

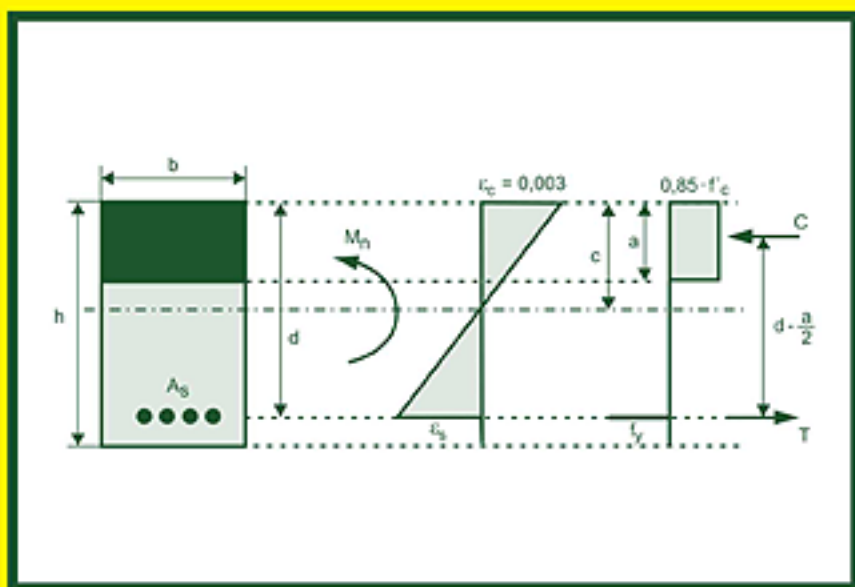
INTI

Instituto Nacional de
Tecnología Industrial



CIRSOC

Centro de Investigación de los
Reglamentos Nacionales de
Seguridad para las Obras Civiles



***EJEMPLOS DE APLICACIÓN
DEL REGLAMENTO ARGENTINO
DE ESTRUCTURAS DE
HORMIGÓN***

Agosto 2005

*En trámite de
aprobación*

***EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL
REGLAMENTO ARGENTINO DE
ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN***

CIRSOC 201

Ing. Victorio Hernández Balat

Ing. Juan Francisco Bissio

Ing. Daniel Alberto Ortega

EDICIÓN AGOSTO 2005

INDICE

1.-	COMBINACIÓN Y MAYORACIÓN DE ACCIONES	
1.1.-	Requerimientos básicos de resistencia	1
1.2.-	Resistencia requerida	1
1.2.1.-	Resumen del Reglamento CIRSOC 201-2005	1
1.2.2.-	Simplificaciones	2
1.3.-	Procedimientos para el cálculo de la resistencia requerida	3
1.3.1.-	Cálculo de solicitaciones en vigas y losas armadas en una dirección mediante los coeficientes dados en 8.3.3 del CIRSOC 201-2005	3
1.3.2.-	Cálculo de sistemas de losas mediante:	3
1.3.2.1.-	Método directo	3
1.3.2.2.-	Método del pórtico equivalente	3
1.3.3.-	Caso general	3
Ejemplo 1.I		5
	Calcular la resistencia requerida en la sección de encuentro del fuste del tanque elevado con la base de fundación.	
Ejemplo 1.II		6
	Calcular la carga uniforme total mayorada q_u [kN/m ²], a utilizar en el cálculo de la losa armada en 2 direcciones.	
2.-	FLEXIÓN SIMPLE	
2.1.-	Generalidades	7
2.2.-	Secciones rectangulares	8
2.2.1.-	Ecuaciones generales de equilibrio	8
2.2.2.-	Cuantías límites	9
2.2.3.-	Cálculo de armaduras	9
2.3.-	Secciones con alas (“T” y “L”)	10
2.3.1.-	Geometrías	10
2.3.1.1.-	Para Vigas “T” bajo losa	11
2.3.1.2.-	Para Vigas “L” bajo losa	11
2.3.1.3.-	Para Vigas “T” aisladas	11
2.3.2.-	Alturas relativas entre alas y alma	11
2.3.3.-	Cuantías límites	11
2.3.4.-	Cálculo de armaduras	12
	Tabla Auxiliar N°1 – Cálculo de secciones rectangulares y con alas	15
2.I.-	Ejemplos - Sección Rectangular	
Ejemplo 2.I.1		17
	Calcular las armaduras de una sección rectangular dado los materiales, la sección transversal y la solicitación.	

Ejemplo 2.I.2	Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 16$ kNm	18
Ejemplo 2.I.3	Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 100$ kNm. De ser necesaria armadura comprimida se supondrá que la distancia de la fibra más comprimida de hormigón al centro de gravedad de la armadura comprimida es $d' = 0,03$ m.	19
Ejemplo 2.I.4	Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 100$ kNm. Se tratará de evitar el uso de armadura comprimida.	21
Ejemplo 2.I.5	Calcular las armaduras, constituidas por mallas soldadas de alambres conformados, de una sección rectangular perteneciente a una losa armada en una dirección dado los materiales, la sección transversal y la sollicitación.	23
Ejemplo 2.I.6	Calcular M_u de la viga rectangular dado los materiales y la sección transversal. La armadura longitudinal está compuesta por $A_s = 2 d_b 16$ y $A'_s = 0$.	25
Ejemplo 2.I.7	Calcular M_u de la viga rectangular dado los materiales y la sección transversal. La armadura longitudinal está compuesta por $A_s = 2 d_b 16$ y $A'_s = 2 d_b 16$.	27
Ejemplo 2.I.8	Calcular la altura total de una viga rectangular de modo de obtener máxima rigidez sin que la misma resulte sobredimensionada en flexión.	29
Ejemplo 2.I.9	Por requerimientos arquitectónicos se debe proyectar una viga rectangular de modo de obtener la menor altura posible. Como condición adicional no se recurrirá al uso de armadura de compresión.	31
2.II.- Ejemplos - Secciones con Alas		
Ejemplo 2.II.1	Calcular las armaduras de una viga "T" bajo losa dado los materiales, la sección transversal y la sollicitación.	34
Ejemplo 2.II.2	Calcular las armaduras de la viga "T" del Ejemplo 2.II.1 para $M_u = 20$ kNm.	36
Ejemplo 2.II.3	Calcular las armaduras de una viga "L" bajo losa dado los materiales, la sección transversal y la sollicitación.	38
Ejemplo 2.II.4	Dimensionar las armaduras de flexión de una viga "T" aislada dado los materiales, la sección transversal y la sollicitación.	42

3.-	CORTE	
3.1.-	Generalidades	45
3.2.-	Expresión general de cálculo y verificación	45
3.3.-	Determinación de V_c	46
3.3.1.-	Cuando no existan fuerzas axiales	46
3.3.2.-	Cuando existan fuerzas axiales de compresión (no pretensado)	46
3.3.3.-	Cuando existan cargas axiales de tracción	47
3.4.-	Determinación de V_s	47
3.4.1.-	V_s para estribos verticales	47
3.4.2.-	V_s para barras dobladas	48
3.4.3.-	Limitación de V_s total	48
3.4.4.-	Estribado mínimo	49
3.4.5.-	Separación máxima de armaduras de alma	49
3.4.6.-	Elementos sin armadura de alma	50
Ejemplo 3.I		52
	Calcular el estribado uniforme necesario para la viga rectangular, considerando:	
	a. Que no existen barras dobladas.	
	b. Que existen barras dobladas a 45°	
Ejemplo 3.II		56
	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular y dibujar el diagrama de "$\phi \cdot V_n$" (Corte Resistente) de la viga rectangular. • Calcular la máxima carga uniformemente distribuida "w_u" que se puede aplicar a la pieza. • Considerando un estado de carga consistente en dos cargas "P_u" aplicadas en los tercios de la luz libre entre caras internas de columnas, calcular – utilizando los resultados obtenidos en el primer punto – el valor "P_u" máximo que se puede aplicar a la viga. 	
Ejemplo 3.III		61
	Calcular el máximo valor de " w_u " que puede resistir la viga del Ejemplo 3.I y el estribado uniforme necesario para dicha carga.	
	Analizar la armadura de corte utilizando barras de acero ADN 420 y mallas de acero soldada AM 500 N.	
Ejemplo 3.IV		62
	Calcular el valor de " w_u " por debajo del cual la viga rectangular requerirá sólo estribado mínimo. Calcular y adoptar dicho estribado.	
4.-	TORSIÓN EN SECCIONES NO PRETENSADAS	
4.1.-	Introducción	65
4.2.-	Variables geométricas y una limitación	65
4.3.-	Posibilidad de despreciar la Torsión	66
4.4.-	Torsión de equilibrio y torsión de compatibilidad	66
4.5.-	Condición resistente	67
4.6.-	Secciones críticas	67
4.7.-	Momento torsor de fisuración	67

4.8.-	Verificación de bielas comprimidas y fisuración	67
4.9.-	Resistencia nominal a torsión y cálculo de armaduras	68
4.9.1.-	Notación	68
4.9.2.-	Ángulo de las diagonales comprimidas	68
4.9.3.-	Resistencia nominal	68
4.9.4.-	Armaduras para resistir torsión	69
4.9.4.1.-	Armadura transversal	69
4.9.4.2.-	Armadura longitudinal	70
4.10.-	Armaduras mínimas y separaciones máximas reglamentarias	71
4.10.1.-	Armadura mínima transversal (estribado mínimo)	71
4.10.2.-	Armadura mínima longitudinal neta para torsión	71
4.10.3.-	Separación máxima entre estribos	72
Ejemplo 4.I		73
	Calcular y adoptar las armaduras para la sección cuadrada de 0,50 m de lado, sometida a las acciones: “ M_u ”, “ V_u ” y “ T_u ” (de equilibrio).	
Ejemplo 4.II		77
	Calcular la capacidad a torsión de la sección finalmente adoptada en el Ejemplo 4.I pero considerando ahora que el momento flector actuante es un cuarto del utilizado en dicho ejemplo.	
5.-	COLUMNAS CORTAS SIMPLES Y ZUNCHADAS	
5.1.-	Generalidades	79
5.2.-	Desarrollo de expresiones de cálculo y verificación	80
5.2.1.-	Resistencia de una columna	80
5.2.2.-	Expresiones de cálculo cuando “ $\rho = A_{st} / A_g$ ” es dato del problema	80
5.2.3.-	Expresiones de cálculo cuando “ A_g ” es dato del problema	80
5.2.4.-	Verificación de cuantías	80
5.2.5.-	Disposiciones constructivas correspondientes a columnas simples	81
5.2.6.-	Disposiciones constructivas correspondientes a columnas zunchadas	82
5.3.-	Cuantías mínimas en elementos sobredimensionados	83
Ejemplo 5.I		85
	Proyectar una columna simple dado los materiales y la sollicitación.	
Ejemplo 5.II		86
	Recalcular la columna del Ejemplo 5.I minimizando la sección de hormigón.	
Ejemplo 5.III		88
	Calcular “ P_u ” para una columna simple con dimensiones y armaduras longitudinales mínimas reglamentarias y adoptar su estribado.	
Ejemplo 5.IV		89
	Desarrollar unas expresiones simples que permitan el predimensionado de columnas simples cortas para resistencias usuales de hormigones y tensiones del acero $f_y = 420$ MPa.	
Ejemplo 5.V		89
	Calcular “ P_L ” para la columna circular.	

Ejemplo 5.VI		91
	Proyectar una columna simple y otra zunchada, ambas de sección circular, dado los materiales y la sollicitación.	
Ejemplo 5.VII		95
	Calcular las armaduras de una columna simple dado los materiales, la sección transversal y la sollicitación.	
Ejemplo 5.VIII		98
	Calcular “P _u ” para la columna circular.	
6.-	PANDEO EN ELEMENTOS PERTENECIENTES A ESTRUCTURAS CON NUDOS NO DESPLAZABLES	
6.1.-	Esquema general para la consideración de los efectos de esbeltez	101
6.2.-	Pórticos desplazables e indesplazables	101
6.3.-	Longitud efectiva: $\ell_e = k \ell_u$	102
6.3.1.-	Longitud sin apoyo lateral (ℓ_u)	102
6.3.2.-	Factor de longitud efectiva para elementos comprimidos (k)	102
6.4.-	Efectos de primer orden	103
6.5.-	Efectos de segundo orden a través de amplificación de momentos	104
6.6.-	Amplificación de momentos en elementos sometidos a flexión compuesta oblicua	105
Ejemplo 6.I		107
	Analizar el fenómeno de pandeo en la columna rectangular.	
Ejemplo 6.II		110
	Calcular las armaduras de la columna rectangular. Adoptamos los materiales, las cargas y deformaciones del Ejemplo 6.I.	
7.-	BASES DE HORMIGÓN ARMADO (H-30 y menores)	
7.1.-	Generalidades	113
7.2.-	Condición resistente	114
7.2.1.-	Formato general	114
7.2.2.-	Secciones críticas	114
7.2.2.1.-	Flexión	114
7.2.2.2.-	Corte	115
7.2.2.3.-	Punzonamiento	116
7.2.2.4.-	Anclajes	118
7.3.-	Cuantía mínima y máxima de flexión	118
7.4.-	Predimensionamiento	119
7.5.-	Unidades	119
7.6.-	Secuencia de cálculo	120
Ejemplo 7.I		123
	Proyectar una base centrada.	
Ejemplo 7.II		125
	Proyectar una base medianera.	

