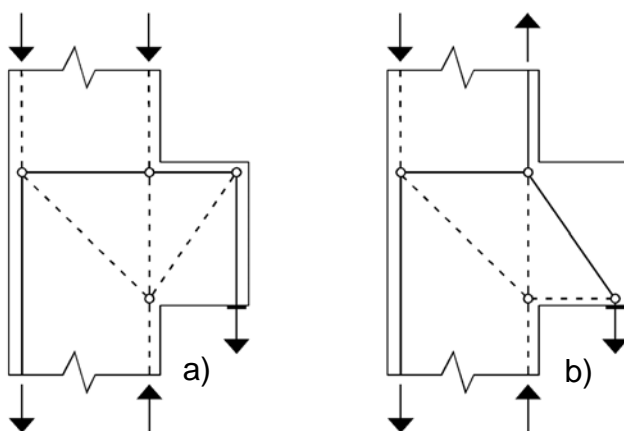


Figura 13.2.3.2.3

Una razón que puede hacer preferible un modelo respecto a otro es la facilidad de armado. En la Figura 13.2.3.2.3 se muestran dos modelos “posibles” para una ménsula corta cargada inferiormente. Como puede apreciarse, el modelo a) puede armarse utilizando armaduras ortogonales horizontales y verticales mientras que el modelo b) requerirá el uso de una importante armadura diagonal.

² Para facilitar su visualización las figuras han sido adaptadas.

Desde el punto de vista del consumo de armadura resultará más interesante el esquema b) mientras que si se le da prioridad a la facilidad de armado seguramente se optará por el esquema a).

En términos generales los modelos de bielas conducen a mayores armaduras que las fórmulas empíricas desarrolladas a partir de resultados de ensayos. Esto se debe a que los modelos de bielas desprecian enteramente la resistencia a tracción del hormigón y consideran, en general, una capacidad de redistribución interna menor que la que realmente presentan los elementos.

13.2.3.3.- Modelos isostáticos y modelos hiperestáticos

Como ya se mencionó, los modelos de bielas pueden ser isostáticos relativos (ver modelos de Figuras 13.2.3.2.1.b) y d) y 13.2.3.2.2.c)), isostáticos o hiperestáticos. Si bien en general se obvian los modelos hiperestáticos por la dificultad existente en asignar rigideces a los diferentes elementos existen algunos casos en que en la bibliografía se proponen soluciones aproximadas a modelos estáticamente indeterminados.

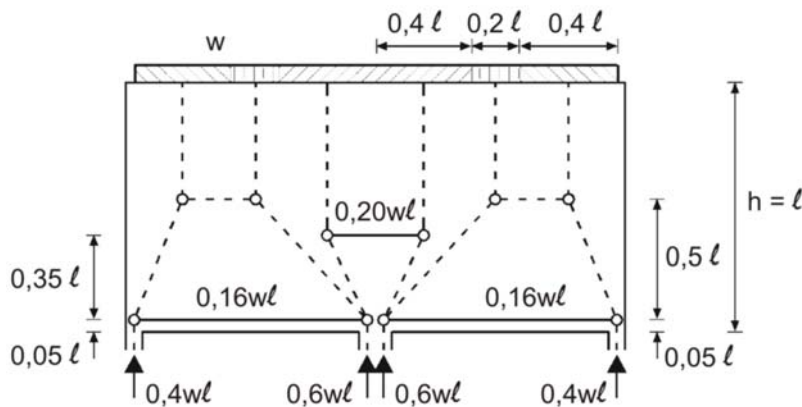


Figura 13.2.3.3.1

En la bibliografía se encuentran modelos de bielas isostáticos correspondientes a estructuras hiperestáticas. Este es el caso de la viga de la Figura 13.2.3.3.1 cuyo modelo ha sido extraído de la Referencia (2).

13.2.3.4.- Modelos en la bibliografía

En la bibliografía, en particular en las Referencias (2) y (3), pueden encontrarse numerosas propuestas para modelos de bielas que ayudan en la resolución de los casos más frecuentes en la práctica. En la Figura 13.2.3.4.1 se muestran dos de ellos.

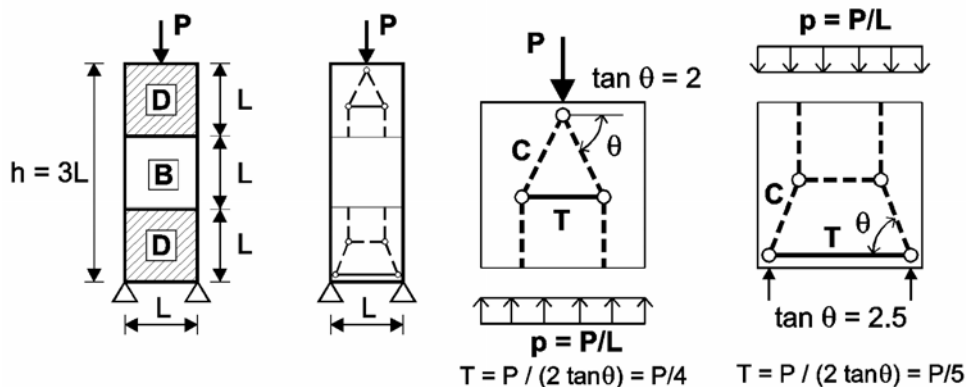


Figura 13.2.3.4.1

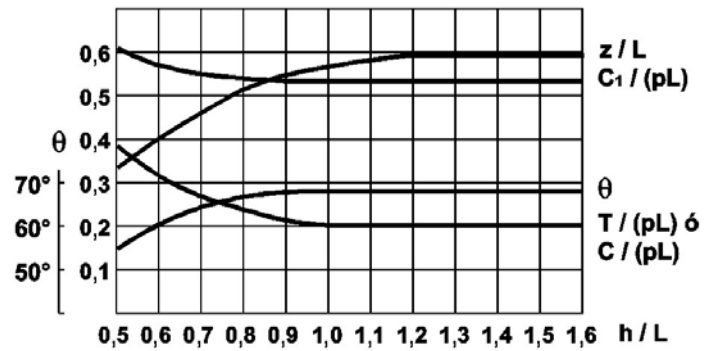
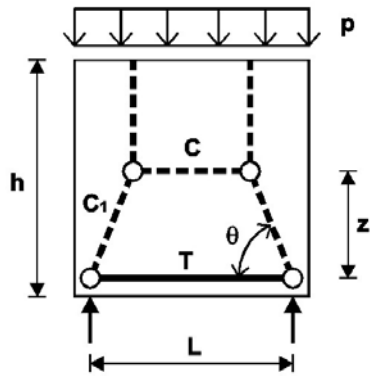


Figura 13.2.3.4.2

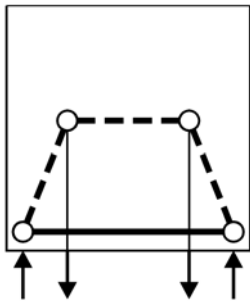


Figura 13.2.3.4.3

La Figura 13.2.3.4.2 muestra la solución de una viga simplemente apoyada con carga uniforme superior.

Si se tuviera una viga de un tramo con carga uniforme inferior, las solicitaciones en las barras principales del modelo pueden obtenerse utilizando el gráfico anterior pero la carga inferior debe ser suspendida a través de una armadura de alma tal como se indica en la Figura 13.2.3.4.3.

13.2.4.- Dimensionamiento y verificación de elementos pertenecientes a modelos de bielas

13.2.4.1.- Formato general

En este punto se desarrollan los criterios propuestos por el CIRSOC 201-2005 para el dimensionamiento y verificación de modelos ya definidos.

En términos generales, y siguiendo el formato utilizado en el resto del CIRSOC 201-2005 se tendrá que verificar que (artículo A.2.6):

$$F_u \leq \phi \cdot F_n$$

donde

F_u = Solicitación en un puntal, tensor o cara de una zona nodal calculada para cargas mayoradas

F_n = Resistencia nominal de un puntal, tensor o cara de una zona nodal

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia = 0,75

13.2.4.2.- Resistencia de las zonas nodales “ F_{nn} ”

El análisis de las zonas nodales ha ido evolucionando con el correr de los años desde las denominadas “zonas nodales hidrostáticas” hasta las llamadas “zonas nodales extendidas” conceptos sobre los que volveremos más adelante.

En general se tendrá (artículos A.5.1 y A.5.2):

$$F_{nn} = f_{ce} \cdot A_{nz}$$

donde

f_{ce} = Resistencia efectiva del hormigón en la zona nodal = $\beta_n \cdot 0,85 \cdot f'_c$

$\beta_n = 1,0$ en zonas nodales limitadas por puntales, áreas de apoyo o ambas

$\beta_n = 0,8$ en zonas nodales que anclan un tensor

$\beta_n = 0,6$ en zonas nodales que anclan dos o más tensores

A_{nz} = según corresponda:

En modelos de bielas bidimensionales debe ser el menor de:

- el área de la cara de la zona nodal sobre la cual actúa F_u , considerada perpendicularmente a la recta de acción de F_u ó
- el área de una sección que atraviesa la zona nodal, considerada perpendicularmente a la recta de acción del esfuerzo resultante que actúa sobre la sección

En modelos de bielas tridimensionales (p.e. cabezales de pilotes) el área de cada una de las caras de una zona nodal debe ser mayor o igual que la indicada para modelos bidimensionales y las geometrías de cada una de dichas caras deben ser similares a las geometrías de las proyecciones de los extremos de los puntales sobre las correspondientes caras de las zonas nodales.

13.2.4.3.- Resistencia de los puntales de hormigón “ F_{ns} ”

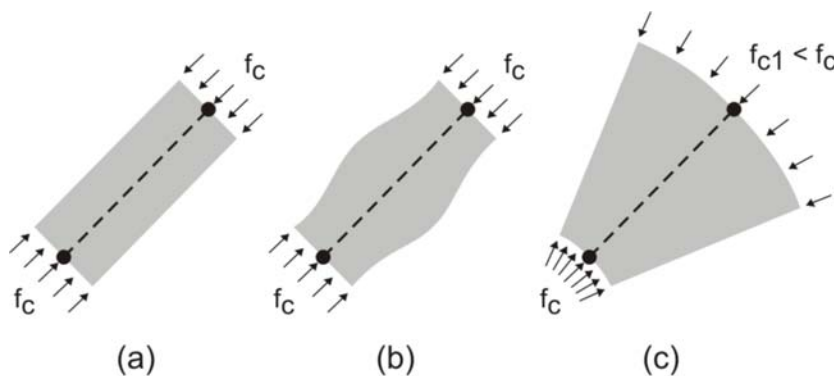


Figura 13.2.4.3.1

La siguiente expresión debe evaluarse en ambos extremos de un puntal y considerarse el menor valor obtenido (artículo A.3.1, A.3.5 y CA.3.5):

$$F_{ns} = A_{cs} \cdot f_{ce} + A'_s \cdot f'_s$$

donde

A_{cs} = Sección transversal en el extremo en estudio

f_{ce} = Mínimo valor entre la resistencia efectiva a compresión del puntal y la resistencia efectiva de la zona nodal a la que concurre el extremo en estudio.

A'_s = Armadura de compresión que puede disponerse si resulta necesario aumentar la resistencia de un puntal. No es imprescindible su presencia. De existir debe ser paralela al eje del puntal y debe estar encerrada por estribos o zunchos que verifiquen los requerimientos exigidos para columnas.

f'_s = Para armaduras con $f_y \leq 420$ MPa se puede adoptar igual a f_y .

La resistencia efectiva a la compresión de un puntal se evalúa como (artículo A3.2):

$$f_{ce} = \beta_s \cdot 0,85 \cdot f'_c$$

donde

$\beta_s = 1,00$ Cuando a lo largo del puntal la sección transversal del mismo no varía. Esto se da en los campos de compresiones con forma de prisma (Figura 13.2.4.3.1.a) característicos de las columnas y de los bloques de compresión que se utilizan en el equilibrio de la flexión en vigas. También se presenta en flujos en forma de abanico como el indicado en la Figura 13.2.4.3.1.c) donde la tensión es variable pero no se presentan tensiones transversales.

$\beta_s = 0,75$ En puntales con forma de botella (Figura 13.2.4.3.1.b)) que presenten armadura suficiente como para tomar las tracciones originadas en la expansión lateral del flujo de tensiones. Estas armaduras limitan la abertura de las fisuras aumentando la resistencia respecto a un elemento sin armadura o con armadura insuficiente.

$\beta_s = 0,60$ En puntales con forma de botella (Figura 13.2.4.3.1.b)) que **NO** presenten armadura suficiente como para tomar las tracciones originadas en la expansión lateral del flujo de tensiones.

$\beta_s = 0,40$ En puntales que se encuentren en elementos traccionados o en alas traccionadas de elementos tales como vigas cajón. El bajo valor de β_s tiene en consideración que los puntales comprimidos estarán atravesados por fisuras de tracción.

$\beta_s = 0,60$ En el resto de los casos. Se hace referencia aquí a situaciones como las indicadas en la Figura 13.2.4.3.2.b) donde se muestra un puntal, que a diferencia del mostrado en la Figura 13.2.4.3.2.a), está cortado por una fisura oblicua a su eje.

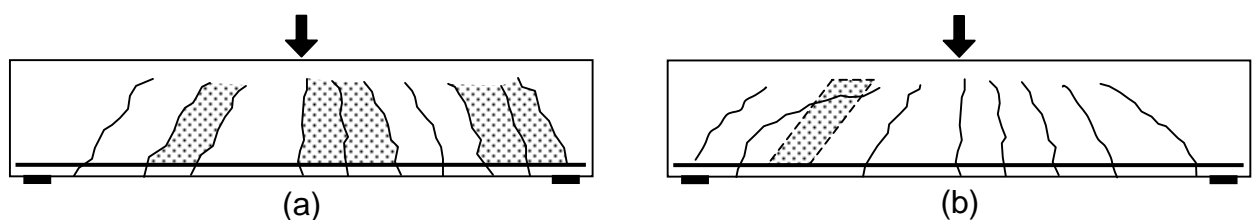


Figura 13.2.4.3.2



Figura 13.2.4.3.3

Como ya se ha dicho, para poder utilizar $\beta_s = 0,75$ en los puntales con forma de botella es necesario que los mismos cuenten con una armadura transversal adecuadamente anclada capaz de resistir esfuerzos transversales de tracción a través de las fisuras longitudinales que se originan en este tipo de puntales. Esa armadura puede calcularse

suponiendo que el flujo de tensiones tiene un aspecto como el indicado en la Figura 13.2.4.3.3 (apertura 2 longitudinal : 1 transversal) o bien utilizando la siguiente expresión válida para hormigones de $f'_c \leq 42$ MPa (artículo A.3.3.1):

$$\sum \frac{A_{s_i}}{b_s \cdot s_i} \cdot \text{sen } \alpha_i \geq 0,003$$

Esta expresión está desarrollada para armaduras que forman un ángulo α_i con el eje del puntal (Figura 13.2.4.3.4). En ella "A_{si}" representa el área de una barra de una capa que corre en dirección "i" multiplicada por el número de capas (por ejemplo 2 si hay una en cada cara), "s_i" es la separación entre barras que corren en la dirección "i" y "b_s" es el espesor de la sección de hormigón.

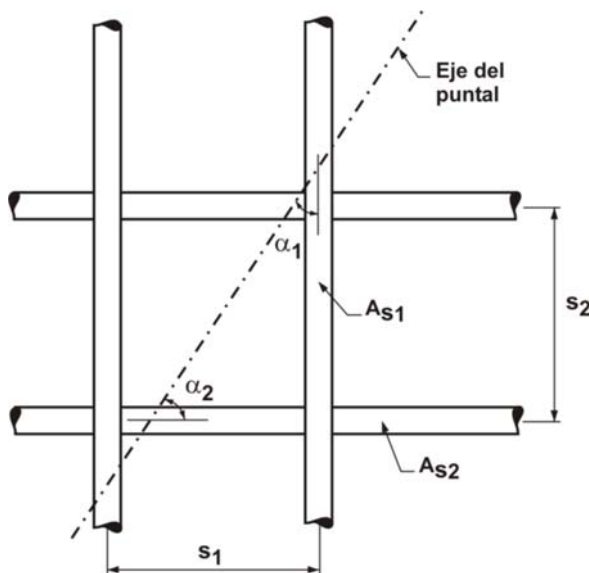


Figura 13.2.4.3.4

En vigas de gran altura se recomienda disponer este tipo de armaduras en ambas caras de la viga y en direcciones ortogonales. En ménsulas cortas con relaciones luz de corte/altura menores que uno las armaduras suelen estar constituidas por estribos horizontales. Si existieran armaduras en una única dirección se debe verificar $\alpha \geq 40^\circ$ (artículo A.3.3.2).

13.2.4.4.- Resistencia de los tensores "F_{nt}"

El CIRSOC 201-2005, artículo A.4.1, indica que la resistencia nominal de un tensor se determina con la siguiente expresión:

$$F_{nt} = A_{ts} \cdot f_y + A_{tp} \cdot (f_{se} + \Delta f_p)$$

donde

- A_{ts} = Área de la armadura no tesa
- f_y = Tensión de fluencia especificada de la armadura no tesa
- A_{tp} = Área de la armadura tesa
- f_{se} = Tensión efectiva en la armadura tesa luego de producidas las pérdidas
- Δf_p = 420 MPa para armadura adherente y 70 MPa para armadura no adherente
- $(f_{se} + \Delta f_p) \leq f_{py}$
- f_{py} = Tensión de fluencia especificada de la armadura tesa

13.3.- Nodos y zonas nodales

13.3.1.- Generalidades

Los nodos son puntos de intersección de los ejes de los puntales y tensores que componen un modelo de bielas y las zonas nodales son regiones de hormigón situadas alrededor de los nodos donde se produce la conexión física entre los miembros del modelo. En un nodo plano, para que pueda existir equilibrio es necesario que al mismo concurren al menos tres fuerzas que pueden provenir tanto de miembros del modelo como de reacciones.

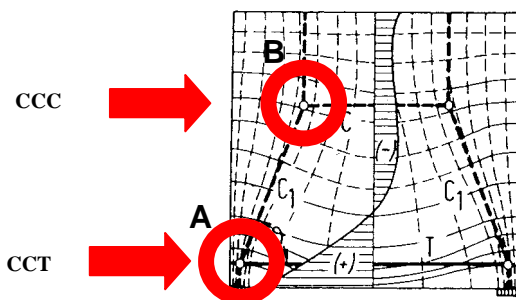


Figura 13.3.1.1

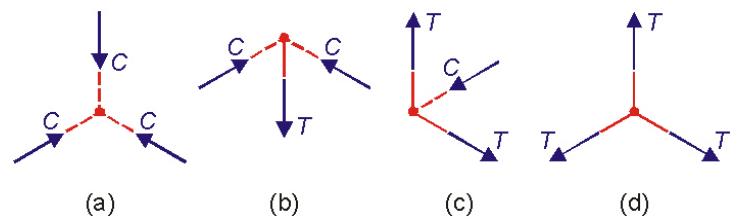


Figura 13.3.1.2

Los nodos de un modelo pueden representar cambios muy fuertes en la dirección de las isostáticas (nudo singular o concentrado) o cambios más suaves (nodos distribuidos o continuos). Los nodos "A" y "B" de la Figura 13.3.1.1 muestran dos ejemplos de lo dicho.

Los nodos se clasifican de acuerdo al tipo de fuerzas que concurren a los mismos. Se indica con "C" a las barras comprimidas que llegan a un nodo y con "T" a las traccionadas. De esta forma los nodos planos pueden denominarse como CCC, CCT, CTT y TTT de acuerdo al esfuerzo que presenten las barras concurrentes. Ejemplos de estos nodos pueden verse en la Figura 13.3.1.2.

13.3.2.- Tipos de zonas nodales

13.3.2.1.- Zonas nodales hidrostáticas

Si bien en la actualidad se trabaja casi exclusivamente con las denominadas “zonas nodales extendidas”, en la bibliografía menos reciente suelen encontrarse referencias a las denominadas “zonas nodales hidrostáticas”. Estas últimas reciben este nombre porque la longitud de sus caras se determina de modo que todas ellas estén sometidas a igual tensión normal. Las caras de una zona nodal hidrostática son normales a los ejes miembros concurrentes y por lo tanto no están sometidas a esfuerzos tangenciales. De esta forma la representación del estado plano de tensiones a que están sometidas se reduce a un punto en el círculo de Mohr y de allí su denominación de “hidrostáticas” (aunque la condición no se verifique para tensiones normales al plano). Para extender su uso a nodos a los que concurren barras traccionadas, éstas se suponen ancladas más allá del nodo a través de anclajes rectos, ganchos, etc, transformados en una “placa hipotética” que apoya directamente sobre una cara del nodo produciendo compresiones sobre la misma.

El requerimiento de contar con igual presión en todas las caras muchas veces complica operativamente el uso de este tipo de nodos.

13.3.2.2.- Zonas nodales extendidas

Tal como se muestra en la Figura 13.3.2.2.1, una zona nodal extendida es la porción de un elemento limitada por la intersección del ancho efectivo de un puntal (w_s) con el ancho efectivo de un tensor (w_t).