Ejemplo 7.III		128
	Proyectar una base de esquina.	
8.-	TIRANTES NO PRETENSADOS	
8.1.-	Condición resistente	131
8.2.-	Carga de fisuración	131
8.3.-	Condición de ductilidad	131
8.4.-	Deformaciones	132
8.5.-	Predicción del ancho de fisuras	132
Ejemplo 8.I		133
	Proyectar un tirante dado los materiales y la sollicitación.	
Ejemplo 8.II		133
	Calcular el alargamiento del tirante del Ejemplo 8.I para una condición frecuente de carga consistente en la carga permanente más el 50% de la sobrecarga máxima y considerando una longitud inicial de 6 metros.	
Ejemplo 8.III		134
	Calcular el ancho de fisuras esperable en el tirante del Ejemplo 8.I para una condición frecuente de carga consistente en la carga permanente más el 50% de la sobrecarga máxima.	
9.-	ANCLAJES Y EMPALMES POR ADHERENCIA	
9.A.-	ANCLAJES	
9.A.1.-	Anclaje de barras y alambres rectos traccionados	135
9.A.1.1.-	Expresión general	135
9.A.1.2.-	Expresiones simplificadas	136
9.A.1.3.-	Tabla de longitudes de anclaje obtenidas mediante las expresiones simplificadas	137
9.A.1.4.-	Corrección por exceso de armadura	138
9.A.1.5.-	Particularidades para los paquetes de barras	138
9.A.1.6.-	Cálculo utilizando la expresión sin simplificaciones	139
9.A.2.-	Anclaje con ganchos de barras y alambres traccionados	139
9.A.2.1.-	Expresión general	139
9.A.2.2.-	Factores de corrección	140
9.A.2.3.-	Ganchos en extremos de elementos	140
9.A.2.4.-	Ganchos en anclajes comprimidos	140
9.B.-	EMPALMES	
9.B.3.-	Empalmes de barras y alambres rectos traccionados	141
9.B.3.1.-	Longitud de empalme por yuxtaposición	141
9.B.3.2.-	No aplicabilidad de los empalmes traccionados por yuxtaposición	141
9.B.4.-	Empalmes de barras rectas comprimidas	141
9.B.4.1.-	Longitud de empalme por yuxtaposición	141
9.B.4.2.-	Empalmes a tope	142
9.B.4.3.-	Factores de corrección	142

9.B.4.4.-	Empalme de barras de diferentes diámetros	142
9.B.5.-	Anclaje de armadura transversal (estribos)	142
DF 9.I.-	Anclaje de barras y alambres traccionados – Expresiones simplificadas	145
DF 9.II.-	Anclaje de barras y alambres traccionados – Expresión general	146
DF 9.III.-	Anclaje de barras y alambres traccionados con ganchos normales	147
DF 9.IV.-	Empalme de barras y alambres rectos traccionados	148
DF 9.V.-	Empalme de barras rectas comprimidas	149
10.-	PRETENSADO EN FLEXIÓN	
10.1.-	Clasificación	151
10.2.-	Etapas (Estados ó Niveles)	151
10.3.-	Pérdidas	151
10.3.1.-	Generalidades	151
10.3.2.-	Expresiones de cálculo	152
10.3.2.1.-	Acortamiento elástico (ES: Elastic Shortening of Concrete)	152
10.3.2.1.1.-	Hormigón postesado	152
10.3.2.1.2.-	Hormigón pretesado	153
10.3.2.1.3.-	Expresiones de cálculo	153
10.3.2.2.-	Contracción del hormigón (SH: Shrinkage of Concrete)	154
10.3.2.3.-	Fluencia lenta del hormigón (CR: Creep of Concrete)	155
10.3.2.4.-	Relajación de los cables (RE: Relaxation of Tendons)	155
10.3.2.5.-	Fricción	157
10.3.2.6.-	Acuñamiento de los anclajes	158
10.4.-	Tensiones admisibles bajo estados de servicio	159
10.4.1.-	En el hormigón	159
10.4.1.1.-	En el momento del tesado (t_0)	159
10.4.1.2.-	Bajo cargas de servicio y t_∞	160
10.4.2.-	En el acero	161
10.5.-	Resistencia a flexión	162
10.5.1.-	Equilibrio y compatibilidad en secciones pretensadas	162
10.5.2.-	Solución general: compatibilidad y equilibrio	163
10.5.2.1.-	Elementos con cables adherentes	163
10.5.2.2.-	Elementos con cables no adherentes	164
10.5.3.-	Solución aproximada	164
10.5.3.1.-	Cables adherentes	164
10.5.3.2.-	Cables no adherentes	166
10.5.3.2.1.-	Elementos con relación luz/altura ≤ 35	166
10.5.3.2.2.-	Elementos con relación luz/altura > 35	166
10.6.-	Cuantías límites en flexión	166
10.6.1.-	Cuantía mínima	166
10.6.2.-	Cuantía máxima	167
10.7.-	Armadura adherente mínima	168

Ejemplo 10.I		169
	Determinar las armaduras de pretensado de un elemento prefabricado que será utilizado como parte de una cubierta para una nave industrial. El elemento será pretesado en banco y los elementos tensores serán rectos. Para disminuir las tracciones originadas por el uso de elementos tensores rectos en la cara superior en las zonas de apoyos se utilizará hormigón pretensado clase "T".	
Ejemplo 10.II		176
	Calcular las pérdidas por fricción que se producen en el cable perteneciente a un entrepiso sin vigas.	
11.-	CORTE EN ELEMENTOS PRETENSADOS	
11.1.-	Generalidades	181
11.2.-	Expresión general de cálculo y verificación	181
11.3.-	Determinación de V_c	182
11.4.-	Determinación de V_s	183
11.4.1.-	V_s para estribos verticales	183
11.4.2.-	V_s para barras dobladas y/o cables curvos	183
11.4.3.-	Limitación de V_s total	184
11.4.4.-	Estribado mínimo	184
11.4.5.-	Separación máxima de armaduras de alma	184
11.4.6.-	Elementos sin armadura de alma	185
Ejemplo 11.I		187
	Determinar las armaduras de corte de un elemento prefabricado que será utilizado como parte de una cubierta para una nave industrial. El elemento será pretesado en banco y los elementos tensores serán rectos.	
12.-	DISEÑO DE LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES	
Ejemplo 12.I		191
	Método Directo – Entrepiso sin vigas	
Ejemplo 12.II		201
	Método del Pórtico equivalente – Entrepiso sin vigas	
13.-	MODELO DE BIELAS	
13.1.-	Generalidades	207
13.2.-	Pasos propuestos en el Apéndice A del CIRSOC 201-2005	207
13.2.1.-	Definir y aislar cada una de las Regiones "D"	207
13.2.2.-	Determinar los esfuerzos resultantes que actúan sobre los bordes o fronteras de cada una de las Regiones "D"	209
13.2.3.-	Seleccionar el modelo de reticulado (bielas)	209
13.2.3.1.-	Requerimientos básicos	209

13.2.3.2.-	Los modelos y la falta de unicidad	210
13.2.3.3.-	Modelos isostáticos y modelos hiperestáticos	212
13.2.3.4.-	Modelos en la bibliografía	212
13.2.4.-	Dimensionamiento y verificación de elementos pertenecientes a modelos de bielas	213
13.2.4.1.-	Formato general	213
13.2.4.2.-	Resistencia de las zonas nodales " F_{nn} "	213
13.2.4.3.-	Resistencia de los puntales de hormigón " F_{ns} "	214
13.2.4.4.-	Resistencia de los tensores " F_{nt} "	216
13.3.-	Nodos y zonas nodales	217
13.3.1.-	Generalidades	217
13.3.2.-	Tipos de zonas nodales	218
13.3.2.1.-	Zonas nodales hidrostáticas	218
13.3.2.2.-	Zonas nodales extendidas	218
13.3.2.3.-	Zonas nodales a las que concurren más de tres fuerzas	218
Ejemplo 13.I		221
	Calcular y adoptar las armaduras de la viga rectangular y verificar su aptitud general para resistir las cargas concentradas " V_u ".	
Ejemplo 13.II		232
	Calcular y adoptar las armaduras de la columna y de la ménsula, y verificar su aptitud general para resistir las cargas " V_u " y " H_u ".	
 ANEXO		
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN		
(H-20, H-25, H-30, H-35, H-40, H-50)		
Parte I	Resistencia de secciones rectangulares con armadura simétrica sometidas a flexión compuesta recta	239
Parte II	Resistencia de secciones rectangulares con armaduras iguales en sus 4 lados sometidas a flexión compuesta recta	271
Parte III	Resistencia de secciones circulares sometidas a flexión compuesta recta	303
 BIBLIOGRAFÍAS		 335

COMBINACIÓN Y MAYORACIÓN DE ACCIONES

1.1.- Requerimientos básicos de resistencia

El CIRSOC 201-2005, artículo 9.1.1, requiere que las estructuras y los elementos estructurales deben verificar en cualquier sección la desigualdad:

$$\text{Resistencia de diseño} \geq \text{Resistencia requerida}$$
$$\phi \cdot S_n \geq U$$

donde

U = Resistencia requerida. Se obtiene por combinación de los efectos de las cargas mayoradas. En general se la calcula a partir de combinaciones de solicitaciones calculadas para cargas mayoradas por lo que un mismo grupo de cargas puede dar lugar a diferentes resistencias requeridas.

S_n = Resistencia nominal. Es la resistencia teórica obtenida para los valores especificados de resistencia de los materiales.

φ = Factor de reducción de la resistencia. Se trata de un coeficiente que adopta diferentes valores (entre 0,90 y 0,65). El valor de φ tiene en consideración varias situaciones, entre ellas la ductilidad prevista para la rotura. A mayor ductilidad prevista, mayor valor de φ.

1.2.- Resistencia requerida

1.2.1.- Resumen del Reglamento CIRSOC 201-2005

El CIRSOC 201-2005, artículo 9.2.1, exige, para estados que no incluyan la acción de sismos, el estudio de las siguientes combinaciones de efectos de cargas y/o acciones mayoradas:

- $U = 1,4 \cdot (D + F)$ (9-1)
- $U = 1,2 \cdot (D + F + T) + 1,6 \cdot (L + H) + 0,5 \cdot (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R)$ (9-2)
- $U = 1,2 \cdot D + 1,6 \cdot (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R) + (f_1 \cdot L \text{ ó } 0,8 \cdot W)$ (9-3)
- $U = 1,2 \cdot D + 1,6 \cdot W + f_1 \cdot L + 0,5 \cdot (L_r \text{ ó } S \text{ ó } R)$ (9-4)
- $U = 0,9 \cdot D + 1,6 \cdot W + 1,6 \cdot H$ (9-6)

donde

D = Cargas permanentes o las solicitaciones producidas por ellas

F = Cargas debidas al peso y presión de fluidos con densidades y presiones bien definidas y alturas máximas controlables o las solicitaciones producidas por ellas

H = Cargas debidas al peso y presión lateral del suelo, del agua en el suelo u otros materiales o las solicitaciones producidas por ellas

L = Sobrecargas o las solicitaciones producidas por ellas

L_r = Sobrecargas en las cubiertas o las solicitaciones producidas por ellas

R = Cargas provenientes de la lluvia o las solicitaciones producidas por ellas

S = Cargas de nieve o las solicitaciones producidas por ellas

T = Solicitaciones de coacción y efectos provenientes de la contracción ó expansión resultante de las variaciones de temperatura, fluencia lenta de los materiales componentes, contracción, cambios de humedad y asentamientos diferenciales o sus combinaciones

W = Cargas de viento o las sollicitaciones producidas por ellas

- En las ecuaciones (9-3) y (9-4), el factor de carga f_1 se podrá reducir a 0,5 excepto en el caso de garages, playas de estacionamiento y para lugares de concentración de público donde la sobrecarga sea mayor a $5,0 \text{ kN/m}^2$, donde dicho factor de carga deberá ser igual a 1.
- En las ecuaciones (9-4) y (9-6) el factor de carga 1,6 que se aplica a **W** puede reemplazarse por 1,3 siempre que la carga de viento **W** no haya sido reducida por un factor de direccionalidad.
- En la ecuación (9-6) el factor de carga 1,6 que se aplica a **H** puede anularse si la acción estructural debida a **H** contrarresta o neutraliza la acción debida a **W**. Cuando la presión lateral del suelo contribuya a resistir las acciones estructurales debidas a otras fuerzas, ella no debe ser incluida en **H** sino en la resistencia de diseño.
- Los efectos de cargas con impacto deben ser incluidos en **L** (artículo 9.2.2).
- Las estimaciones de los asentamientos diferenciales, la fluencia lenta, la contracción por fraguado, la expansión de hormigones de contracción compensada y los cambios de temperatura, se deben fundamentar a través de una evaluación realista de la ocurrencia de tales efectos durante la vida útil de la estructura (artículo 9.2.3).
- Para estructuras ubicadas en zonas inundables deben incluirse las acciones provenientes de la acción de la inundación y las combinaciones de carga que correspondan (artículo 9.2.4).
- Para el dimensionamiento de las zonas de anclaje de elementos postesados se debe aplicar un factor de carga de 1,2 a la máxima fuerza del gato de tesado (artículo 9.2.5).

1.2.2.- Simplificaciones

En una cantidad muy grande de situaciones se verifica que no es necesario considerar acciones **F**, **H**, **R**, **S** y **T** (fluidos, suelos, lluvia, nieve, temperatura,) por lo que las ecuaciones anteriores se simplifican bastante. Del lado seguro, la simplificación puede ser aún mayor si se aceptan iguales factores de carga para L_r y para **L** adoptándose en cada caso el correspondiente al máximo de cada combinación (en un caso el máximo corresponde a L_r y en otros a **L**). Aplicando la totalidad de las simplificaciones anteriores se llega a la tabla siguiente:

	Resistencia requerida	Ecuación original
Cargas permanentes (D) y Sobrecargas (L y L_r)	$1,4 \cdot D$ $1,2 \cdot D + 1,6 \cdot L$	(9-1) (9-2)
Cargas permanentes (D), Sobrecargas (L y L_r) y Viento (W)	$1,2 \cdot D + 1,6 \cdot L + 0,8 \cdot W$ $1,2 \cdot D + 1,0 \cdot L + 1,6 \cdot W$ $0,9 \cdot D + 1,6 \cdot W$	(9-3) (9-4) (9-6)

1.3.- Procedimientos para el cálculo de la resistencia requerida

1.3.1.- Cálculo de solicitaciones en vigas y losas armadas en una dirección mediante los coeficientes dados en 8.3.3 del CIRSOC 201-2005

Este método de cálculo aproximado de momentos utiliza una carga única w_u [kN/m] en cada tramo. Para obtener w_u se calculan tramo a tramo los valores de (9-1) y (9-2) y se adopta en cada caso el mayor.