Figura 13.3.2.2.1

En estas zonas, el esfuerzo de cada tensor se debe anclar a partir de la sección crítica definida como la sección normal al tensor que pasa por el punto en el que el baricentro de la armadura del tensor abandona la zona nodal extendida e ingresa al tramo.

Estas zonas pueden estar incluyendo o no un nudo hidrostático.

13.3.2.3.- Zonas nodales a las que concurren más de tres fuerzas

En la Figura 13.3.2.3.1 se muestra un modelo de bielas en el que se presentan dos nudos, los ubicados por debajo de las cargas concentradas, a los que concurren más de tres fuerzas. En estos casos es usual proceder a resolver dos de las fuerzas en su

resultante creando un subnodo a ese efecto. La Figura 13.3.2.3.1.c) muestra un ejemplo de este tipo de solución.

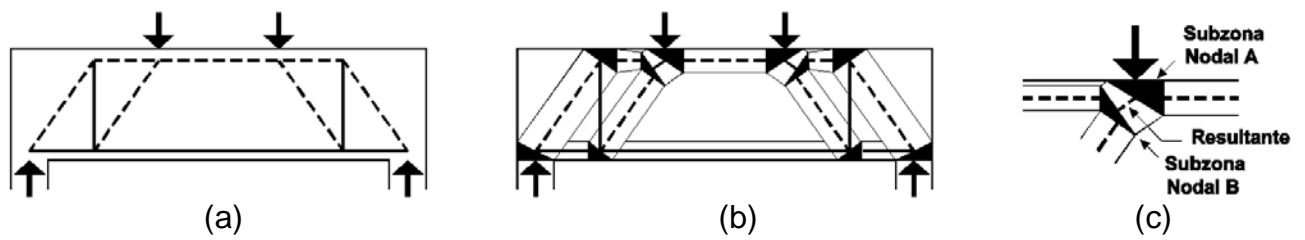


Figura 13.3.2.3.1

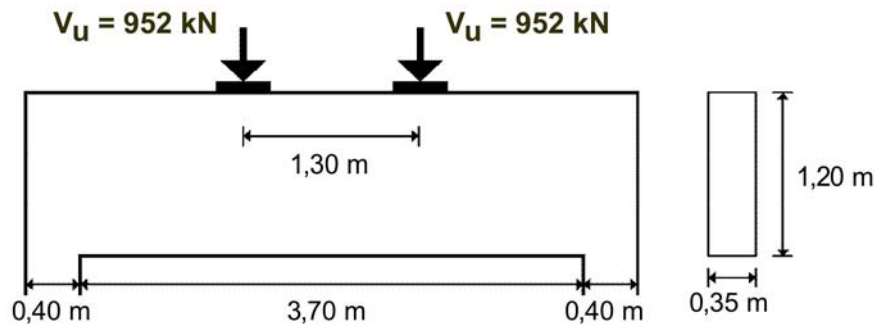
BIBLIOGRAFÍA

- (1) Reineck, Karl-Heinz (Editor), "Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie Models", SP-208, American Concrete Institute, 2002
- (2) Practical Design of Structural Concrete - fib - September 1999
- (3) Schlaich, Jörg; Schäfer, Kurt; Jennewein, Mattias, "Toward a Consistent Design of Structural Concrete", PCI Journal, V.32, N° 3, May-June, 1987, pp. 74-150

MODELOS DE BIELAS – EJEMPLOS

Ejemplo 13.I

Enunciado: Calcular y adoptar las armaduras de la siguiente viga y verificar su aptitud general para resistir las cargas indicadas.



Materiales:

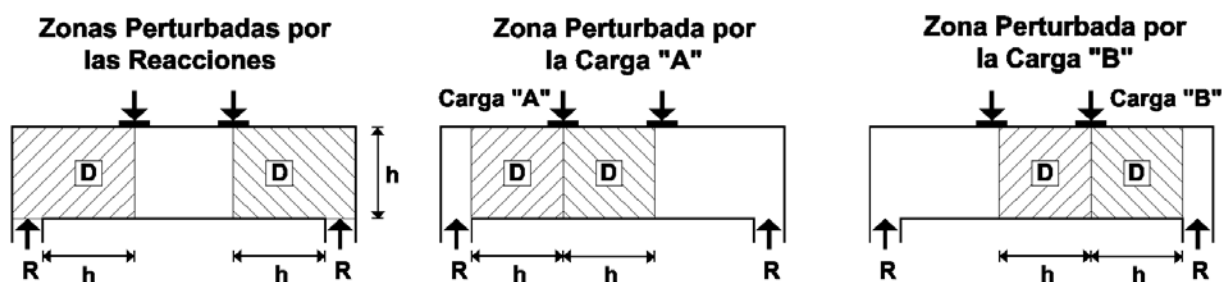
- Hormigón: H-30 ($f'_c = 30$ MPa)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

Cargas:

- Peso propio: Su efecto se ha incluido en el valor de la parte permanente de las cargas concentradas.
- $V_D = 476$ kN ; $V_L = 238$ kN
- Placas de apoyo: $0,40$ m \times $0,35$ m (espesor de la viga)

Resolución:

a) Identificación de las zonas "B" y "D"



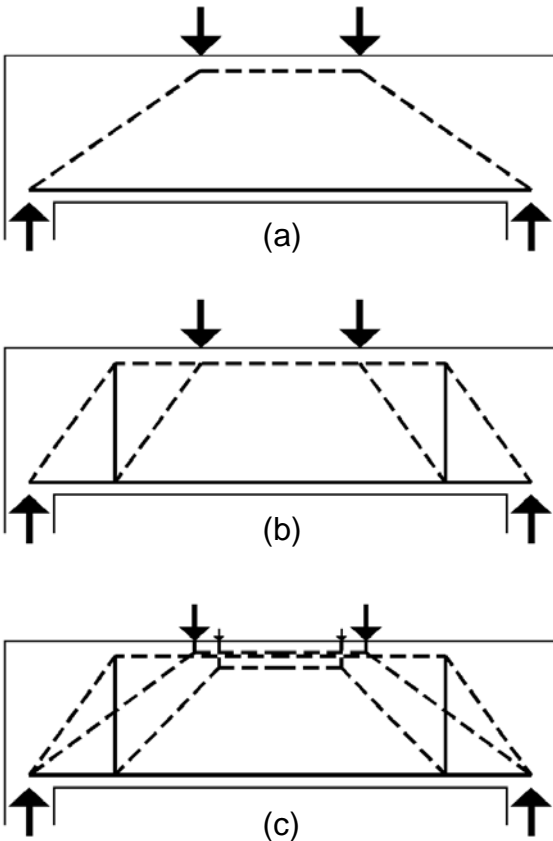
Si se acepta como criterio general que las zonas afectadas por las discontinuidades geométricas o de cargas tienen una extensión igual a la mayor dimensión de la sección transversal, las figuras anteriores representarían las zonas perturbadas por las cargas exteriores aplicadas y por las reacciones. Como puede observarse, al superponer las tres figuras se llega a la conclusión de que toda la viga se encuentra perturbada por lo que la hipótesis de mantenimiento de secciones planas no es aplicable en ninguna de sus secciones.

b) Cálculo de las fuerzas actuantes en las fronteras de las zonas “D”

Dado que toda la viga es una gran zona “D”, las fuerzas en las fronteras serán las acciones exteriores y las reacciones:

$$R = V_u = 1,2 \cdot V_D + 1,6 \cdot V_L = 1,2 \cdot 476 \text{ kN} + 1,6 \cdot 238 \text{ kN} = 952 \text{ kN}$$

c) Elección del modelo de bielas



Las Figuras (a), (b) y (c) representan tres posibles modelos de bielas a aplicar en la resolución del problema.

El modelo (a) no presenta armaduras verticales de alma por lo que esta solución controlará la fisuración diagonal sólo a través de la cuantía mínima de armadura de alma que no resultará proporcional a los esfuerzos que en ella se desarrollen. Por otra parte, la armadura inferior será constante entre apoyos y será necesario anclar en los nodos extremos el 100% de la carga máxima del tensor inferior.

El modelo (b) requiere armadura de alma. Esta armadura será la necesaria para resistir una carga igual a cada una de las cargas exteriores independientemente de cual sea la distancia de dichas cargas a los apoyos. La fuerza en las armaduras inferiores es variable y la fuerza que es necesario anclar en los apoyos es menor a la fuerza máxima que se produce en el tensor central.

El modelo (c) es el propuesto en “Practical Design of Concrete Structures” publicado en Septiembre de 1999 por la FIB. Se trata de un modelo empírico que permite una transición gradual entre vigas de esbeltez normal y vigas de gran altura por lo que la armadura de alma disminuye cuando disminuye la relación entre la distancia de las cargas al apoyo y la altura de la viga. Se trata de un modelo más afinado pero más complejo de resolver.

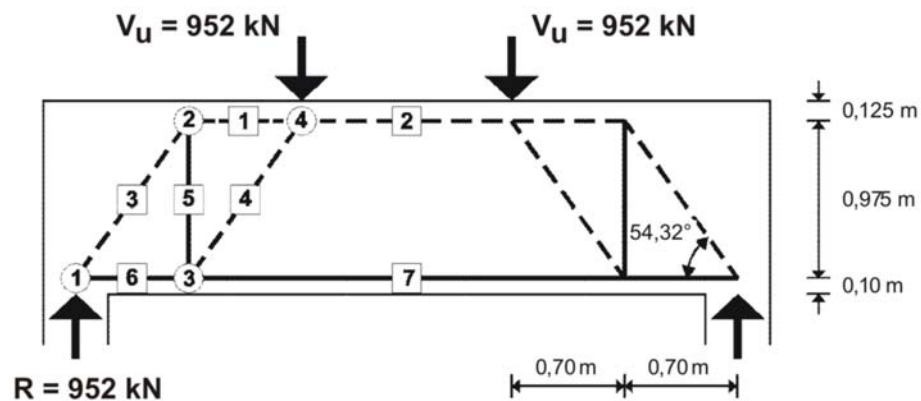
Para este ejemplo adoptaremos el modelo (b).

d) Geometría general y esfuerzos en los puntales y tensores

En la siguiente figura se han indicado la numeración de nodos y barras que se utilizan en la resolución de este ejemplo y las dimensiones generales del modelo. En la elección de las dimensiones del modelo se han tenido en cuenta los anchos asignados a los puntales

y a los tensores. Se trata de un proceso que requiere tanteos por lo que no es conveniente iniciar el cálculo con anchos muy pequeños. El utilizar anchos algo mayores a los necesarios conduce a armaduras un poco mayores que las estrictamente necesarias pues los “brazos internos” disminuyen.