1.3.2.- Cálculo de sistemas de losas mediante:

1.3.2.1.- Método directo

Para el cálculo del momento estático total de cada tramo (M_o) el método utiliza una carga única q_u [kN/m²] en cada tramo (artículo 13.6.2.2). Para obtener q_u se calculan tramo a tramo los valores de (9-1) y (9-2) y se adopta en cada caso el mayor.

Para el cálculo del momento a transferir a las columnas intermedias las cargas permanentes de diseño (q_{Du}) se obtienen utilizando un factor de carga de 1,2 y las sobrecargas de diseño (q_{Lu}) se calculan aplicando un factor de carga de 1,6.

1.3.2.2.- Método del pórtico equivalente

Cuando la sobrecarga sea variable pero no supere $\frac{3}{4}$ de la carga permanente o bien cuando la naturaleza de la sobrecarga sea tal que todas las losas se carguen en forma simultánea, se permite suponer que los momentos máximos mayorados en todas las secciones se producen con la sobrecarga total mayorada actuando en todo el sistema de losas (artículo 13.7.6.2). En este caso se calcula q_u tramo a tramo como se ha comentado en el punto anterior.

En caso contrario se deberán calcular las cargas q_{Du} y q_{Lu} y aplicarlas según se indica en el artículo 13.7.6.3.

1.3.3.- Caso general

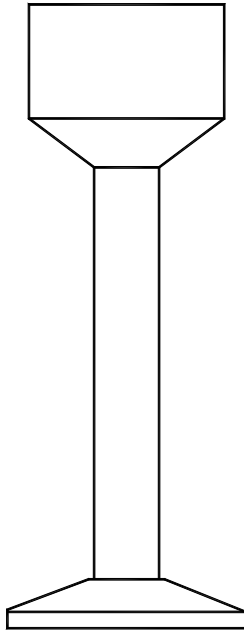
En un caso general que incluya incluso fuerzas horizontales, seguramente convendrá calcular las solicitaciones para cada una de las cargas sin mayorar y luego aplicar los factores de carga en el momento de hacer las superposiciones. En estos casos podrán existir diferentes arreglos de la sobrecarga de modo de producir los máximos efectos en las diferentes secciones críticas (p.e. máximos en tramos y en apoyos de vigas continuas). En otras palabras, en el caso más general no existirá un único estado correspondiente a la sobrecarga.

A pesar de que en la ecuación (9-6) los efectos de las acciones laterales están precedidos de un signo más, el espíritu de la ecuación es minorar los efectos de las cargas permanentes y utilizar los valores de W que se opongan a los de las cargas permanentes.

En aquellos casos en que el peso y o la presión del terreno (p.e. el empuje activo) tengan un efecto favorable debe considerarse incluso si su propia existencia puede asegurarse y, en caso de que esto no fuera posible, deberá utilizarse un valor conservador y aún nulo de dicho efecto.

COMBINACIÓN Y MAYORACIÓN DE ACCIONES – EJEMPLOS

Ejemplo 1.I



Enunciado: Calcular la resistencia requerida en la sección de encuentro del fuste del tanque elevado de la figura con la base de fundación para:

Peso hormigón cuba + fuste = 2500 kN $\Rightarrow P_D = 2500$ kN

Peso agua = 1800 kN $\Rightarrow P_F = 1800$ kN

Sobrecarga sobre tapa = 20 kN $\Rightarrow P_{Lr} = 20$ kN

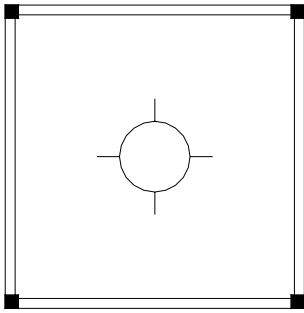
Fuerza horizontal por viento = 49,2 kN $\Rightarrow V_W = 49,2$ kN

Momento por viento = 698,4 kNm $\Rightarrow M_W = 698,4$ kNm

Resolución:

		Axial [kN]	Momento [kNm]	Corte [kN]
$U = 1,4 \cdot (D + F)$	(9-1)	6020,00	0,00	0,00
$U = 1,2 \cdot (D + F) + 0,5 \cdot L_r$	(9-2)	5170,00	0,00	0,00
$U = 1,2 \cdot D + 1,6 \cdot L_r + 0,8 \cdot W$	(9-3)	3032,00	558,72	39,36
$U = 1,2 \cdot D + 1,6 \cdot W + 0,5 \cdot L_r$	(9-4)	3010,00	1117,44	78,72
$U = 0,9 \cdot D + 1,6 \cdot W$	(9-6)	2250,00	1117,44	78,72

Ejemplo 1.II



Enunciado: Calcular la carga uniforme total mayorada q_u [kN/m²], a utilizar en el cálculo de la losa de la figura, para cada uno de los tres casos que se proponen en el siguiente cuadro.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
D [kN/m ²]	4,30	4,30	4,30
L [kN/m ²]	2,00	5,20	0,00
L _r [kN/m ²]	0,00	0,00	1,00

Resolución:

		q_u [kN/m ²]		
		Caso 1 ($f_1 = 0,5$)	Caso 2 ($f_1 = 1$)	Caso 3 ($f_1 = 0,5$)
$U = 1,4 \cdot D$	(9-1)	6,02	6,02	6,02
$U = 1,2 \cdot D + 1,6 \cdot L + 0,5 \cdot L_r$	(9-2)	8,36	13,48	5,66
$U = 1,2 \cdot D + 1,6 \cdot L_r + f_1 \cdot L$	(9-3)	6,16	10,36	6,76
$U = 1,2 \cdot D + f_1 \cdot L + 0,5 \cdot L_r$	(9-4)	Decide siempre (9-2)		
$U = 0,9 \cdot D$	(9-6)	Decide siempre (9-1)		

FLEXIÓN SIMPLE

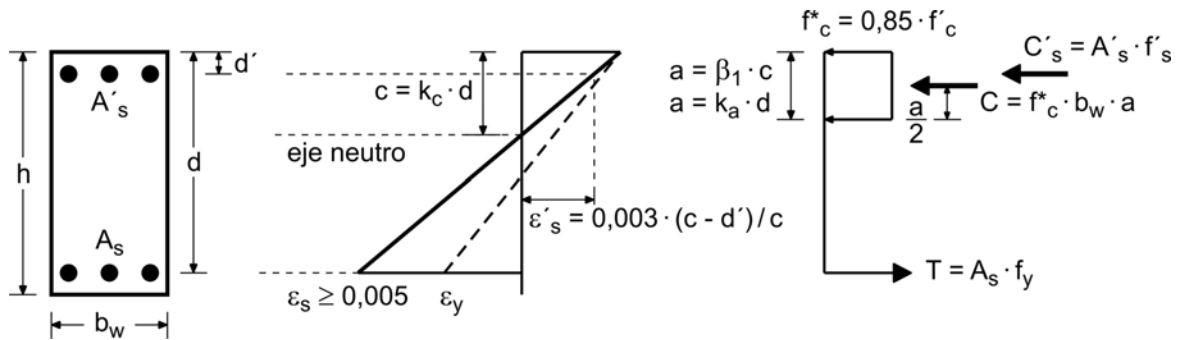


Figura 2.a

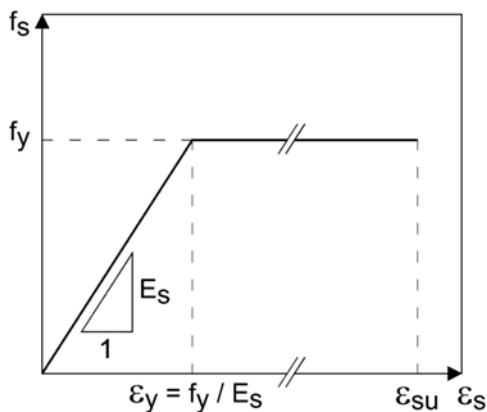


Figura 2.b

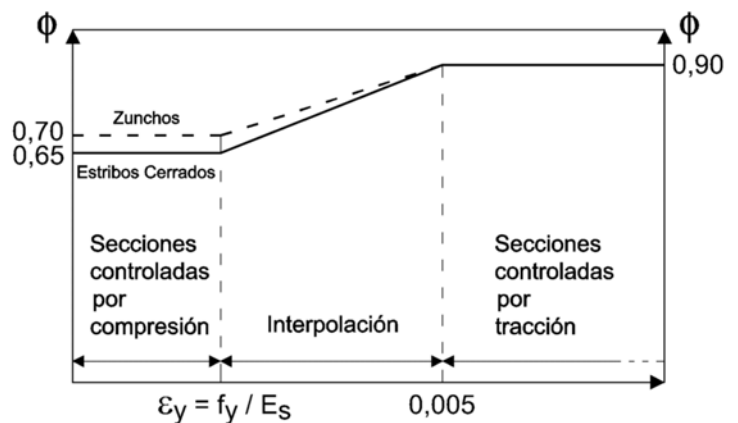


Figura 2.c

2.1.- Generalidades

En las Figuras 2.a, 2.b y 2.c se han resumido gran parte de las hipótesis y de la notación que se utilizarán en la resolución de los ejemplos.

Los ejemplos se han resuelto en base a las siguientes premisas:

- Las secciones deben verificar la condición resistente (artículo 9.1.1) dada por:

$$M_u \leq \phi \cdot M_n \quad \text{con}$$

$$M_u = \text{Resistencia requerida calculada para cargas mayoradas}$$

$$M_n = \text{Resistencia nominal ("real") de la sección}$$

$$\phi = \text{Coeficiente de reducción de resistencia en función del tipo de rotura}$$
- Las secciones se proyectan para que presenten roturas dúctiles (precedidas por importantes deformaciones y fisuración) por lo que se establece una deformación mínima para el acero más traccionado¹ de 0,005 (esto implica que todos los aceros comerciales se encontrarán en fluencia por tracción). Este tipo de secciones se denominan controladas por tracción (artículo 10.3.4) (Figura 2.c).

¹ Cuando existan varias capas de armaduras la deformación a considerar será la de la capa que se encuentre más alejada del eje neutro. Por ese motivo se habla del "acero más traccionado".

- c) En función de la hipótesis anterior, y de acuerdo con la Figura 2.c, el coeficiente ϕ puede tomarse siempre igual a 0,90 (artículo 9.3.2.1).
- d) Las secciones inicialmente planas se mantienen planas luego de deformarse (artículo 10.2.2). Esta hipótesis permite aplicar semejanza de triángulos para conocer las deformaciones que experimentan armaduras ubicadas en cualquier posición (Figura 2.a).
- e) El hormigón no resiste tracciones (artículo 10.2.5).
- f) La deformación de rotura del hormigón es siempre de 0,003 por lo que todos los posibles planos de deformación de la sección transversal se obtienen pivotando alrededor de dicha deformación (Figura 2.a) (artículo 10.2.3).
- g) Existe solidaridad resistente entre el acero y el hormigón (adherencia) por lo tanto ambos materiales experimentan iguales deformaciones específicas si se encuentran a igual distancia del eje neutro de deformaciones (puede considerarse redundante con el mantenimiento de las secciones planas).
- h) Las tensiones de compresión en el hormigón pueden representarse mediante un bloque de tensiones uniformes de valor $f_c^* = 0,85 \cdot f_c'$ (artículo 10.2.7.1), siendo " f_c' " la resistencia especificada de compresión del hormigón (Figura 2.a).
- i) El eje neutro de tensiones es paralelo al eje neutro de deformaciones y la profundidad " a " del bloque de tensiones en el hormigón está relacionada con la profundidad " c " del eje neutro de deformaciones mediante la expresión: $a = \beta_1 \cdot c$ (artículo 10.2.7.1) (Figura 2.a), donde:
- Si $f_c' \leq 30$ MPa $\beta_1 = 0,85$ y
- Si $f_c' > 30$ MPa $\beta_1 = 0,85 - 0,05 \cdot (f_c' - 30 \text{ MPa}) / 7 \geq 0,65$ (art. 10.2.7.3)
- j) El acero tiene un comportamiento perfectamente elastoplástico (Figura 2.b). Para deformaciones menores a las de fluencia su tensión se calcula como el producto de su deformación específica por el módulo de elasticidad ($E_s = 200000$ MPa) a partir de allí su tensión es igual a la tensión de fluencia especificada " f_y " (artículo 10.2.4).
- k) Si el momento solicitante fuera mayor que el resistido en base a las deformaciones límites establecidas para los materiales ($\epsilon_{cu} = 0,003$ y $\epsilon_s \geq 0,005$) se recurrirá al uso de armadura comprimida (A_s') de modo de mantener el eje neutro en su profundidad máxima (artículo 10.3.5.1). Esta profundidad se obtiene por semejanza de triángulos asignando a los materiales las deformaciones límites:
- $$c = d \cdot 0,003 / (0,003 + 0,005) = 0,375 \cdot d$$
- l) Para asegurar una ductilidad mínima las secciones no podrán proyectarse con una armadura menor que:
- Si $f_c' \leq 30$ MPa $A_{s \text{ mín}} = 1,4 \cdot b_w \cdot d / f_y$
- Si $f_c' > 30$ MPa $A_{s \text{ mín}} = \sqrt{f_c'} \cdot b_w \cdot d / (4 \cdot f_y)$ (artículo 10.5.1)
- donde f_c' y f_y se encuentran expresados en MPa.

2.2.- Secciones rectangulares

2.2.1.- Ecuaciones generales de equilibrio

En el caso más general, planteando momentos respecto a la armadura traccionada se tiene (Figura 2.a):

$$M_n = M_c + M_s = C \cdot (d - a/2) + C_s' \cdot (d - d')$$

y planteando equilibrio de fuerzas horizontales:

$$A_s \cdot f_y = C + C'_s$$

2.2.2.- Cuantías límites

a) Cuantía mínima

Dado que la cuantía mínima es la menor armadura a disponer, se estará muy lejos de la cuantía máxima y por lo tanto no se tendrá armadura comprimida, es decir que se tendrá solamente:

$$T = A_s \cdot f_y = C = f'_c \cdot b_w \cdot a = f'_c \cdot b_w \cdot k_a \cdot d \quad \text{y por lo tanto}$$
$$k_a = A_s \cdot f_y / (f'_c \cdot b_w \cdot d)$$

Una sección contará con una armadura mayor que la mínima cuando

$$k_a \geq k_{a \text{ min}} = A_{s \text{ min}} \cdot f_y / (f'_c \cdot b_w \cdot d)$$

$$\text{Si } f'_c \leq 30 \text{ MPa} \quad k_a \geq k_{a \text{ min}} = 1,4 / f'_c = 1,4 / (0,85 \cdot f'_c)$$

$$\text{Si } f'_c > 30 \text{ MPa} \quad k_a \geq k_{a \text{ min}} = 1 / (3,4 \cdot \sqrt{f'_c})$$

b) Cuantía máxima

Una sección requerirá armadura de compresión cuando la sección de hormigón comprimido sea insuficiente como para equilibrar el momento externo. El momento máximo que puede equilibrar el hormigón se da cuando se alcanza la máxima deformación de compresión en el hormigón (0,003) y la mínima deformación de tracción en el acero (0,005)² es decir cuando:

$$c_{\text{máx}} = 0,003 \cdot d / (0,003 + 0,005) = 0,375 \cdot d \quad \text{por lo que resulta}$$
$$k_{c \text{ máx}} = c_{\text{máx}} / d = 0,375 \quad \text{y por lo tanto}$$
$$k_{a \text{ máx}} = k_{c \text{ máx}} \cdot \beta_1 = 0,375 \cdot \beta_1$$

Existen otras razones para limitar la profundidad máxima del eje neutro. Este es el caso de las secciones en las que se pretenda efectuar una redistribución plástica de momentos. El CIRSOC 201-2005, artículo 8.4.3, pide para estos casos una deformación mínima en el acero de 0,0075 y puede ser aún mayor dependiendo del porcentaje de redistribución que se desee. Volveremos más adelante sobre este tema. En esta serie de ejemplos se tomará como cuantía máxima la correspondiente a la deformación de 0,005 en el acero más traccionado.

2.2.3.- Cálculo de armaduras

$$M_n = M_u / \phi = M_u / 0,9$$

² Si bien el CIRSOC 201-2005 permite llegar a una deformación mínima de 0,004 simultáneamente indica una reducción del factor "φ" que vuelve antieconómicas soluciones con deformaciones menores a 0,005.

En primera instancia supondremos que no es necesario disponer armadura comprimida:

$$M_n = f_c^* \cdot b_w \cdot a \cdot (d - a/2) = f_c^* \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a/2) \quad \text{y} \quad \text{llamando}$$

$$m_n = M_n / (f_c^* \cdot b_w \cdot d^2) \quad \text{resulta}$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2}$$

a) Si $k_a \leq k_{a \text{ mín}}$ se adopta $A_s = A_{s \text{ mín}} = f_c^* \cdot b_w \cdot k_{a \text{ mín}} \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$

b) Si $k_{a \text{ mín}} < k_a \leq k_{a \text{ máx}}$ se calcula $A_s = f_c^* \cdot b_w \cdot k_a \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$

c) Si $k_a > k_{a \text{ máx}}$ se requerirá el uso de armadura comprimida, es decir $A'_s > 0$

El máximo momento que podrá tomar la sección comprimida de hormigón es:

$$M_c = f_c^* \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a \text{ máx}} \cdot (1 - k_{a \text{ máx}}/2)$$

por lo que el momento remanente deberá ser tomado por la armadura comprimida:

$$\Delta M_n = M'_s = M_n - M_c = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') \quad \text{donde la tensión "f'_s" surge de}$$

$$\varepsilon'_s = 0,003 \cdot (c - d') / c$$

Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y = f_y / E_s = f_y / 200000 \text{ MPa}$ entonces $f'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$

Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$ entonces $f'_s = f_y$

por lo que se puede despejar la armadura comprimida como:

$$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$$

finalmente, de la sumatoria de fuerzas se obtiene

$$A_s = f_c^* \cdot b_w \cdot k_{a \text{ máx}} \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$$

Si en cualquier situación se deseara conocer la deformación de la armadura más traccionada esta se obtiene por semejanza de triángulos como:

$$\varepsilon_s = 0,003 \cdot (d - c) / c = 0,003 \cdot (1 - k_c) / k_c \quad \text{con} \quad k_c = k_a / \beta_1$$

2.3.- Secciones con alas ("T" y "L")

2.3.1.- Geometrías

Las Figuras 2.3.1.1.a) á c) muestran los tres tipos de secciones con alas que contempla el CIRSOC 201-2005: Viga "T" bajo losa, Viga "L" bajo losa y Viga "T" aislada.

Las condiciones que da el CIRSOC para el cálculo del ancho efectivo "b" a emplear en los cálculos resistentes es:

2.3.1.1.- Para Vigas "T" bajo losa (artículo 8.10.2)

- a) $b = b_w + b_{e \text{ izq}} + b_{e \text{ der}}$
- b) $b \leq \text{Luz de la viga} / 4$
- c) $b_{e \text{ (izq ó der)}} = \text{mínimo } (8 \cdot h_f ; \frac{1}{2} \text{ distancia libre a viga adyacente})$

2.3.1.2.- Para Vigas "L" bajo losa (artículo 8.10.3)

- a) $b = b_w + b_e$
- b) $b_e = \text{mínimo } (6 \cdot h_f ; \frac{1}{2} \text{ distancia libre a viga adyacente} ; \text{Luz de la viga} / 12)$

2.3.1.3.- Para Vigas "T" aisladas (artículo 8.10.4)

- a) $h_f \geq b_w / 2$
- b) $b \leq 4 \cdot b_w$

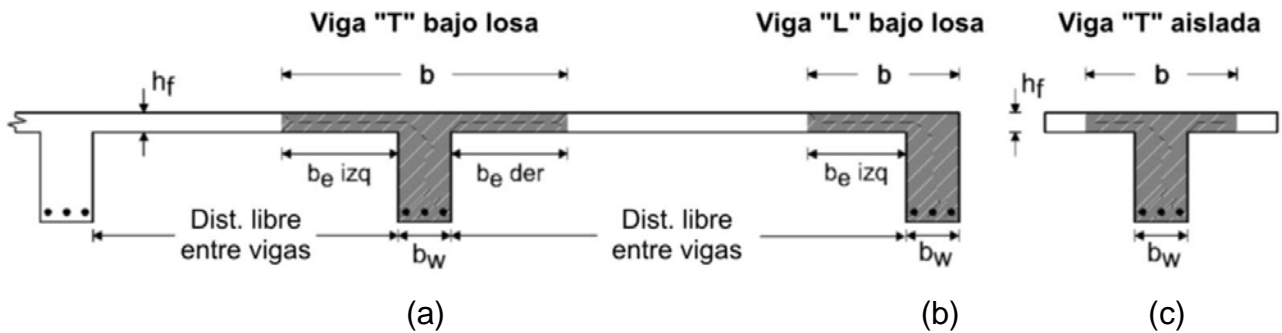


Figura 2.3.1.1

2.3.2.- Alturas relativas entre alas y alma

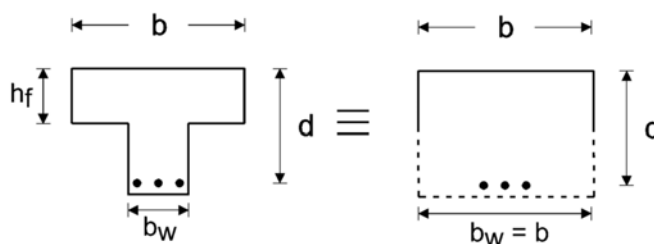


Figura 2.3.2.1

Al limitar la profundidad máxima del eje neutro de deformaciones a " $c = 0,375 \cdot d$ " cualquier sección transversal en la que se verifique que " $h_f \geq 0,375 \cdot \beta_1 \cdot d$ " puede analizarse como si se tratara de una sección rectangular de ancho constante " b " (Figura 2.3.2.1) dado que el eje neutro de tensiones siempre caerá en la zona de ancho " b ".

2.3.3.- Cuantías límites

a) Cuantía mínima

En estos casos es más complicado establecer referencias en términos de " k_a " dado que la cuantía mínima **siempre** se calcula en base a " b_w ", y " k_a " se calcula en base a " b ". En

estos casos resulta más práctico, al finalizar los cálculos, comparar la armadura obtenida con la armadura mínima reglamentaria.

b) Cuantía máxima

Como veremos enseguida, los cálculos de secciones con alas pueden presentar dos situaciones: que el eje neutro de tensiones caiga dentro de las alas o que corte solamente al nervio. Las situaciones de cuantía máxima se dan cuando el eje neutro de tensiones corta solamente al nervio³. En estas condiciones el momento resistente de la sección puede dividirse en un momento tomado por las alas y otro tomado por el nervio (ver más adelante). Una sección requerirá armadura de compresión cuando la sección de hormigón comprimido del nervio sea insuficiente como para equilibrar la parte del momento externo que le toca resistir. El momento máximo que puede equilibrar el hormigón del nervio se da cuando se alcanza la máxima deformación de compresión en el hormigón y la mínima deformación de tracción en el acero necesaria para mantener la condición de $\phi = 0,90$, es decir cuando:

$$c_{\text{máx}} = 0,003 \cdot d / (0,003 + 0,005) = 0,375 \cdot d \quad \text{por lo que resulta}$$

$$k_c \text{ máx} = c_{\text{máx}} / d = 0,375 \quad \text{y por lo tanto}$$

$$k_a \text{ máx} = k_c \text{ máx} \cdot \beta_1 = 0,375 \cdot \beta_1$$

Valen los comentarios realizados para secciones rectangulares con referencia a situaciones en las que se requieran mayores deformaciones mínimas en el acero más traccionado.

2.3.4.- Cálculo de armaduras

$$M_n = M_u / \phi = M_u / 0,9$$

De acuerdo con la posición que adopte el eje neutro de tensiones pueden presentarse dos situaciones (Figuras 2.3.4.1 y 2.3.4.2):

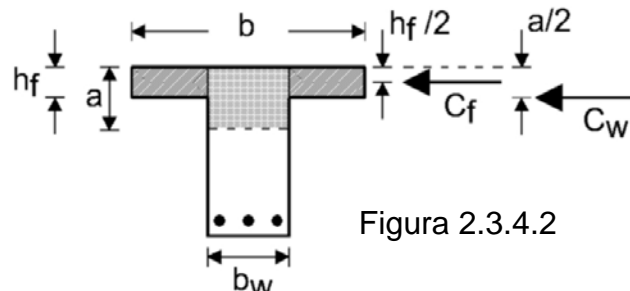
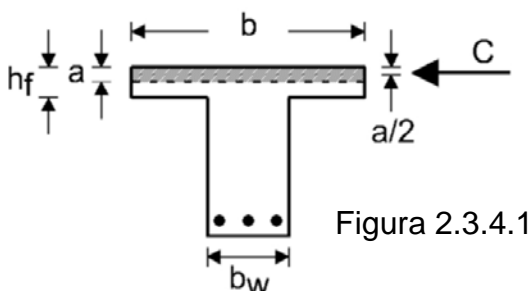


Figura 2.3.4.1: El eje neutro de tensiones cae dentro de la placa por lo que la sección puede calcularse como rectangular de ancho constante e igual a "b".

³ Ya comentamos que si " $h_f \geq 0,375 \cdot \beta_1 \cdot d$ " la sección puede analizarse como rectangular. Si no se la analizara como rectangular podría darse algún caso en el que el eje neutro cayera en la placa para la condición de cuantía máxima.

Figura 2.3.4.2: El eje neutro de tensiones corta sólo al nervio. La sección se divide en “alas” y “alma”. La fuerza y el momento equilibrado por las alas son conocidos por lo que el momento que debe tomar el alma se obtiene por diferencia con el momento solicitante.