En base a una estimación aproximada de esfuerzos se fijan los anchos del Puntal 2 (0,25 m) y del Tensor 7 (0,20 m). Los nodos 2 y 3 se ubican a media distancia horizontal entre los nodos 1 y 4.

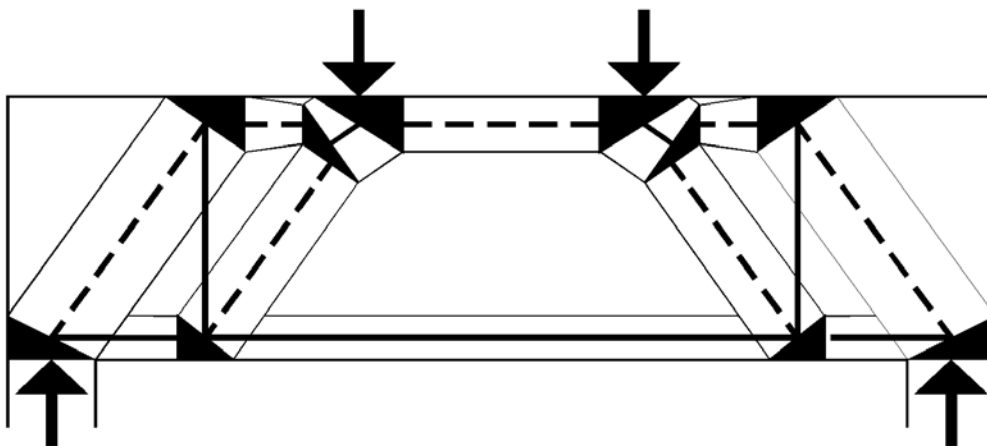


Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 1:	$F_{u3} = R / \text{sen } 54,32^\circ$	= 1171,95 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 1:	$F_{u6} = F_{u3} \cdot \text{cos } 54,32^\circ$	= 683,49 kN
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 2:	$F_{u5} = F_{u3} \cdot \text{sen } 54,32^\circ = R$	= 952,00 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 2:	$F_{u1} = F_{u3} \cdot \text{cos } 54,32^\circ$	= 683,49 kN
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 3:	$F_{u4} = F_{u5} / \text{sen } 54,32^\circ$	= 1171,95 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 3:	$F_{u7} = F_{u6} + F_{u4} \cdot \text{cos } 54,32^\circ$	= 1366,97 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 4:	$F_{u2} = F_{u1} + F_{u4} \cdot \text{cos } 54,32^\circ$	= 1366,97 kN

Las fuerzas máximas (puntal 2 y tensor 7) pueden verificarse mediante la expresión:

$$F_{u \text{ máx}} = M_{u \text{ máx}} / z = 952,00 \text{ kN} \cdot 1,4 \text{ m} / 0,975 \text{ m} = 1366,97 \text{ kN}$$

e) Dimensiones de puntales, tensores y zonas nodales



La Figura anterior muestra el aspecto final que presentan las zonas nodales, tensores y puntales. Seguidamente se analizan los criterios utilizados para definir la geometría de cada uno de estos elementos. A primera vista se aprecia que la zona nodal 4 ha sido subdividida en dos subzonas para poder resolver el problema de la concurrencia de más de tres fuerzas a un nodo (artículo CA.2.3).

En los puntos siguientes se irán definiendo las dimensiones de las zonas nodales y de los puntales y, simultáneamente se irá verificando su resistencia. Se supondrá que se dispone una armadura en forma de malla ortogonal en ambas caras del elemento estructural de modo que los puntales cuyo flujo tenga forma de botella puedan alcanzar su máxima resistencia, es decir (artículo A.3.2):

$$f_{ce} = \beta_s \cdot 0,85 \cdot f'_c = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 19,125 \text{ MPa}$$

En los puntales prismáticos se tendrá en cambio (artículo A.3.2):

$$f_{ce} = \beta_s \cdot 0,85 \cdot f'_c = 1,00 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 25,50 \text{ MPa}$$

En el modelo se presentan tres tipos de nodos asociados a las siguientes resistencias (artículo A.5.2):

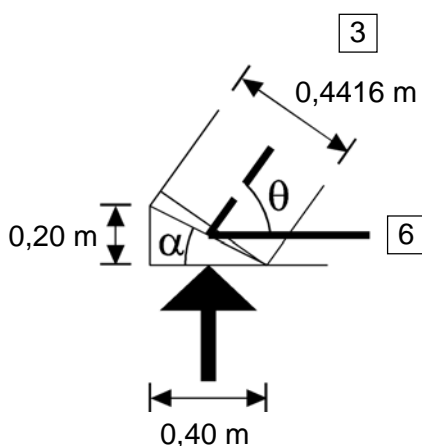
CCC:	$f_{ce} = \beta_n \cdot 0,85 \cdot f'_c = 1,00 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 25,50 \text{ MPa}$
CCT:	$f_{ce} = \beta_n \cdot 0,85 \cdot f'_c = 0,80 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 20,40 \text{ MPa}$
CTT:	$f_{ce} = \beta_n \cdot 0,85 \cdot f'_c = 0,60 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 15,30 \text{ MPa}$

En todos los casos debe verificarse: $F_u \leq \phi \cdot F_n$ (artículo A.2.6)

Para todos los elementos del reticulado, el factor de reducción de la resistencia será:

$$\phi = 0,75$$

e.1) Zona nodal 1 y puntal 3



$$\theta = \text{ángulo inclinación Puntal 3} = \text{atan}(0,975 \text{ m} / 0,70 \text{ m})$$

$$\theta = 54,32^\circ$$

$$\alpha = \text{atan}(0,20 \text{ m} / 0,40 \text{ m}) = 26,56^\circ$$

$$\text{hipot} = (0,40^2 \text{ m}^2 + 0,20^2 \text{ m}^2)^{1/2} = 0,4472 \text{ m}$$

$$\text{Ancho Puntal 3} = \text{hipot} \cdot \cos(90^\circ - \theta - \alpha) = 0,4416 \text{ m}$$

Para el Puntal 3:

$$F_{ns} = f_{ce} \cdot A_{cs}$$

$$F_{ns} = 0,4416 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 19125 \text{ kPa} = 2955,76 \text{ kN}$$

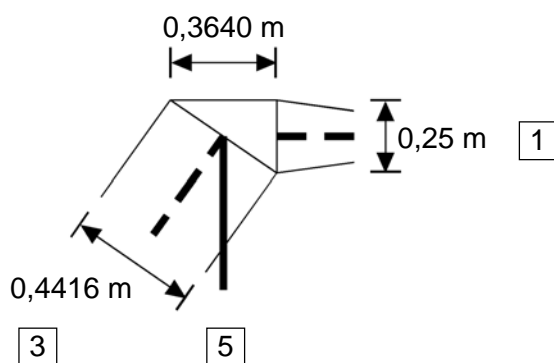
$$F_{u3} = 1171,95 \text{ kN} < \phi F_{ns} = 2216,82 \text{ kN}$$

Para la zona nodal 1 (tipo CCT):

- Por acción del puntal 3: Dado que las secciones transversales y el esfuerzo que se utilizan para la verificación son iguales y $\beta_s < \beta_n$ al verificar el Puntal 3 automáticamente verifica la cara de la zona nodal.
- Por acción de R: $F_u = 952 \text{ kN} < \phi \cdot \text{área placa apoyo} \cdot f_{ce} =$
 $= 0,75 \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 20400 \text{ kPa} =$
 $= 2142,00 \text{ kN}$
- Por acción del tensor 6: $F_{u6} = 683,49 \text{ kN} < 0,75 \cdot \text{ancho viga} \cdot 0,2 \text{ m} \cdot f_{ce} =$
 $= 1071 \text{ kN}$

e.2) Zona nodal 2 y puntal 1

Adoptando como datos las dimensiones de la hipotenusa (ancho Puntal 3) y del cateto menor (ancho máximo disponible Puntal 1) se obtiene, para el cateto mayor:



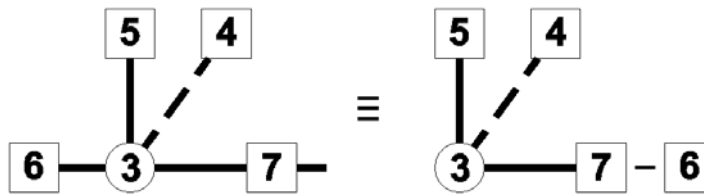
$$(0,4416^2 \text{ m}^2 - 0,25^2 \text{ m}^2)^{1/2} = 0,364 \text{ m}$$

Dado que el Puntal 3 mantiene su ancho constante y ha sido verificado en su encuentro con la Zona Nodal 1 no requiere una nueva verificación. El Puntal 1 por su parte se verificará en su encuentro con la Subzona Nodal 4B por presentar allí su menor ancho.

Zona nodal 2 (tipo CCT):

- Por acción del puntal 1: $F_{u1} = 683,49 \text{ kN} < \phi \cdot 0,25 \text{ m} \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce} =$
 $= 0,75 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 20400 \text{ kPa} =$
 $= 1338,75 \text{ kN}$
- Por acción del puntal 3: $F_{u3} = 1171,95 \text{ kN} < \phi \cdot 0,4416 \text{ m} \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce} =$
 $= 0,75 \cdot 0,4416 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 20400 \text{ kPa} =$
 $= 2364,77 \text{ kN}$
- Por acción del tensor 5: $F_{u5} = 952 \text{ kN} < \phi \cdot 0,3640 \text{ m} \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce} =$
 $= 0,75 \cdot 0,3640 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 20400 \text{ kPa} =$
 $= 1949,22 \text{ kN}$

e.3) Zona nodal 3 (tipo CTT):



Dado que sólo parte de la armadura del cordón inferior se anclará en esta zona nodal (aunque se continúe el 100% de la armadura hasta el apoyo y no se produzca un anclaje, la armadura sufrirá una variación importante de esfuerzo) y otra parte continuará hasta el apoyo (Zona Nodal 1), puede pensarse que en la Zona Nodal 3 sólo se efectúa una transferencia de esfuerzos entre tres elementos, el Puntal 4, el Tensor 5 y un tensor ficticio cuya fuerza es igual a la diferencia entre la de los tensores 7 y 6.

Dado que se trata de una zona a la que concurren dos o más tensores, es la que presenta menor resistencia “ f_{ce} ”.