Para iniciar el cálculo se supondrá en primera instancia que no es necesario disponer armadura comprimida y que el eje neutro de tensiones se encuentra dentro de las alas es decir se asume que la sección se comporta como una sección rectangular de ancho “b”:

Al suponerse $a \leq h_f$ debe verificarse que $k_a \leq h_f / d$

$$M_n = f_c^* \cdot b \cdot a \cdot (d - a/2) = f_c^* \cdot b \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a/2) \quad \text{y} \quad \text{llamando}$$

$$m_n = M_n / (f_c^* \cdot b \cdot d^2) \quad \text{resulta}$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2}$$

a) Si $k_a \leq h_f / d$ se calcula $A_s = f_c^* \cdot b \cdot k_a \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$
 y se verifica que $A_s \geq A_{s \text{ mín}}$
 Si no se verificara se adopta $A_s = A_{s \text{ mín}}$

b) Si $k_a > h_f / d$

La fuerza que toman las alas vale: $C_f = f_c^* \cdot (b - b_w) \cdot h_f$

El momento (respecto a “A_s”) tomado por las alas vale: $M_{nf} = C_f \cdot (d - h_f / 2)$

La armadura necesaria para equilibrar C_f vale: $A_{sf} = C_f / f_y$

El momento a equilibrar con el hormigón del alma vale : $M_{nw} = M_n - M_{nf}$

De aquí en adelante el cálculo del alma se efectúa como en una sección rectangular aislada para lo cual será necesario recalcular “k_a” para el momento solicitante “M_{nw}”. Al finalizar el cálculo se deberá adicionar a la armadura “A_{sw}” la armadura “A_{sf}” necesaria para equilibrar las compresiones en las alas.

En primera instancia supondremos que no es necesario disponer armadura comprimida es decir que $k_a \leq k_{a \text{ máx}} = 0,375 \cdot \beta_1$

$$M_{nw} = f_c^* \cdot b_w \cdot a \cdot (d - a/2) = f_c^* \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a/2) \quad \text{y} \quad \text{llamando}$$

$$m_n = M_{nw} / (f_c^* \cdot b_w \cdot d^2) \quad \text{resulta}$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2}$$

b.1) $k_a \leq k_{a \text{ máx}}$ se calcula $A_{sw} = f_c^* \cdot b_w \cdot k_a \cdot d / f_y$ y $A'_s = 0$
 $A_s = A_{sw} + A_{sf}$

b.2) Si $k_a > k_{a\text{máx}}$ se requerirá el uso de armadura comprimida, es decir $A'_s > 0$

Fijamos la posición del eje neutro en: $c_{\text{máx}} = k_{c\text{máx}} \cdot d = 0,375 \cdot d$

El máximo momento que podrá tomar la sección comprimida de hormigón es:

$$M_c = f_c^* \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a\text{máx}} \cdot (1 - k_{a\text{máx}}/2)$$

por lo que el momento remanente deberá ser tomado por la armadura comprimida:

$$\Delta M_n = M'_s = M_{nw} - M_c = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d')$$
 donde la tensión "f'_s" surge de

$$\varepsilon'_s = 0,003 \cdot (c_{\text{máx}} - d') / c_{\text{máx}} = 0,003 \cdot (k_{c\text{máx}} - d'/d) / k_{c\text{máx}}$$

Si $\varepsilon'_s < \varepsilon_y = f_y / E_s = f_y / 200000 \text{ MPa}$ entonces $f'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$

Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$ entonces $f'_s = f_y$

por lo que se puede despejar la armadura comprimida como:

$$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$$

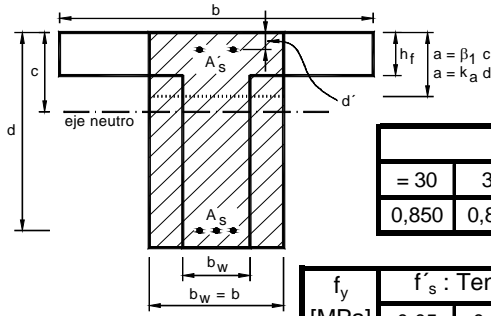
finalmente, de la sumatoria de fuerzas se obtiene

$$A_s = f_c^* \cdot b_w \cdot k_{a\text{máx}} \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y + A_{sf}$$

Como en el caso de secciones rectangulares, si en cualquier situación se deseara conocer la deformación de la armadura más traccionada esta se obtiene por semejanza de triángulos como:

$$\varepsilon_s = 0,003 \cdot (d - c) / c = 0,003 \cdot (1 - k_c) / k_c \quad \text{con} \quad k_c = k_a / \beta_1$$

TABLA AUXILIAR Nº 1
FLEXIÓN SIMPLE: CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES Y CON ALAS



$$M_u = \phi M_n$$

$$M_u = 0,90 M_n$$

Cuantía mínima	f'_c [MPa]	m_n	k_a
		Para valores menores $m_n \sim k_a$	
Si m_n es menor que el valor indicado para la resistencia de hormigón utilizada, adoptar cuantía mínima	60	0,037	0,038
	55	0,039	0,040
	50	0,041	0,042
	45	0,043	0,044
	40	0,045	0,047
	35	0,048	0,050
	30	0,053	0,055
		0,058	0,060
	25	0,064	0,066
		0,068	0,070
		0,077	0,080
	20	0,079	0,082
		0,086	0,090
		0,095	0,100
	0,104	0,110	
	0,113	0,120	
	0,122	0,130	
	0,130	0,140	
	0,139	0,150	
	0,147	0,160	
	0,156	0,170	
	0,164	0,180	
	0,172	0,190	
	0,180	0,200	
	0,188	0,210	
	0,196	0,220	
Doble armadura	f'_c [MPa]	0,204	0,230
Si m_n es mayor que el valor indicado para la resistencia de hormigón utilizada, adoptar doble armadura		0,211	0,240
	60	0,214	0,244
	55	0,220	0,252
		0,226	0,260
	50	0,230	0,265
		0,234	0,270
	45	0,240	0,279
		0,241	0,280
		0,248	0,290
	40	0,249	0,292
		0,255	0,300
	35	0,259	0,305
		0,262	0,310
	= 30	0,268	0,319

β_1 en función de f'_c [MPa]						
= 30	35	40	45	50	55	60
0,850	0,814	0,779	0,743	0,707	0,671	0,650

f_y [MPa]	f'_s : Tensión de A'_s en [MPa] para $d'/d =$						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
220	220	220	220	220	200	120	40
420	420	420	360	280	200	120	40
500	500	440	360	280	200	120	40

Sección rectangular

A) SECCIONES RECTANGULARES (y con alas para $h_f/d = \beta_1, 0,375$)

$$m_n = M_n / (0,85 f'_c b_w d^2) \quad \text{obtener } k_a \text{ de la tabla}$$

si $\begin{cases} k_a = k_{a \text{ min}} & \text{adoptar } k_a = k_{a \text{ min}} \\ k_{a \text{ min}} < k_a = k_{a \text{ máx}} & \text{adoptar } k_a = k_a \text{ de tabla} \\ k_a > k_{a \text{ máx}} & \text{corresponde doble armadura} \end{cases}$

Armadura simple: $A_s = k_a 0,85 f'_c b_w d / f_y$

Armadura doble: Obtener de tablas $k_{a \text{ máx}}$, $m_{n \text{ máx}}$ y f'_s

$$\Delta M_n = M_n - m_{n \text{ máx}} 0,85 f'_c b_w d^2$$

$$A'_s = \Delta M_n / [(d - d') f'_s]$$

$$A_s = k_{a \text{ máx}} 0,85 f'_c b_w d / f_y + A'_s f'_s / f_y$$

B) SECCIONES CON ALAS ("T" y "L" con $h_f/d = \beta_1, 0,375$)

$$m_n = M_n / (0,85 f'_c b d^2) \quad \text{obtener } k_a \text{ de la tabla}$$

$$A_{s \text{ min}} = k_{a \text{ min}} 0,85 f'_c b_w d / f_y$$

B.1) Rectangular: $k_a = h_f / d$

$$A_s = k_a 0,85 f'_c b d / f_y \quad (\text{Verificar si } A_s = A_{s \text{ min}})$$

B.2) Nervio y alas

$$M_{nf} = 0,85 f'_c h_f (b - b_w) (d - h_f / 2)$$

$$A_{sf} = M_{nf} / [(d - h_f / 2) f_y]$$

$$M_{nw} = M_n - M_{nf}$$

$$m_n = M_{nw} / (0,85 f'_c b_w d^2) \quad \text{obtener } k_a \text{ de la tabla}$$

si $\begin{cases} k_a = k_{a \text{ máx}} & \text{adoptar } k_a = k_a \text{ de tabla} \\ k_a > k_{a \text{ máx}} & \text{corresponde doble armadura} \end{cases}$

Armadura simple:

$$A_s = k_a 0,85 f'_c b_w d / f_y + A_{sf} \quad \text{Verificar si } A_s = A_{s \text{ min}}$$

Armadura doble:

Obtener de tablas $k_{a \text{ máx}}$, $m_{n \text{ máx}}$ y f'_s

$$\Delta M_n = M_{nw} - m_{n \text{ máx}} 0,85 f'_c b_w d^2$$

$$A'_s = \Delta M_n / [(d - d') f'_s]$$

$$A_s = k_{a \text{ máx}} 0,85 f'_c b_w d / f_y + A'_s f'_s / f_y + A_{sf}$$

EJEMPLOS FLEXIÓN SIMPLE

2.I.- SECCIÓN RECTANGULAR

Ejemplo 2.I.1

Enunciado: Calcular las armaduras de una sección rectangular para las siguientes condiciones:

- Materiales: - Hormigón: H-25 ($f'_c = 25 \text{ MPa}$)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)
- Sección transversal: - $b_w = 0,12 \text{ m}$; $h = 0,40 \text{ m}$
- Estribos: - Recubrimiento: $c_c = 0,02 \text{ m}$
 - Diámetro estimado: $d_{be} = 6 \text{ mm}$
- Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: $d_b = 16 \text{ mm}$
- Solicitud: - $M_u = 52 \text{ kNm}$

Resolución analítica:

- Para $f'_c = 25 \text{ MPa}$ se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c \text{ (MPa)} = 0,06588$

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 52 \text{ kNm} / 0,9 = 57,78 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 57,78 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2) = 0,16915$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,16915)^{1/2} = 0,18655 > k_{a \text{ mín}}$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,18655 / 0,85 = 0,219 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0$$

$$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,18655 \cdot 21,25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 415 \text{ mm}^2 \\ (4,15 \text{ cm}^2)$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

Ingresando a la tabla con:

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2)$$

$$m_n = 57,78 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2) = 0,16915$$

Se obtiene:

$$\text{Sin interpolar: } k_a = 0,190$$

$$\text{Interpolando: } k_a = 0,180 + (0,190 - 0,180) \cdot (0,16915 - 0,164) / (0,172 - 0,164) =$$

$$k_a = 0,18644$$

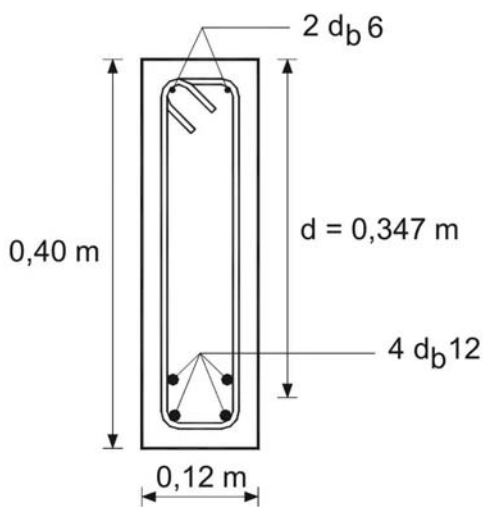
Como se observa, aún sin interpolar el error obtenido es menor al 2% por lo que podría utilizarse el valor leído en forma directa.

El valor de “ k_a ” obtenido se encuentra, según los límites indicados en la tabla, por encima de la cuantía mínima y por debajo de los valores que requieren de doble armadura por lo que resulta:

$$A_s = k_a \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,18644 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} =$$

$$A_s = 414 \text{ mm}^2 \quad (4,14 \text{ cm}^2)$$

Armado:



Los cálculos anteriores fueron realizados tomando:

$$d = 0,366 \text{ m}$$

La altura útil resultante, luego de adoptar armaduras y separaciones, ha sido:

$$d = 0,347 \text{ m}$$

Rehaciendo los cálculos se llegaría a:

$$A_s = 443 \text{ mm}^2 < 4 \text{ db } 12 = 452 \text{ mm}^2$$

Ejemplo 2.I.2

Enunciado: Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 16 \text{ kNm}$

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25 \text{ MPa}$ se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c \text{ (MPa)} = 0,06588$

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 16 \text{ kNm} / 0,9 = 17,78 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 17,78 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2) = 0,05205$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,05205)^{1/2} = 0,05348 < k_{a \text{ mín}}$$

Se adopta por lo tanto $k_a = k_{a \text{ mín}}$

$$A_s = k_a \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,06588 \cdot 21,25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 146 \text{ mm}^2$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 16 \text{ kNm} / 0,9 = 17,78 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

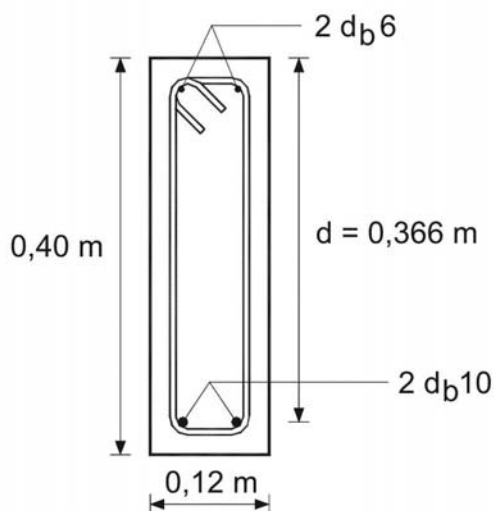
Ingresando a la tabla con:

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 17,78 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2) = 0,05205$$

Se obtiene un valor de “ k_a ” que es menor que el valor límite correspondiente a la cuantía mínima para la resistencia utilizada. Se adopta por lo tanto: $k_a = k_{a \text{ mín}} = 0,066$

$$A_s = A_{s \text{ mín}} = k_{a \text{ mín}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y$$

$$A_s = 0,066 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 147 \text{ mm}^2$$



Armado:

La altura útil utilizada en el cálculo coincide con la obtenida al armar la sección.

Ejemplo 2.I.3

Enunciado: Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 100$ kNm. De ser necesaria armadura comprimida se supondrá que la distancia de la fibra más comprimida de hormigón al centro de gravedad de la armadura comprimida es $d' = 0,03$ m.

Resolución analítica:

- Para $f'_c = 25$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c \text{ (MPa)} = 0,06588$

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 100 \text{ kNm} / 0,9 = 111,11 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (f_c^* \cdot b_w \cdot d^2) = 111,11 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2) = 0,32528$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,32528)^{1/2} = 0,40886 > k_{a \text{ min}}$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,40886 / 0,85 = 0,481 > 0,375 \Rightarrow A'_s > 0$$

Se fija $k_c = 0,375$ por lo tanto:

- $k_a = k_{a \text{ máx}} = k_c \cdot \beta_1 = 0,375 \cdot 0,85 = 0,31875$
- $c = 0,375 \cdot 0,366 \text{ m} = 0,137 \text{ m}$

por lo que la sección de hormigón comprimido tomará un momento constante igual a:

$$M_c = f_c^* \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a \text{ máx}} \cdot (1 - k_{a \text{ máx}} / 2)$$

$$M_c = 21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2 \cdot 0,31875 \cdot (1 - 0,31875 / 2) = 91,53 \text{ kNm}$$

El momento a tomar con "A'_s" será: $\Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$

$$\Delta M_n = 111,11 \text{ kNm} - 91,53 \text{ kNm} = 19,58 \text{ kNm} \text{ por lo que}$$

$$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$$

$$A'_s = [19,58 \text{ kNm} / (420 \text{ MPa} \cdot (0,366 \text{ m} - 0,03 \text{ m}))] \cdot 1000 \text{ (mm}^2 \text{ MN)/(m}^2 \text{ kN)} = 139 \text{ mm}^2$$

El valor de f'_s utilizado en la expresión anterior surge de plantear semejanza de triángulos a partir de una deformación igual a 0,003 en la fibra de hormigón más comprimida.

$$\varepsilon'_s = 0,003 \cdot (0,137 \text{ m} - 0,03 \text{ m}) / 0,137 \text{ m} = 0,0023 > \varepsilon_y = f_y / E_s = 0,0021 \Rightarrow$$

$$f'_s = f_y = 420 \text{ MPa}$$

y por lo tanto se tiene:

$$A_s = k_{a \text{ máx}} \cdot f_c^* \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$$

$$A_s = 0,31875 \cdot 21,25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} + 139 \text{ mm}^2 \cdot 420 \text{ MPa} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_s = 708 \text{ mm}^2 + 139 \text{ mm}^2 = 847 \text{ mm}^2$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 100 \text{ kNm} / 0,9 = 111,11 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

Ingresando a la tabla con:

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f_c \cdot b_w \cdot d^2) = 111,11 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2)$$

$$m_n = 0,32528$$

se observa que el valor de "m_n" es mayor que el aceptado para armadura simple por lo que se dispondrá armadura doble. Según la tabla, para $f_c = 25 \text{ MPa}$:

$$m_{n \text{ máx}} = 0,268 \text{ y } k_{a \text{ máx}} = 0,319$$

$$M_c = m_{n \text{ máx}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2 = 0,268 \cdot 0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2$$

$$M_c = 91,54 \text{ kNm}$$

El momento a tomar con A'_s será: $\Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$

$$\Delta M_n = 111,11 \text{ kNm} - 91,54 \text{ kNm} = 19,57 \text{ kNm}$$

Según la tabla auxiliar, una armadura con $f_y = 420 \text{ MPa}$ y $d'/d = 0,03 \text{ m} / 0,366 \text{ m} = 0,08$ se encuentra en fluencia para relaciones de “ d'/d ” menores que 0,10 por lo tanto, se tendrá que $f'_s = f_y$.

$$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$$

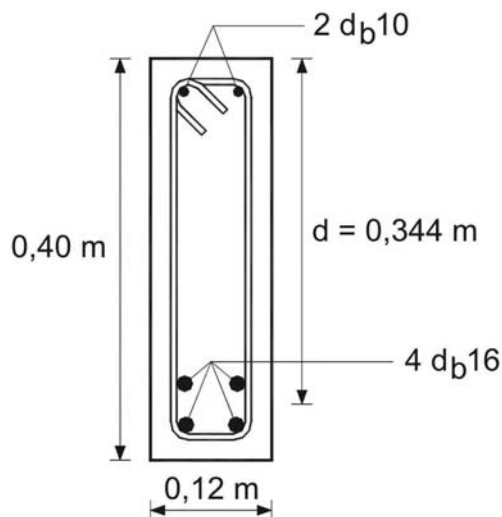
$$A'_s = [19,57 \text{ kNm} / (420 \text{ MPa} \cdot (0,366 \text{ m} - 0,03 \text{ m}))] \cdot 1000 \text{ (mm}^2 \text{ MN)/(m}^2 \text{ kN)} = 139 \text{ mm}^2$$

$$A_s = k_{a \text{ máx}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$$

$$A_s = 0,319 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 366 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} + 139 \text{ mm}^2 \cdot 420 \text{ MPa} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_s = 709 \text{ mm}^2 + 139 \text{ mm}^2 = 848 \text{ mm}^2$$

Armado:



Luego de armada la sección se observa que:

$$d = 0,344 \text{ m} \text{ (utilizado en el cálculo: } 0,366\text{m)}$$

$$d - d' = 0,313 \text{ m} \text{ (utilizado en el cálculo: } 0,336 \text{ m)}$$

Rehaciendo los cálculos se llega a:

$$A'_s = 230 \text{ mm}^2 > 2 \text{ db}10 = 158 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 896 \text{ mm}^2 > 4 \text{ db}16 = 804 \text{ mm}^2$$

Por lo que deberían modificarse las armaduras adoptadas. Ejercicio que se deja a cargo del lector.

Ejemplo 2.I.4

Enunciado: Calcular las armaduras para las condiciones del Ejemplo 2.I.1 y $M_u = 100 \text{ kNm}$. Se tratará de evitar el uso de armadura comprimida.

Para comenzar los cálculos utilizaremos la altura útil “ $d = 0,344 \text{ m}$ ” obtenida en el ejemplo anterior.

Resolución analítica:

- Para $f'_c = 25 \text{ MPa}$ se tiene que:
- $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c \text{ (MPa)} = 0,06588$

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 100 \text{ kNm} / 0,9 = 111,11 \text{ kNm}$$

$$d = 0,344 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (f_c^* \cdot b \cdot d^2) = 111,11 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,344^2 \text{ m}^2) = 0,36821$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,36821)^{1/2} = 0,48660 > k_{a \text{ min}}$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,48660 / 0,85 = 0,572 > 0,375 \Rightarrow A'_s > 0 \quad \text{ó} \quad \phi < 0,90$$

Como se ha comentado, en la resolución de estos ejemplos se ha adoptado como criterio general la utilización de armadura comprimida en lugar de intentar soluciones con “ ϕ ” variable. En este ejemplo se demostrará que las soluciones con “ ϕ ” variable resultan “imposibles” debido a un efecto de compensación que existe entre el incremento que experimenta el momento “ M_n ” al aumentar la profundidad del eje neutro “ c ” y la disminución de “ ϕ ”, lo que da lugar a la aparición de un “momento tope” prácticamente constante e independiente de la profundidad del eje neutro una vez que éste ha superado la posición dada por: $c = 0,375 \cdot d$.

El camino elegido para poner de manifiesto el fenómeno consiste en un proceso de sucesivos aumentos de la profundidad del eje neutro de deformaciones “ c ”.

Para cada valor de “ c ” se calculará:

$$k_c = c / d$$

$$a = \text{Profundidad del eje neutro de tensiones} = \beta_1 \cdot c = 0,85 \cdot c$$

$$M_n = \text{Momento nominal} = f_c^* \cdot b \cdot a \cdot (d - a / 2)$$

$$\varepsilon_s = \text{Deformación específica de "A}_s\text{"} = 0,003 \cdot (d - c) / c$$

$$\phi = 0,65 + 0,25 \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_y) / (0,005 - \varepsilon_y) = 0,65 + 0,25 \cdot (\varepsilon_s - 0,0021) / (0,005 - 0,0021)$$

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

c [m]	k _c	a [m]	C [kN]	M _n [kNm]	ε _s	φ	M _u [kNm]
0,12900	0,37500	0,10965	279,61	80,86	0,00500	0,900	72,77
0,13072	0,38000	0,11111	283,34	81,73	0,00489	0,891	72,81
0,13760	0,40000	0,11696	298,25	85,16	0,00450	0,857	72,97
0,14752	0,42883	0,12539	319,74	89,95	0,00400	0,813	73,16
0,15480	0,45000	0,13158	335,53	93,35	0,00367	0,785	73,28
0,20259	0,58893	0,17220	439,12	113,25	0,00209	0,650	73,55

La tabla anterior llega hasta valores de “ c ” muy altos, de hecho llega hasta el punto en que la armadura “ A_s ” dejaría de estar en fluencia por tracción. Independientemente de cualquier consideración reglamentaria, a partir de este punto las roturas se producirían con la armadura más traccionada en régimen elástico - roturas poco dúctiles - y además se estaría desaprovechando parte de la resistencia del acero. En definitiva, se puede afirmar entonces que, a partir de “ $c = 0,375 \cdot d$ ”, el momento que se puede equilibrar con armadura simple crece en forma despreciable con el aumento de la profundidad del eje neutro por lo que la opción más razonable - y en general la única - consiste en disponer armadura doble.

Ejemplo 2.I.5

Enunciado: Calcular las armaduras, constituidas por mallas soldadas de alambres conformados, de una sección rectangular perteneciente a una losa armada en una dirección para las siguientes condiciones:

- Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
 - Acero: AM 500 N ($f_y = 500$ MPa)
- Sección transversal: - $b_w = 1,00$ m ; $h = 0,09$ m
- Armadura principal: - Recubrimiento: $c_c = 0,02$ m
 - Diámetro estimado: $d_b = 12$ mm
 - De ser necesaria armadura comprimida se supondrá que la distancia de la fibra de hormigón más comprimida al centro de gravedad de la armadura comprimida es $d' = 0,023$ m.
- Solicitación: - $M_u = 17,1$ kNm (en rigor kNm/m)

Resolución analítica:

Para $f'_c = 20$ MPa se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 17$ MPa = 17000 kN/m²
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a\text{ mín}} = 1,4 / f^*_c$ (MPa) = 0,08235

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 17,1 \text{ kNm} / 0,9 = 19 \text{ kNm}$$

$$d = \text{Altura útil} = h - c_c - d_b / 2 = 0,09 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,064 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 19 \text{ kNm} / (17000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,0 \text{ m} \cdot 0,064^2 \text{ m}^2) = 0,27286$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,27286)^{1/2} = 0,326 > k_{a\text{ mín}}$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,326 / 0,85 = 0,38353 > 0,375 \Rightarrow A'_s > 0$$

Se fija $k_c = 0,375$ por lo tanto: - $k_a = k_{a\text{ máx}} = k_c \cdot \beta_1 = 0,375 \cdot 0,85 = 0,31875$
 - $c = 0,375 \cdot 0,064 = 0,024$ m

por lo que la sección de hormigón comprimido tomará un momento constante igual a:

$$M_c = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a\text{ máx}} \cdot (1 - k_{a\text{ máx}} / 2)$$
$$M_c = 17000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,00 \text{ m} \cdot 0,064^2 \text{ m}^2 \cdot 0,31875 \cdot (1 - 0,31875 / 2)$$
$$M_c = 18,66 \text{ kNm}$$

El momento a tomar con A'_s será: $\Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$

$$\Delta M_n = 19 \text{ kNm} - 18,66 \text{ kNm} = 0,34 \text{ kNm} \text{ por lo que}$$

$$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$$
$$A'_s = [0,34 \text{ kNm} / (25 \text{ MPa} \cdot (0,064 \text{ m} - 0,023 \text{ m}))] \cdot 1000 \text{ (mm}^2 \text{ MN)/(m}^2 \text{ kN)}$$
$$A'_s = 334 \text{ mm}^2$$

El valor de f'_s utilizado en la expresión anterior surge del siguiente planteo de semejanza de triángulos que parte de suponer una deformación máxima en el hormigón comprimido de 0,003:

$$\varepsilon'_s = 0,003 \cdot (0,024 \text{ m} - 0,023 \text{ m}) / 0,024 \text{ m} = 0,000125 < \varepsilon_y = f_y / E_s = 0,0025 \Rightarrow$$

$$f'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s = 0,000125 \cdot 200000 = 25 \text{ MPa}$$

y por lo tanto se tiene:

$$A_s = k_{a \text{ máx}} \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y =$$

$$A_s = 0,31875 \cdot 17 \text{ MPa} \cdot 1000 \text{ mm} \cdot 64 \text{ mm} / 500 \text{ MPa} + 334 \text{ mm}^2 \cdot 25 \text{ MPa} / 500 \text{ MPa} =$$

$$A_s = 694 \text{ mm}^2 + 17 \text{ mm}^2 = 711 \text{ mm}^2 \quad (\text{en rigor las armaduras estarían en mm}^2/\text{m})$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 17,1 \text{ kNm} / 0,9 = 19 \text{ kNm}$$

$$d = \text{Altura útil} = h - c_c - d_b / 2 = 0,09 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,064 \text{ m}$$

Ingresando a la tabla con:

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 19 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 20000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,00 \text{ m} \cdot 0,064^2 \text{ m}^2)$$

$$m_n = 0,27286$$

se observa que el valor de "m_n" es mayor que el aceptado para armadura simple por lo que se dispondrá armadura doble. Según la tabla, para $f'_c = 20 \text{ MPa}$ se tiene:

$$m_{n \text{ máx}} = 0,268 \quad \text{y} \quad k_{a \text{ máx}} = 0,319$$

$$\text{El momento a tomar con } A'_s \text{ será: } \Delta M_n = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') = M_n - M_c$$

donde M_c es el máximo momento que puede tomar la sección de hormigón comprimido

$$M_c = m_{n \text{ máx}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2 = 0,268 \cdot 0,85 \cdot 20000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,00 \text{ m} \cdot 0,064^2 \text{ m}^2$$

$$M_c = 18,66 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_n = 19 \text{ kNm} - 18,66 \text{ kNm} = 0,34 \text{ kNm}$$

Obtendremos la tensión de A'_s de la tabla auxiliar para $f_y = 500 \text{ MPa}$ y $d' / d = 0,023 \text{ m} / 0,064 \text{ m} = 0,35938$. La tensión se obtiene por extrapolación y vale 25 MPa

$$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$$

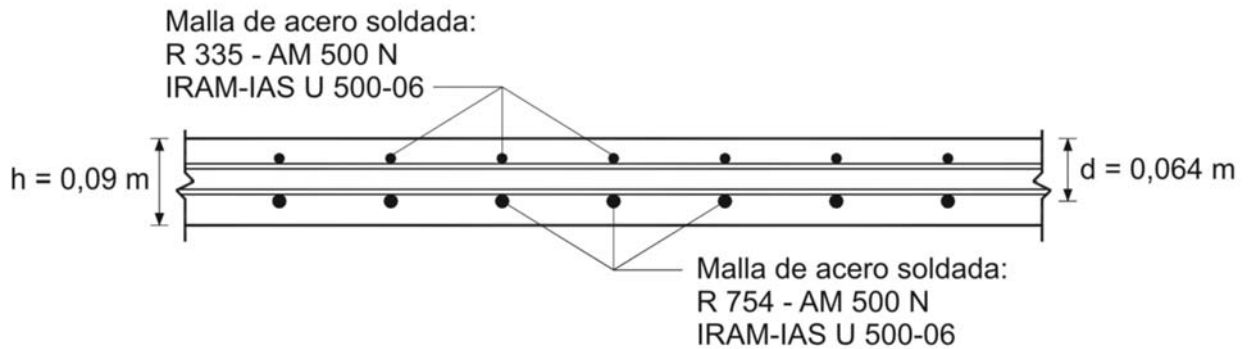
$$A'_s = [0,34 \text{ kNm} / (25 \text{ MPa} \cdot (0,064 \text{ m} - 0,023 \text{ m}))] \cdot 1000 \text{ (mm}^2 \text{ MN)/(m}^2 \text{ kN))} = 334 \text{ mm}^2$$

$$A_s = k_{a \text{ máx}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y =$$

$$A_s = 0,319 \cdot 0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot 1000 \text{ mm} \cdot 64 \text{ mm} / 500 \text{ MPa} + 334 \text{ mm}^2 \cdot 25 \text{ MPa} / 500 \text{ MPa}$$

$$A_s = 694 \text{ mm}^2 + 17 \text{ mm}^2 = 711 \text{ mm}^2$$

Armado:



La altura útil utilizada en el cálculo coincide con la obtenida al armar la sección.

Ejemplo 2.I.6

Enunciado: Calcular M_u para la siguiente viga

Materiales: - Hormigón: H-25 ($f'_c = 25$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

Sección transversal: - $b_w = 0,12$ m ; $h = 0,40$ m

Estribos: - Recubrimiento $c_c = 0,02$ m
 - Diámetro estimado $d_{be} = 6$ mm

Armadura longitudinal: - $A_s = 2 d_b 16$; $A'_s = 0$

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25$ MPa se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25$ MPa = 21250 kN/m²
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c$ (MPa) = 0,06588

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

Suponiendo que la sección no se encuentra sobredimensionada con armadura simple⁴ se tendrá que:

$$M_u = \phi \cdot M_n = 0,90 \cdot M_n$$

⁴ Si la armadura " A_s " fuera mayor que la necesaria para equilibrar la fuerza desarrollada por la sección de hormigón comprimido para una deformación máxima de 0,003 en el hormigón y de 0,005 en el acero traccionado, habría que aplicar un coeficiente de reducción de resistencia " ϕ " menor que 0,90. En estas condiciones la armadura que se coloque en exceso de la necesaria para producir el equilibrio anteriormente mencionado resulta inefectiva dado que el incremento de momento resistente que se produce en términos de " M_n " se ve más que contrarrestado por la disminución de " ϕ " obteniéndose secciones que cada vez presentan menores " M_u ".

$$a = A_s \cdot f_y / (b_w \cdot f'_c) = 2 \cdot (201 \text{ mm}^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{mm}^2) \cdot 420 \text{ MPa} / (0,12 \text{ m} \cdot 21,25 \text{ MPa})$$

$$a = 0,06621 \text{ m} \quad \text{por lo tanto}$$

$$k_a = a / d = 0,06621 \text{ m} / 0,366 \text{ m} = 0,18091 > k_{a \text{ mín}}$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,18091 / 0,85 = 0,213 < 0,375 \Rightarrow \varepsilon_s > 0,005 \quad \text{y corresponde } \phi = 0,90$$

$$M_n = f'_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a / 2)$$

$$M_n = 21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2 \cdot 0,18091 \cdot (1 - 0,18091 / 2)$$

$$M_n = 56,20 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad M_u = 0,9 \cdot 56,20 \text{ kNm} = 50,58 \text{ kNm}$$

Se hubiera llegado al mismo resultado haciendo:

$$a) \quad M_n = f'_c \cdot b_w \cdot a \cdot (d - a / 2)$$

$$M_n = 21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,06621 \text{ m} \cdot (0,366 \text{ m} - 0,06621 \text{ m} / 2) = 56,20 \text{ kNm}$$

$$b) \quad z = k_z \cdot d ; \quad k_z = 1 - k_a / 2 = 1 - 0,18091 / 2 = 0,90955 ; \quad M_n = A_s \cdot z \cdot f_y = A_s \cdot k_z \cdot d \cdot f_y$$

$$M_n = 2 \cdot (201 \text{ mm}^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{mm}^2) \cdot 0,90955 \cdot 0,366 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa} \cdot 1000 \text{ kN/MN}$$

$$M_n = 56,21 \text{ kNm}$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

Suponiendo que la sección no se encuentra sobredimensionada con armadura simple se tendrá que:

$$M_u = \phi \cdot M_n = 0,90 \cdot M_n$$

Ingresando a la tabla con:

$$a = A_s \cdot f_y / (b_w \cdot 0,85 \cdot f'_c) = 2 \cdot (201 \text{ mm}^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{mm}^2) \cdot 420 \text{ MPa} / (0,12 \text{ m} \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa})$$

$$a = 0,06621 \text{ m} \quad \text{por lo tanto}$$

$$k_a = a / d = 0,06621 \text{ m} / 0,366 \text{ m} = 0,18091$$

Se observa que "k_a" se encuentra entre las cuantías límites por lo que se extrae el valor correspondiente de "m_n":

$$\text{Sin interpolar:} \quad m_n = 0,164$$

$$\text{Interpolando:} \quad m_n = 0,164 + (0,172 - 0,164) \cdot (0,18091 - 0,18) / (0,19 - 0,18) = 0,16473$$

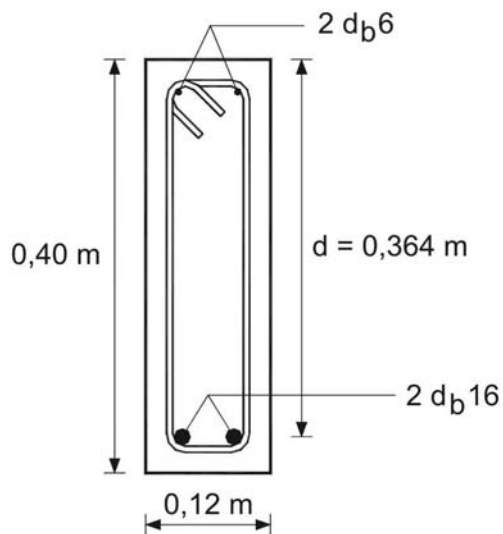
El no interpolar en este caso implicaría un error menor al 1%.

$$M_n = m_n \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2 = 0,16473 \cdot 0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,366^2 \text{ m}^2$$

$$M_n = 56,27 \text{ kNm}$$

$$M_u = 0,9 \cdot 56,27 \text{ kNm} = 50,64 \text{ kNm}$$

Como se observa, el valor es casi coincidente con el arrojado por la resolución analítica.



Armado:

La pequeña diferencia entre la altura útil adoptada en los cálculos (0,366 m) y la altura útil resultante (0,364 m) se debe a que las barras se encuentran apoyadas sobre el comienzo de la zona curva de los estribos. Rehaciendo los cálculos se llega a los siguientes momentos:

$$M_n = 55,87 \text{ kNm} \Rightarrow M_u = 0,9 \cdot M_n = 50,28 \text{ kNm}$$

prácticamente iguales a los valores anteriores.

Ejemplo 2.I.7

Enunciado: Calcular M_u para la siguiente sección

Materiales:

- Hormigón: H-25 ($f'_c = 25 \text{ MPa}$)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

Sección transversal:

- $b_w = 0,12 \text{ m}$; $h = 0,40 \text{ m}$

Estribos:

- Recubrimiento: $c_c = 0,02 \text{ m}$
- Diámetro estimado: $d_{be} = 6 \text{ mm}$

Armadura longitudinal:

- $A_s = 2 \text{ db } 16$; $A'_s = 2 \text{ db } 16$

Resolución analítica:

- Para $f'_c = 25 \text{ MPa}$ se tiene que:
- $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c \text{ (MPa)} = 0,06588$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,366 \text{ m}$$

$$d' = c_c + d_{be} + d_{b \text{ superior}} / 2 = 0,02 \text{ m} + 0,006 \text{ m} + 0,008 \text{ m} = 0,034 \text{ m}$$

Al ser iguales A_s y A'_s esto indica que la sección tiene un dimensionado "arbitrario" y por lo tanto no puede afirmarse que ambas armaduras estarán en fluencia, de hecho podría afirmarse que A'_s no puede estar en fluencia. En estos casos el abordaje más satisfactorio suele ser solucionar el problema por aproximaciones sucesivas dando distintas posiciones al eje neutro hasta lograr el equilibrio interno de fuerzas. Las ecuaciones a considerar son:

$$a = \beta_1 \cdot c$$

$$C = 0,85 \cdot f'_c \cdot a \cdot b_w$$

$$\varepsilon'_s = 0,003 \cdot (c - 0,034 \text{ m}) / c \quad \text{si} \quad \varepsilon'_s \geq \varepsilon_y = f_y / E_s = 0,0021 \Rightarrow f'_s = f_y = 420 \text{ MPa}$$

$$\text{si} \quad \varepsilon'_s < \varepsilon_y \Rightarrow f'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s = \varepsilon'_s \cdot 200000 \text{ MPa}$$

Cabe acotar que en algunos casos de disposición más o menos arbitraria de armaduras, la armadura “comprimida” puede llegar a estar traccionada por lo que se debe estar atento al signo de la deformación.

$$C'_s = f'_s \cdot A'_s$$

$$T = f_y \cdot A_s$$

Dado que se está obteniendo la resistencia a flexión simple la resultante de las fuerzas internas debe ser nula, es decir: $T = C + C'_s$

Cuando se verifique la condición anterior el momento resistente se puede calcular tomando momentos respecto a la armadura traccionada como:

$$M_n = C \cdot (d - a / 2) + C'_s \cdot (d - d')$$

La tabla siguiente muestra el proceso de aproximaciones sucesivas que lleva a la solución

c [m]	ε'_s	f'_s [MPa]	C'_s [kN]	C [kN]	T [kN]	$C'_s + C - T$ [kN]	M_n [kNm]
0,100	0,00198	396,0	159,19	216,75	168,84	207,10	
0,050	0,00096	192,0	77,18	108,38	168,84	16,72	
0,025	-0,00108	-216,0	-86,83	54,19	168,84	-201,48	
0,040	0,00045	90,0	36,18	86,70	168,84	-45,96	
0,045	0,00073	146,7	58,96	97,54	168,84	-12,34	
0,047	0,00083	166,0	66,71	101,87	168,84	-0,25	57,40
0,048	0,00088	175,0	70,35	104,04	168,84	5,55	

Por lo tanto: $M_u = 0,90 \cdot M_n = 0,90 \cdot 57,40 \text{ kNm} = 51,66 \text{ kNm}$

Para casos de armaduras simétricas con recubrimientos usuales puede obtenerse una buena aproximación de “ M_n ” haciendo:

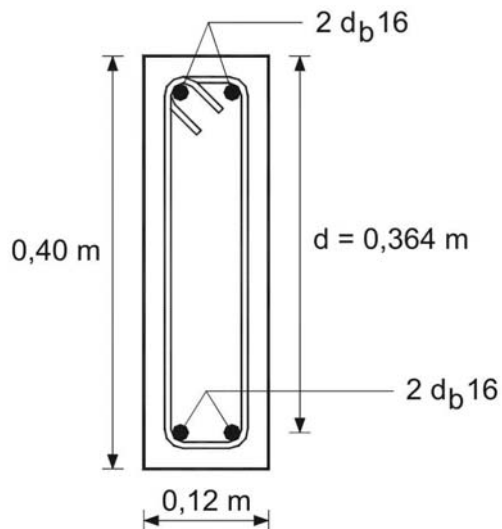
$$M_n \approx A_s \cdot f_y \cdot (d - d')$$

$$M_n = (402 \text{ mm}^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{mm}^2) \cdot (420 \text{ MPa} \cdot 1000 \text{ kN/MN}) \cdot (0,366 \text{ m} - 0,034 \text{ m})$$

$$M_n = 56,05 \text{ kNm}$$

que en este caso arroja un resultado que difiere del “correcto” en alrededor del 2%.