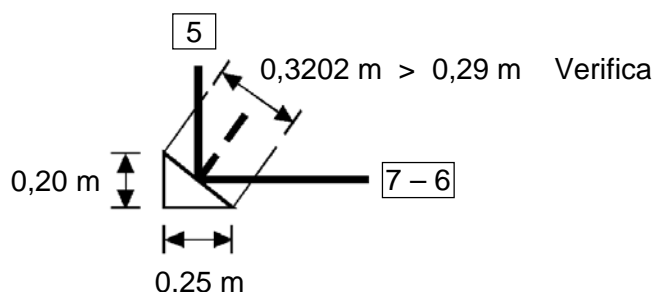
Despejaremos las dimensiones mínimas para esta zona nodal y, dado que es el elemento de menor resistencia del modelo, cualquier puntal que llegue a esta zona quedará automáticamente verificado si éste cumple con dichas dimensiones mínimas.

Cara enfrentada al puntal 4: $F_{u4} / (\phi \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce}) =$
 $= 1171,95 \text{ kN} / (0,75 \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 15300 \text{ kPa}) = 0,29 \text{ m}$

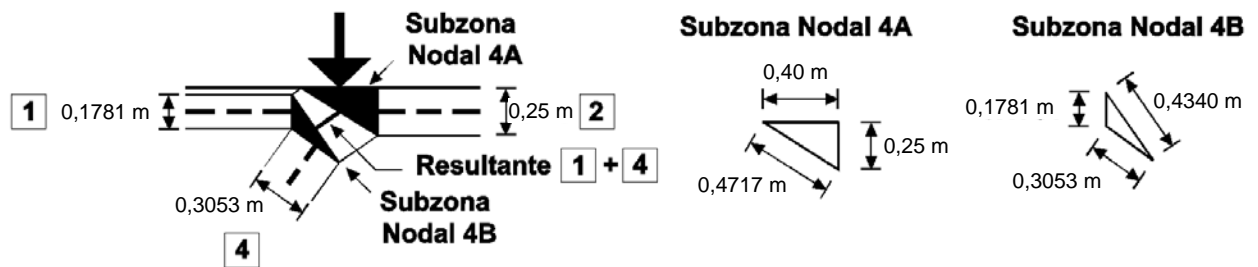
Cara enfrentada al tensor 5: $F_{u5} / (\phi \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce}) =$
 $= 952,00 \text{ kN} / (0,75 \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 15300 \text{ kPa}) = 0,24 \text{ m}$

Cara enfrentada al tensor 7-6: $(F_{u7} - F_{u6}) / (\phi \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce}) =$
 $= (1366,97 - 683,49) \text{ kN} / (0,75 \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 15300 \text{ kPa}) =$
 $= 0,17 \text{ m}$

Ya se ha adoptado un ancho de 0,20 m para la cara enfrentada a los tensores 6 y 7. Se fija ahora un valor de 0,25 m para la cara enfrentada al Tensor 5 con lo que queda totalmente definida la geometría de esta zona nodal.



e.4) Zona nodal 4 (tipo CCC):



A esta zona nodal concurren más de tres esfuerzos por lo que se reemplazan dos de ellos, el 1 y el 4, por su resultante de modo de obtener un caso ordinario de tres esfuerzos concurrentes. Para resolver dos de los esfuerzos en uno se recurre al uso de subzonas nodales. Los puntales 1 y 4 concurren a la Subzona Nodal 4B de la cual parte un puntal resultante hacia la Subzona Nodal 4A. La Subzona 4B se ha planteado como hidrostática de modo que todas sus caras son normales a los ejes de los puntales concurrentes y sobre todas ellas actúa la misma tensión normal. La Subzona 4A tiene su geometría definida a partir de que son conocidos sus catetos (el mayor corresponde a la dimensión de la placa de apoyo y el menor tiene el ancho adoptado para el Puntal 2).

e.4.1) Subzona nodal 4A

Al adoptar el ancho del Puntal 2 y estar definidas las dimensiones de la placa a través de la que se aplica la carga concentrada exterior este nudo tiene sus dimensiones definidas. Por tratarse de un nudo al que concurren tres puntales su resistencia es mayor o igual que la correspondiente a la de cada uno de los puntales por lo que, verificando la resistencia de los puntales queda automáticamente verificada la resistencia del nudo siendo necesario verificar solamente la cara en la que se aplica la carga exterior.

$$\begin{aligned} \text{Por acción de } V_u: \quad F_u &= 952 \text{ kN} < \phi \cdot \text{área placa apoyo} \cdot f_{ce} = \\ &= 0,75 \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 25500 \text{ kPa} = \\ &= 2677,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

La resultante de los puntales 1 y 4 vale:

$$\begin{aligned} F_{uh} &= \text{Componente horizontal} = F_{u1} + F_{u4} \cdot \cos 54,32^\circ \\ &= 683,49 \text{ kN} + 1171,95 \text{ kN} \cdot \cos 54,324^\circ = 1366,98 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$F_{uv} = \text{Componente vertical} = F_{u4} \cdot \sin 54,32^\circ = 1171,95 \text{ kN} \cdot \sin 54,324^\circ = 952,00 \text{ kN}$$

$$\text{Resultante 1-4} = (F_{uh}^2 + F_{uv}^2)^{1/2} = 1665,81 \text{ kN}$$

$$\theta_R = \text{ángulo de la resultante} = \text{atan}(F_{uv} / F_{uh}) = 34,854^\circ$$

$$\text{La hipotenusa de la Subzona Nodal 4A vale: hipot} = (0,25^2 \text{ m}^2 + 0,40^2 \text{ m}^2)^{1/2} = 0,4717 \text{ m}$$

El ancho del puntal resultante 1-4 se obtiene como:

$$\text{Ancho puntal 1-4} = \text{hipot} \cdot \cos(90^\circ - \theta_R - \alpha_A) = 0,434 \text{ m}$$

siendo: $\alpha_A = \text{atan}(0,25 \text{ m} / 0,40 \text{ m}) = 32^\circ$

Se está ahora en condiciones de verificar los puntales 2 y 1-4:

$$F_{u2} = 1366,98 \text{ kN} < \phi \cdot \text{ancho puntal} \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce} = \\ = 0,75 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 25500 \text{ kPa} = 1673,44 \text{ kN}$$

$$F_{u1-4} = 1665,81 \text{ kN} < \phi \cdot \text{ancho puntal} \cdot \text{ancho viga} \cdot f_{ce} = \\ = 0,75 \cdot 0,434 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 19125 \text{ kPa} = 2178,82 \text{ kN}$$

e.4.2) Subzona nodal 4B

Dado que se ha definido “a priori” que se trata de una zona hidrostática se puede calcular el ancho correspondiente a los puntales 1 y 4 a partir de igualar las tensiones normales sobre el nudo:

$$\sigma_{1-4} = \text{Tensión correspondiente al puntal 1-4} = F_{u1-4} / (\text{ancho puntal} \cdot \text{ancho viga}) = \\ = 1665,81 \text{ kN} / (0,434 \text{ m} \cdot 0,35 \text{ m}) =$$

$$\sigma_{1-4} = 10966,49 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Ancho puntal 1} = F_{u1} / (\sigma_{1-4} \cdot \text{ancho viga}) = \\ = 683,49 \text{ kN} / (\sigma_{1-4} \cdot 0,35 \text{ m}) = 0,178 \text{ m} (*)$$

$$\text{Ancho puntal 4} = F_{u4} / (\sigma_{1-4} \cdot \text{ancho viga}) = \\ = 1171,95 \text{ kN} / (\sigma_{1-4} \cdot 0,35 \text{ m}) = 0,305 \text{ m}$$

(*) Puede discutirse si este puntal tiene forma de “botella” por lo que su seguridad, si fuera prismático, sería aún mayor.

Como se trata de una zona nodal tipo “CCC”, al verificar la resistencia de los puntales la resistencia del nodo queda automáticamente verificada. Por otra parte, dado que los puntales presentan una tensión igual a la del puntal 1-4 y éste ya ha sido verificado, la verificación de estos puntales resulta innecesaria.

f) Armaduras

f.1) Secciones necesarias para los tensores

Las áreas necesarias de armadura se despejan de la expresión: $F_u \leq \phi \cdot F_{nt} = 0,75 \cdot A_{ts} \cdot f_y$

Elemento	F_u [kN]	A_{ts} necesaria [mm ²]	(A_{ts} necesaria) [cm ²]
Tensor 5	952,00	3022	(30,22)
Tensor 6	683,49	2170	(21,70)
Tensor 7	1366,97	4340	(43,40)

f.2) Tensor 5

Es posible pensar que el ancho de distribución de las armaduras correspondientes a este tipo de tensores (la barra 5 es muy similar a las barras representativas de los estribos en el reticulado de Ritter–Mörsch) sea igual a: $z \cdot \cotg \theta$

En este caso se tiene: $z = 0,975 \text{ m}$ y $\theta = 54,32^\circ$ por lo que el ancho anterior resulta igual a $0,70 \text{ m}$. La armadura necesaria resulta entonces igual a:

$$3022 \text{ mm}^2 / 0,70 \text{ m} = 4317 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (43,17 \text{ cm}^2/\text{m})$$

Se utilizará un estribo en dos ramas con una separación que no deberá superar a (artículo 11.8.4):

$$\text{mínimo } (d/5 ; 0,30 \text{ m}) = \text{mínimo } (1,10 \text{ m} / 5 ; 0,30 \text{ m}) = 0,22 \text{ m}$$

$$\text{Se adopta un estribo: } d_b16 \text{ c} / 0,09 \text{ m} = 2 \cdot 201 \text{ mm}^2 / 0,09 \text{ m} = 4467 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (44,67 \text{ cm}^2/\text{m})$$

f.3) Tensor 7

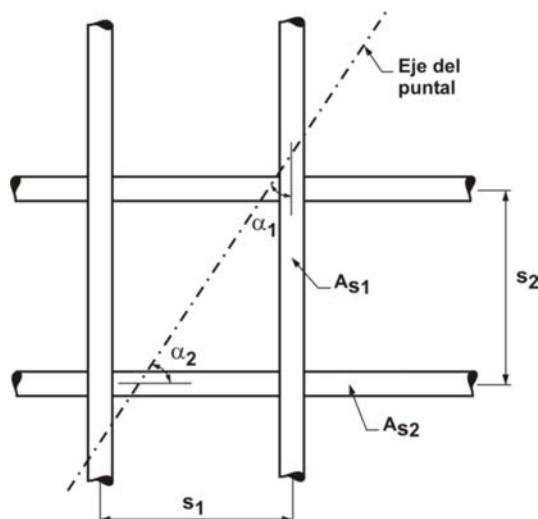
Tal como se ha visto, la armadura necesaria para este tensor es 4340 mm^2 ($43,40 \text{ cm}^2$). Se adopta: $8 d_b25 + 2 d_b16 = 8 \cdot 491 \text{ mm}^2 + 2 \cdot 201 \text{ mm}^2 = 4330 \text{ mm}^2$ ($43,30 \text{ cm}^2$)

f.4) Tensor 6

La armadura necesaria es de 2170 mm^2 ($21,70 \text{ cm}^2$). El armado de este tensor admite varias estrategias. Una de ellas consiste en utilizar la mínima cantidad de armadura necesaria. En ese caso podrían continuarse $4 d_b25 + 2 d_b16 = 2366 \text{ mm}^2$ ($23,66 \text{ cm}^2$) de la armadura correspondiente al Tensor 7. Otra estrategia podría consistir en continuar el 100% de la armadura del Tensor 7 hasta el apoyo de modo de disminuir la longitud de anclaje necesaria. Se volverá sobre el tema al estudiar el detalle de los anclajes.

f.5) Armadura necesaria para los puntales con forma de botella

Se dispondrá una armadura en forma de parrillas ortogonales en ambas caras.



Se adopta la siguiente relación entre armaduras verticales y horizontales:

$$\sum \frac{A_{s1}}{b_s \cdot s_1} \cdot \text{sen } \alpha_1 \geq 0,0018$$

$$\sum \frac{A_{s2}}{b_s \cdot s_2} \cdot \text{sen } \alpha_2 \geq 0,0012$$

De modo que se verifica la cuantía mínima total de: (artículo A.3.3.1)

$$\sum \frac{A_{si}}{b_s \cdot s_i} \cdot \text{sen } \alpha_i \geq 0,003$$

Asimismo se tiene que: $b_s = 0,35 \text{ m} = 350 \text{ mm}$; $\alpha_1 = 35,68^\circ$; $\alpha_2 = 54,32^\circ$

Por lo que resulta:

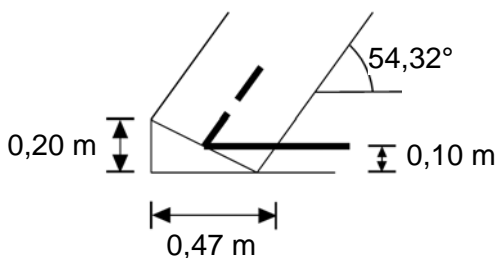
$$A_{s1} / s_1 = 0,0018 \cdot 350 \text{ mm} \cdot (1000 \text{ mm/m}) / \text{sen } 35,68^\circ = 1080 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (10,80 \text{ cm}^2/\text{m})$$

$$A_{s2} / s_2 = 0,0012 \cdot 350 \text{ mm} \cdot (1000 \text{ mm/m}) / \text{sen } 54,32^\circ = 517 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (5,17 \text{ cm}^2/\text{m})$$

En cada cara se dispondrá una armadura vertical $d_b 12 \text{ c} / 0,20 \text{ m}$ ($2 \cdot 113 \text{ mm}^2 / 0,20 \text{ m} = 1130 \text{ mm}^2/\text{m} = 11,30 \text{ cm}^2/\text{m}$) y una horizontal $d_b 8 \text{ c} / 0,19 \text{ m}$ ($2 \cdot 50,3 \text{ mm}^2 / 0,19 \text{ m} = 529 \text{ mm}^2/\text{m} = 5,29 \text{ cm}^2/\text{m}$). Las separaciones han sido adoptadas en función de lo visto en f.2.

g) Anclajes

g.1) Tensor 6 en zona nodal 1



Tal como se aprecia en la figura, la zona nodal extendida dispone de una longitud de 0,47 m para acomodar la longitud de anclaje.

Se prevé anclar con ganchos normales que tengan un recubrimiento de 0,05 m sobre la prolongación de la barra más allá del gancho. Lo anterior permite que, para las barras de 25 mm de diámetro se tenga una longitud de anclaje de: (artículo 12.5.2 y 12.5.3)

$$\ell_{dh \text{ necesario}} = 0,70 \cdot 0,24 \cdot 0,025 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa} / (30 \text{ MPa})^{1/2} = 0,32 \text{ m}$$

$$\ell_{dh \text{ disponible}} = 0,40 \text{ m} + (0,10 \text{ m} / \tan 54,32^\circ) - 0,05 \text{ m} = 0,47 \text{ m} - 0,05 \text{ m} = 0,42 \text{ m}$$

por lo que la geometría general de la zona nodal extendida resulta apta.

El diámetro del mandril de doblado para las barras será (artículo 7.2.1):

$$\text{Barras de 16 mm: } 6 \cdot d_b 16 = 96 \text{ mm}$$

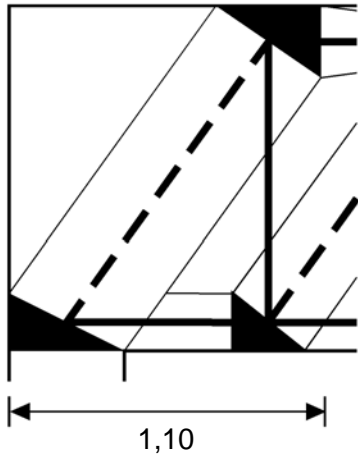
$$\text{Barras de 25 mm: } 8 \cdot d_b 25 = 200 \text{ mm}$$

y las prolongaciones rectas de los ganchos normales serán (artículo 7.1.2):

$$\text{Barras de 16 mm: } 12 \cdot d_b 16 = 192 \text{ mm}$$

$$\text{Barras de 25 mm: } 12 \cdot d_b 25 = 300 \text{ mm}$$

g.2) Tensor 7 en zona nodal 3



A partir de la Zona Nodal 3 dejarían de ser necesarias dos de las barras de 25 mm de diámetro. Suponiendo un anclaje recto se tendrá (artículo 12.2.2):

$$l_d = \frac{3 \cdot f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda}{5 \cdot \sqrt{f'_c}} \cdot d_b$$

$$l_{d \text{ necesario}} = 3 \cdot 420 \text{ MPa} \cdot 0,025 \text{ m} / [5 \cdot (30)^{1/2} \text{ MPa}] = 1,15 \text{ m}$$

La longitud disponible resulta igual a:

$$l_{d \text{ disponible}} = 0,20 \text{ m} + 0,70 \text{ m} + 0,25 \text{ m} / 2 + 0,10 \text{ m} / \tan 54,32^\circ - 0,05 \text{ m} =$$

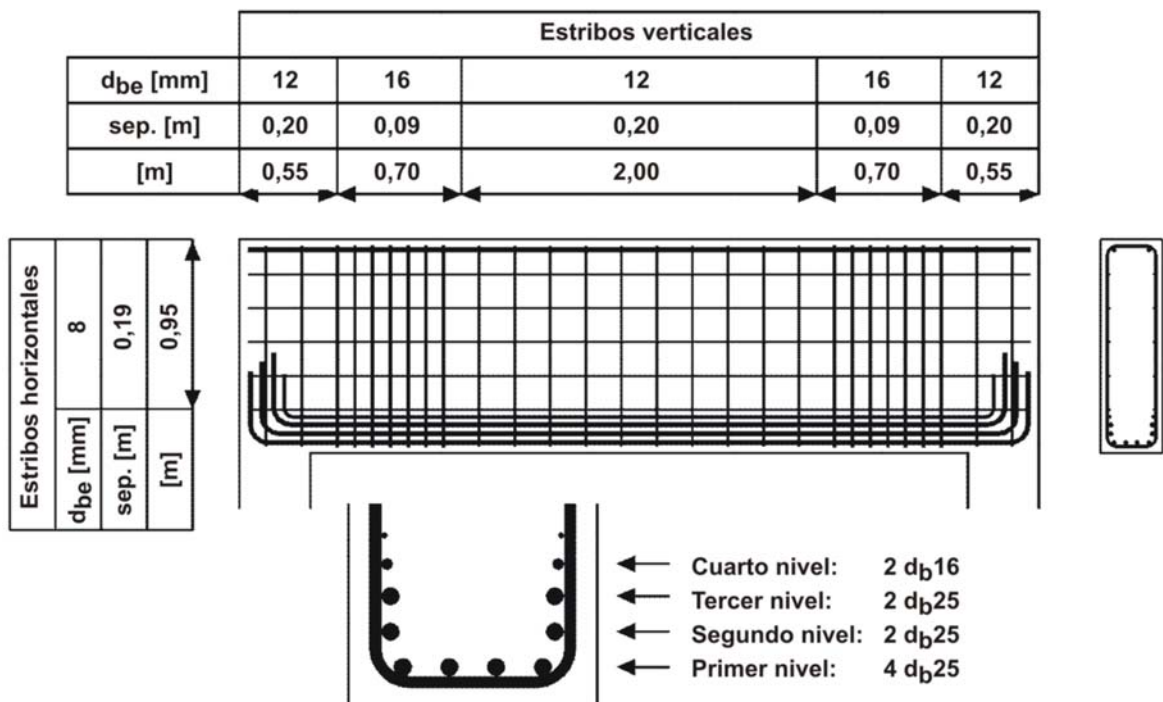
$$l_{d \text{ disponible}} = 1,097 \text{ m} - 0,05 \text{ m} = 1,05 \text{ m}$$

Lo anterior indica que las barras no pueden anclarse rectas. Del lado seguro se realizará un anclaje con ganchos normales.

g.3) Tensor 5

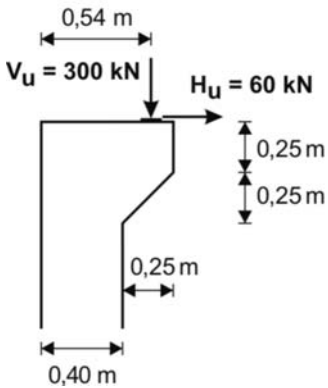
Se utilizan estribos conformados por barras de 16 mm de diámetro. Para este caso se pueden utilizar ganchos a 90° con una prolongación recta igual al diámetro del mandril de doblado e iguales a $6 d_{be} = 96 \text{ mm}$ (artículo 7.1.3).

h) Esquema general de armaduras



Ejemplo 13.II

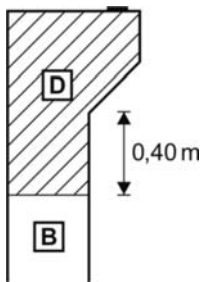
Enunciado: Calcular y adoptar las armaduras de la columna y la ménsula de la figura y verificar su aptitud general para resistir las cargas indicadas. Ambas tienen un espesor de 0,35 metros.



Materiales: - Hormigón: H-30 ($f'_c = 30 \text{ MPa}$)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

Cargas: - Peso propio: Su efecto se ha incluido en las cargas concentradas.
 - Placa de apoyo: 0,10 m \times 0,35 m (espesor de la columna y de la ménsula). Altura de la placa: 0,02 m

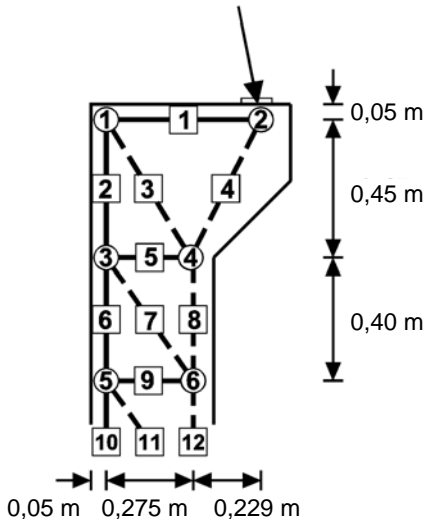
Resolución:



a) Identificación de las zonas "B" y "D"

En la figura se ha dividido la zona superior de la estructura en una zona "D" que incluye la ménsula y parte de la columna y una zona "B" representativa del fuste de la columna.

b) Elección del modelo y cálculo de las fuerzas actuantes en las fronteras de las zonas "D"



Como es usual en este tipo de elementos, el modelo a adoptar admite múltiples variantes. Se ha elegido un modelo particularmente sencillo (enseguida se verá que aún así su resolución es bastante laboriosa) para no alargar exageradamente el desarrollo dando prioridad a la presentación y comentario de algunos puntos que no aparecieron en el Ejemplo 13.I.

La reacción vertical en el nudo 6 resulta de particular interés para comenzar a fijar las dimensiones del modelo. Asimismo se adopta una distancia de 0,05 m entre el eje de los tensores 1, 2 y 6 y el filo externo del hormigón.

Calcularemos la profundidad del eje neutro de tensiones "a" necesaria para resistir el momento flector a nivel del Nudo 6 suponiendo que se trata de un caso de flexión compuesta con gran excentricidad y tomando momentos respecto a la armadura traccionada cuya posición está dada por el Nudo 5.

$$M_u = V_u \cdot (0,54 \text{ m} - 0,05 \text{ m}) + H_u \cdot (0,02 \text{ m} + 0,50 \text{ m} + 0,40 \text{ m}) =$$

$$= 300 \text{ kN} \cdot 0,49 \text{ m} + 60 \text{ kN} \cdot 0,92 \text{ m} = 202,20 \text{ kNm}$$

$$M_u = \phi \cdot M_n = 0,75 \cdot M_n \Rightarrow M_n = 202,20 \text{ kNm} / 0,75 = 269,6 \text{ kNm}$$

↑ Valor correspondiente a modelos de bielas

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2)$$

$$m_n = 269,6 \text{ kNm} / ((0,80) \cdot 0,85 \cdot 30000 \text{ kPa} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot (0,35 \text{ m})^2) = 0,30824$$

↑ Valor correspondiente a un nudo tipo CCT

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 0,38071 \Rightarrow a = k_a \cdot d = k_a \cdot 0,35 \text{ m} = 0,133 \text{ m}$$

Se adopta: $a = 0,15 \text{ m}$

c) Esfuerzos en los puntales y tensores

NOTA: Las operaciones están efectuadas con más decimales que los mostrados

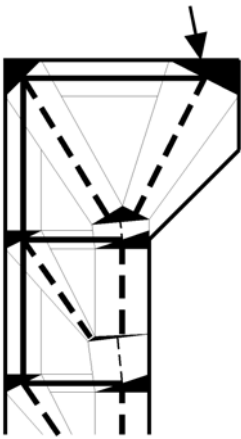
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 2:	$F_{u4} = V_u / \text{sen } 63,03^\circ$	= 336,61 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 2:	$F_{u1} = F_{u4} \cdot \text{cos } 63,03^\circ + H_u$	= 212,67 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 1:	$F_{u3} = F_{u1} / \text{cos } 58,57^\circ$	= 407,84 kN
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 1:	$F_{u2} = F_{u3} \cdot \text{sen } 58,57^\circ$	= 348,00 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 4:	$F_{u5} = H_u$	= 60,00 kN
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 4:	$F_{u8} = F_{u3} \cdot \text{sen } 58,57^\circ + F_{u4} \cdot \text{sen } 63,03^\circ$	=
	$F_{u8} =$	= 648,00 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 3:	$F_{u7} = F_{u5} / \text{cos } 55,49^\circ$	= 105,91 kN
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 3:	$F_{u6} = F_{u2} + F_{u7} \cdot \text{sen } 55,49^\circ$	= 435,27 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 6:	$F_{u9} = H_u$	= 60,00 kN
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 6:	$F_{u12} = F_{u7} \cdot \text{sen } 55,49^\circ + F_{u8}$	= 735,27 kN
Equilibrio de fuerzas horizontales en Nodo 5:	$F_{u11} = F_{u9} / \text{cos } 55,49^\circ$	= 105,91 kN
Equilibrio de fuerzas verticales en Nodo 5:	$F_{u10} = F_{u6} + F_{u11} \cdot \text{sen } 55,49^\circ$	= 522,54 kN

Dado que luego serán de utilidad, se calculan las resultantes de los puntales 3 y 4 y de los puntales 7 y 8:

$$\begin{aligned} \text{Componente horizontal de } F_{u3-4} &= F_{u3} \cdot \text{cos } 58,57^\circ - F_{u4} \cdot \text{cos } 63,03^\circ = 60,00 \text{ kN} \\ \text{Componente vertical de } F_{u3-4} &= F_{u3} \cdot \text{sen } 58,57^\circ + F_{u4} \cdot \text{sen } 63,03^\circ = 648,00 \text{ kN} \\ F_{u3-4} &= 650,77 \text{ kN} \\ \text{Ángulo de } F_{u3-4} &= \text{atan}(648 \text{ kN} / 60 \text{ kN}) = 84,71^\circ \end{aligned}$$

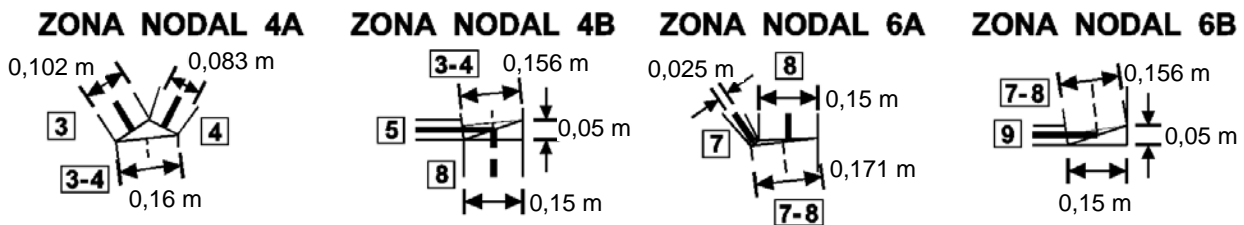
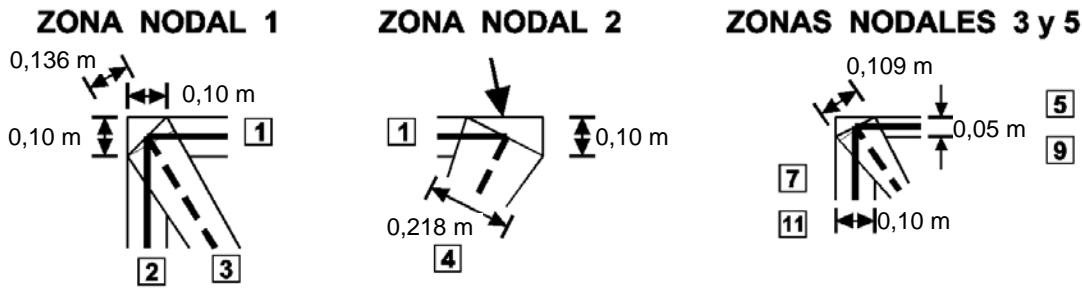
$$\begin{aligned} \text{Componente horizontal de } F_{u7-8} &= F_{u7} \cdot \text{cos } 55,49^\circ = 60,00 \text{ kN} \\ \text{Componente vertical de } F_{u7-8} &= F_{u7} \cdot \text{sen } 55,49^\circ + F_{u8} \cdot \text{sen } 90^\circ = 735,27 \text{ kN} \\ F_{u7-8} &= 737,72 \text{ kN} \\ \text{Ángulo de } F_{u7-8} &= \text{atan}(735,27 \text{ kN} / 60 \text{ kN}) = 85,33^\circ \end{aligned}$$

d) Dimensiones de puntales, tensores y zonas nodales



A los nodos 4 y 6 concurren más de tres esfuerzos por lo que se recurre a su subdivisión en zonas nodales de modo de trabajar siempre con no más de tres esfuerzos concurrentes. Por lo general, en el caso de subdivisión, los subnodos resultantes son hidrostáticos. En este caso se ha utilizado una solución menos restrictiva en la que uno solo de los subnodos se ha proyectado como hidrostático a fin de facilitar su construcción geométrica. Cabe comentar que este tipo de elementos sólo puede resolverse en tiempos razonables utilizando algún programa de dibujo asistido por computadora (CAD) que agilice las inevitables iteraciones que, por brevedad, se han omitido en los ejemplos y programas elementales de cálculo de estructuras que permitan obtener rápidamente los

esfuerzos en las barras y efectuar correcciones en la geometría en forma muy rápida. Sólo así se pueden hacer en un tiempo razonable los ajustes geométricos necesarios para llegar a un modelo relativamente ajustado.



En las figuras anteriores se han volcado las geometrías acotadas de los diferentes nudos. Las dimensiones han sido medidas directamente sobre los dibujos realizados mediante un programa CAD.

e) Verificación de las zonas nodales

En el modelo se presentan tres tipos de nodos asociados a las siguientes resistencias:

- CCC:** $f_{ce} = \beta_n \cdot 0,85 \cdot f'_c = 1,00 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 25,50 \text{ MPa}$
- CCT:** $f_{ce} = \beta_n \cdot 0,85 \cdot f'_c = 0,80 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 20,40 \text{ MPa}$
- TTC:** $f_{ce} = \beta_n \cdot 0,85 \cdot f'_c = 0,60 \cdot 0,85 \cdot 30 \text{ MPa} = 15,30 \text{ MPa}$

Nodo		f _{ce} [MPa]	Acción		F _u [kN]	Ancho [m]	F _n [kN]	φ · F _n [kN]	Verifica?	(φ · F _n)/F _u
#	Tipo		Tipo	#						
1	TTC	15,3	T	1	212,67	0,100	535,50	401,63	Si	1,89
			T	2	348,00	0,100	535,50	401,63	Si	1,15
			C	3	407,84	0,136	728,28	546,21	Si	1,34
2	CCT	20,4	T	1	212,67	0,100	714,00	535,50	Si	2,52
			Carga	V _u	300,00	0,100	714,00	535,50	Si	1,79
			C	4	336,61	0,218	1556,52	1167,39	Si	3,47
3	TTC	15,3	T	6-2	87,27	0,100	535,50	401,63	Si	4,60
			T	5	60,00	0,050	267,75	200,81	Si	3,35
			C	7	105,91	0,109	583,70	437,77	Si	4,13
4A	CCC	25,5	C	3	407,84	0,102	910,35	682,76	Si	1,67
			C	4	336,61	0,083	740,78	555,58	Si	1,65
			C	3-4	650,77	0,160	1428,00	1071,00	Si	1,65
4B	CCT	20,4	C	3-4	650,77	0,156	1113,84	835,38	Si	1,28
			T	5	60,00	0,050	357,00	267,75	Si	4,46
			C	8	648,00	0,150	1071,00	803,25	Si	1,24
5	TTC	15,3	T	10-6	87,27	0,100	535,50	401,63	Si	4,60
			T	9	60,00	0,050	267,75	200,81	Si	3,35
			C	11	105,91	0,109	583,70	437,77	Si	4,13
6A	CCC	25,5	C	7	105,91	0,025	223,13	167,34	Si	1,58
			C	8	648,00	0,150	1338,75	1004,06	Si	1,55
			C	7-8	737,72	0,171	1526,18	1144,63	Si	1,55
6B	CCT	20,4	C	7-8	737,72	0,156	1113,84	835,38	Si	1,13
			T	9	60,00	0,050	357,00	267,75	Si	4,46
			C	12	735,27	0,150	1071,00	803,25	Si	1,09

Como puede apreciarse, las menores seguridades se presentan para el encuentro del Puntal 12 con la Zona Nodal 6B y del Tensor 2 con la Zona Nodal 1. En un modelo adecuadamente proporcionado esto es lo que suele suceder, es decir que, desde el punto de vista de los nudos y de los puntales, suele resultar suficiente verificar solamente las zonas donde se aplican las cargas concentradas exteriores o de frontera y los puntales más solicitados correspondientes a cada una de las resistencias que se puedan presentar de acuerdo al tipo de puntal y a la armadura transversal dispuesta.

f) Verificación de los puntales

Para evitar disponer una armadura horizontal fuerte en la zona de columna que se encuentra por fuera de la altura de la ménsula corta no se intentará aprovechar al máximo la resistencia de los puntales con forma de botella que se encuentren por debajo de la ménsula. Para estos elementos se adoptará $\beta_s = 0,60$ en lugar de 0,75.

Puntal	Forma	β_s	F_u [kN]	Ancho [m]	F_n [kN]	$\phi \cdot F_n$ [kN]	Verifica	$(\phi \cdot F_n)/F_u$
3	Botella	0,75	407,84	0,102	682,763	512,07	Si	1,26
4	Botella	0,75	336,61	0,083	555,581	416,69	Si	1,24
3-4	Abanico	1,00	650,77	0,156	1392,3	1044,2	Si	1,60
7	Botella	0,60	105,91	0,025	133,875	100,41	No	0,95
8	Prisma	1,00	648,00	0,15	1338,75	1004,1	Si	1,55
7-8	Abanico	1,00	737,72	0,156	1392,3	1044,2	Si	1,42
11	Botella	0,60	105,91	0,025	133,875	100,41	No	0,95
12	Prisma	1,00	735,27	0,15	1338,75	1004,1	Si	1,37

Como puede apreciarse, los puntales 7 y 11 sugieren la necesidad de realizar un ligero ajuste en el modelo el cual es posible porque los puntales y zonas nodales adyacentes presentan reservas de seguridad suficientes como para modificar sus dimensiones. Dado que la diferencia existente es muy pequeña y las modificaciones no alterarán las fuerzas en los tensores, se consideran válidos los resultados generales y se continúa con el cálculo.

Por otra parte, dado que la ménsula se encuentra en el extremo de una columna que llevará armadura vertical en todas sus caras, las dimensiones de los puntales 8 y 12 podrían haberse disminuido bastante teniendo en cuenta la presencia de dichas armaduras.

g) Armaduras

g.1) Secciones necesarias para los tensores

Las áreas necesarias de armadura se despejan de la expresión: $F_u \leq \phi \cdot F_{nt} = 0,75 \cdot A_{ts} \cdot f_y$

Tensor	F_u [kN]	A_{ts} necesaria [mm ²]	(A_{ts} necesaria) [cm ²]
1	212,67	675	(6,75)
2	348,00	1105	(11,05)
5	60,00	190	(1,90)
6	435,27	1382	(13,82)
9	60,00	190	(1,90)
10	522,54	1659	(16,59)

g.2) Tensor 1

Para poder doblar adecuadamente las armaduras en el extremo de la ménsula se adopta una armadura $6 d_b12 = 678 \text{ mm}^2$ (6,78 cm²)

g.3) Tensor 10

Tal como se ha visto, la armadura necesaria para este tensor es 1659 mm^2 (16,59 cm²).

Se adopta: $3 d_b25 + 2 d_b12 = 3 \cdot 491 \text{ mm}^2 + 2 \cdot 113 \text{ mm}^2 = 1699 \text{ mm}^2$ (16,99 cm²)

Esta armadura se dispondrá constante a lo largo de los tensores 2 y 6 para anclarse finalmente en la Zona Nodal 1.

g.4) Tensores 5 y 9

La armadura necesaria en cada uno de ellos es 190 mm^2 ($1,90 \text{ cm}^2$).

Con el criterio visto en el Ejemplo 13.I se podría pensar en distribuir esta armadura en una zona de longitud igual a: $z \cdot \cotg \theta$

En este caso se tiene: $z = 0,275 \text{ m}$ y $\theta = 34,51^\circ$ por lo que resulta una longitud igual a $0,40 \text{ m}$. La armadura necesaria será entonces igual a:

$$190 \text{ mm}^2 / 0,40 \text{ m} = 475 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (4,75 \text{ cm}^2/\text{m})$$

Mirando a la pieza en su conjunto se observa que la misma no debería llevar un estribo menor al correspondiente a una columna ni menor al correspondiente al mínimo de corte (en principio, el cálculo ajustado al corte debería conducir a una armadura menor que la calculada por modelos de bielas pues estos últimos no consideran ninguna colaboración del hormigón en la resistencia al corte aunque en algún caso particular la situación podría invertirse si se utilizaran ángulos muy inferiores a 45°).

Como columna:

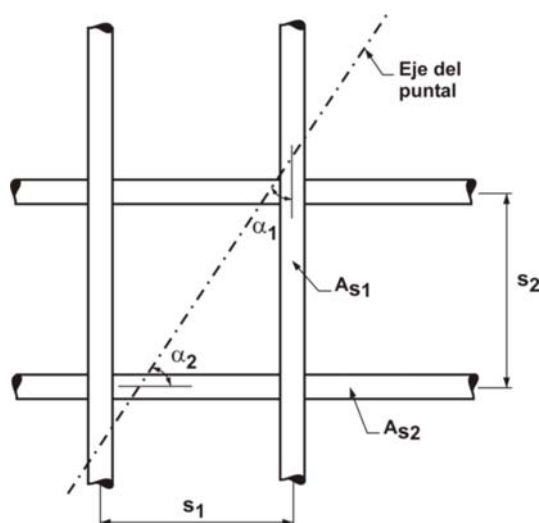
- Diámetro mínimo del estribo: $d_{be} = 8 \text{ mm}$
- Separación máxima del estribo: $s = 0,14 \text{ m}$
- Área estribo mínimo: $2 \cdot 50,3 \text{ mm}^2 / 0,14 \text{ m} = 719 \text{ mm}^2/\text{m}$

Mínimo Corte: Para $f'_c = 30 \text{ MPa}$ corresponde:
 $(A_v/s)_{\min} = (f'_c)^{1/2} \cdot b_w / (16 \cdot f_{yt}) = 285 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (2,85 \text{ cm}^2/\text{m})$

Se adopta por lo tanto el estribo mínimo de columna.

g.5) Armadura necesaria para los puntales con forma de botella

Se dispondrá una armadura en forma de estribos horizontales en ambas caras por lo que $A_{s1} = 0 \text{ mm}^2$. Tal como se ha mencionado antes, esta armadura se dispondrá solamente para confinar los puntales 3 y 4 por lo que al utilizar la expresión



$$\sum \frac{A_{s2}}{b_s \cdot s_2} \cdot \text{sen } \alpha_2 \geq 0,003$$

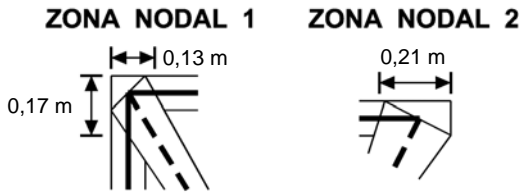
corresponde adoptar el menor de los ángulos entre puntal y armadura horizontal que, por una diferencia bastante pequeña, corresponde al Puntal 3 con $58,57^\circ$ por lo que resulta entonces para un ancho de $0,35 \text{ m}$ (350 mm):

$$A_{s2} / s_2 = 0,003 \cdot 350 \text{ mm} \cdot (1000 \text{ mm}/\text{m}) / \text{sen } 58,57^\circ$$

$$A_{s2} / s_2 = 1230 \text{ mm}^2/\text{m} \quad (12,3 \text{ cm}^2/\text{m})$$

Se adoptan estribos horizontales de dos ramas $d_b10 c / 0,12 m$ ($1308 mm^2/m$)

h) Anclajes



Los únicos puntos conflictivos que presenta este ejemplo se dan en los anclajes de los tensores 1 y 2. En las figuras se han representado las distancias entre los límites de las Zonas Nodales extendidas y los filos de la sección de hormigón necesarios para poder calcular luego las longitudes de anclaje disponibles.

Al determinar las necesidades en términos de longitudes de anclaje se observará que los espacios disponibles no alcanzan para alojar anclajes con ganchos normales por lo que habrá que recurrir a extender las barras con anclajes rectos más allá de las zonas nodales. Para no alargar innecesariamente el ejemplo no se entra en detalles al respecto comentando solamente que las barras del Tensor 2 al extenderse horizontalmente estarán en una zona de mala adherencia mientras que las barras del Tensor 1 al anclarse en un recorrido vertical estarán en una zona de buena adherencia.

En la figura siguiente se muestra solamente dos posiciones, 1 y 2, correspondientes respectivamente al Tensor 1 y a la armadura dispuesta para aumentar la resistencia de los puntales 3 y 4.