Intentar solucionar este tipo de problemas mediante el uso de tablas es tan laborioso que resulta conveniente abordarlos directamente en forma analítica.



Armado:

Como en el ejemplo anterior, las pequeñas diferencias entre el valor de “d” adoptado en los cálculos y el “real” no tienen significación en los resultados y, por supuesto, tienen implicancias menores a las que surgen de las imperfecciones de colocación inevitables en cualquier obra.

Ejemplo 2.I.8

Enunciado: Calcular la altura total de una viga rectangular de modo de obtener máxima rigidez sin que la misma resulte sobredimensionada en flexión.

Materiales:

- Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

Sección transversal:

- Por razones de hormigonado se fija $h/b_w \leq 4$ y $b_w \geq 0,12$ m

Estribos:

- Recubrimiento: $c_c = 0,02$ m
- Diámetro estimado: $d_{be} = 6$ mm

Armadura longitudinal:

- Diámetro estimado: $d_b = 12$ mm

Solicitación:

- $M_u = 20$ kNm (A los fines del ejercicio se supone que M_u no variará significativamente al modificar la altura de la viga)

Resolución analítica:

- Para $f'_c = 20$ MPa se tiene que:
- $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 17,00$ MPa = 17000 kN/m²
 - $\beta_1 = 0,85$
 - $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c$ (MPa) = 0,08235

$$M_n = M_u / \phi = 20 / 0,90 = 22,22 \text{ kNm}$$

Para obtener la mayor rigidez despejaremos la mayor altura útil, es decir, adoptaremos cuantía mínima.

$$M_n = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a / 2) = 17000 \text{ kN/m}^2 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot 0,08235 \cdot (1 - 0,08235 / 2)$$

$$M_n = 1342,31 \text{ kN/m}^2 \cdot b_w \cdot d^2$$

Si adoptamos $b_w = 0,12$ m obtendremos:

$$d = [22,22 \text{ kNm} / (1342,31 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m})]^{1/2} = 0,37 \text{ m}$$

$$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0,37 \text{ m} + 0,02 \text{ m} + 0,006 \text{ m} + 0,006 \text{ m} = 0,402 \text{ m}$$

La altura anterior verifica la condición: $h / b_w = 0,40 \text{ m} / 0,12 \text{ m} = 3,33 < 4$

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0,12$ m y $h = 0,40$ m

Aunque en este caso no ha sido necesario efectuar redondeos importantes para obtener una altura práctica de construir, recalcularemos la cuantía para obtener la armadura de flexión necesaria⁵.

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22,22 \text{ kNm} / (17000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2) = 0,08043$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,08043)^{1/2} = 0,08395 > k_{a \text{ min}} = 0,08235$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,08395 / 0,85 = 0,099 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0 \text{ lo cual resulta obvio}$$

$$A_s = k_a \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,08395 \cdot 17 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 150 \text{ mm}^2$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$M_n = M_u / \phi = 20 \text{ kNm} / 0,90 = 22,22 \text{ kNm}$$

De la tabla se obtiene el "m_n" asociado al "k_a" mínimo (cuantía mínima) correspondiente al hormigón del ejemplo.

$$k_{a \text{ min}} = 0,082 \Rightarrow m_n = 0,079 \text{ y dado que}$$

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) \text{ se puede despejar}$$

$$b_w \cdot d^2 = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot m_n) = 22,22 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 20000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,079) = 0,0165 \text{ m}^3$$

adoptando $b_w = 0,12$ m queda

$$d = (0,0165 \text{ m}^3 / 0,12 \text{ m})^{1/2} = 0,37 \text{ m}$$

$$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0,37 \text{ m} + 0,02 \text{ m} + 0,006 \text{ m} + 0,006 \text{ m} = 0,402 \text{ m}$$

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0,12$ m y $h = 0,40$ m

⁵ En este caso no son de esperar diferencias significativas pero éstas pueden ser muy importantes en otras situaciones tales como las losas de edificios en las que redondeos de algunos milímetros resultan significativos frente a su altura total.

Se calculan, utilizando la tabla, las armaduras para la sección anterior.

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22,22 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 20000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2)$$

$$m_n = 0,08043$$

Se obtiene:

Sin interpolar: $k_a = 0,082$

Interpolando: $k_a = 0,082 + (0,090 - 0,082) \cdot (0,08043 - 0,079) / (0,086 - 0,079) =$
 $k_a = 0,08363$

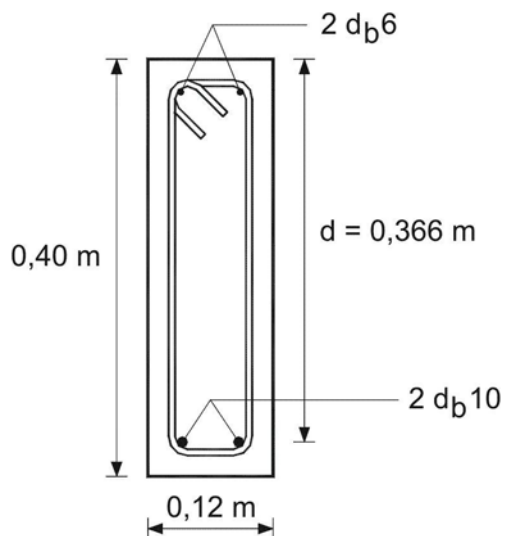
Como se observa, aún sin interpolar el error obtenido es menor al 2% por lo que podría utilizarse el valor leído en forma directa.

El valor de “ k_a ” obtenido se encuentra, según los límites indicados en la tabla, ligeramente por encima de la cuantía mínima y, obviamente, muy por debajo de los valores que requieren de doble armadura por lo que resulta:

$$A_s = k_a \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,08363 \cdot 0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_s = 149 \text{ mm}^2$$

Armado:



La diferencia entre la altura útil utilizada en los cálculos y la “real” resulta despreciable y sin consecuencias significativas sobre el resultado del ejemplo.

Ejemplo 2.I.9

Enunciado: Por requerimientos arquitectónicos se debe proyectar una viga rectangular de modo de obtener la menor altura posible. Como condición adicional no se recurrirá al uso de armadura de compresión ($A'_s = 0$)⁶.

Materiales:

- Hormigón: H-20 ($f'_c = 20 \text{ MPa}$)

- Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

⁶ Cabe acotar que un cálculo de este tipo debería ir acompañado siempre de una verificación de flechas y de rigidez relativa respecto a elementos que utilicen a la viga como apoyo (p.e. losas).

- Sección transversal: - Por razones arquitectónicas se fija $b_w \leq 0,25$ m
- Estribos: - Recubrimiento: $c_c = 0,02$ m
- Diámetro estimado: $d_{be} = 8$ mm
- Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: $d_b = 16$ mm
- Solicitación: - $M_u = 20$ kNm (A los fines del ejercicio se supone que M_u no variará significativamente al modificar la altura de la viga)

Resolución analítica:

- Para $f'_c = 20$ MPa se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 17,00$ MPa = 17000 kN/m²
- $\beta_1 = 0,85$
- $k_{a \text{ mín}} = 1,4 / f^*_c$ (MPa) = $0,08235$

$$M_n = M_u / \phi = 20 \text{ kNm} / 0,90 = 22,22 \text{ kNm}$$

Adoptaremos la máxima cuantía que todavía conduce a $A'_s = 0$ es decir, la correspondiente a una profundidad del eje neutro dada por una deformación máxima en el hormigón de $0,003$ y una deformación en el acero traccionado de $0,005$.

$$k_{c \text{ máx}} = c_{\text{máx}} / d = 0,375 \Rightarrow k_a = k_{a \text{ máx}} = \beta_1 \cdot k_{c \text{ máx}} = 0,85 \cdot k_{c \text{ máx}} = 0,31875$$

$$M_n = f^*_c \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_a \cdot (1 - k_a / 2) = 17000 \text{ kN/m}^2 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot 0,31875 \cdot (1 - 0,31875 / 2)$$

$$M_n = 4555,13 \text{ kN/m}^2 \cdot b_w \cdot d^2$$

Para obtener la mínima altura posible adoptamos el mayor ancho permitido, es decir:

$$b_w = 0,25 \text{ m} \quad \text{pudiendo ahora despejar}$$

$$d = [22,22 \text{ kNm} / (4555,13 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,25 \text{ m})]^{1/2} = 0,14 \text{ m}$$

$$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0,14 \text{ m} + 0,02 \text{ m} + 0,008 \text{ m} + 0,008 \text{ m} = 0,176 \text{ m}$$

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0,25$ m y $h = 0,18$ m

Como en el caso del ejemplo anterior, aunque en este caso no ha sido necesario efectuar redondeos importantes para obtener una altura práctica de construir, recalcularemos la cuantía para obtener la armadura de flexión necesaria.

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,18 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,008 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,144 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22,22 \text{ kNm} / (17000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 0,144^2 \text{ m}^2) = 0,25213$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,25213)^{1/2} = 0,29592 > k_{a \text{ mín}}$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,29592 / 0,85 = 0,348 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0$$

$$A_s = k_a \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,29592 \cdot 17 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 144 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 431 \text{ mm}^2$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$M_n = M_u / \phi = 20 \text{ kNm} / 0,90 = 22,22 \text{ kNm}$$

De la tabla se obtiene el “ m_n ” asociado al “ k_a ” máximo (cuantía máxima con armadura simple) correspondiente al hormigón del ejemplo.

$$k_{a \text{ máx}} = 0,319 \Rightarrow m_n = 0,268 \quad \text{y dado que}$$

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) \quad \text{se puede despejar}$$

$$b_w \cdot d^2 = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot m_n) = 22,22 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 20000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,268) = 0,00488 \text{ m}^3$$

Para obtener la mínima altura posible adoptamos el mayor ancho permitido, es decir:

$$b_w = 0,25 \text{ m} \quad \text{pudiendo ahora despejar}$$

$$d = (0,00488 \text{ m}^3 / 0,25 \text{ m})^{1/2} = 0,14 \text{ m}$$

$$h = d + c_c + d_{be} + d_b / 2 = 0,14 \text{ m} + 0,02 \text{ m} + 0,008 \text{ m} + 0,008 \text{ m} = 0,176 \text{ m}$$

Se adopta entonces una sección con: $b_w = 0,25 \text{ m}$ y $h = 0,18 \text{ m}$

Se calculan, utilizando la tabla, las armaduras para la sección anterior.

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,18 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,008 \text{ m} - 0,008 \text{ m} = 0,144 \text{ m}$$

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 22,22 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 20000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 0,144^2 \text{ m}^2)$$

$$m_n = 0,25213$$

Se obtiene:

$$\text{Sin interpolar: } k_a = 0,300$$

$$\text{Interpolando: } k_a = 0,292 + (0,300 - 0,292) \cdot (0,25213 - 0,249) / (0,255 - 0,249) =$$

$$k_a = 0,29617$$

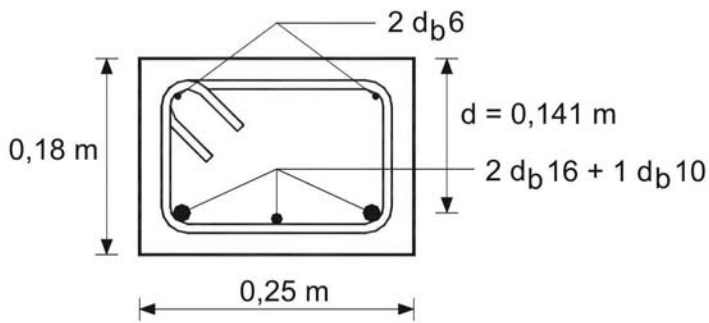
Como se observa, aún sin interpolar el error obtenido es algo mayor al 1% por lo que podría utilizarse el valor leído en forma directa.

El valor de “ k_a ” obtenido se encuentra, según los límites indicados en la tabla, ligeramente por debajo de la cuantía a partir de la que se requiere doble armadura y, obviamente, muy por encima de los valores correspondientes a la cuantía mínima por lo tanto:

$$A_s = k_a \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,29617 \cdot 0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 144 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_s = 432 \text{ mm}^2$$

Armado:



Rehaciendo los cálculos para el valor "real" de "d" se llega a:

$$A_s = 444 \text{ mm}^2$$

Valor que difiere en sólo un 3% del anteriormente obtenido, resultando adecuadamente cubierto por la armadura adoptada.

2.II.- SECCIONES CON ALAS

Ejemplo 2.II.1

Enunciado: Calcular las armaduras de una viga "T" bajo losa para las siguientes condiciones:

Materiales: - Hormigón: H-25 ($f'_c = 25 \text{ MPa}$)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

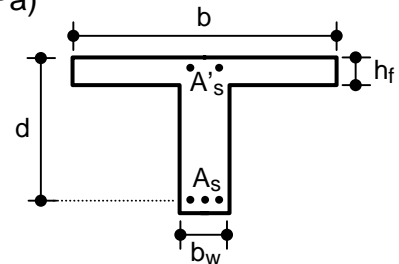
Sección transversal del nervio: - $b_w = 0,12 \text{ m}$; $h = 0,40 \text{ m}$

Estribos: - Recubrimiento: $c_c = 0,02 \text{ m}$
- Diámetro estimado: $d_{be} = 6 \text{ mm}$

Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: $d_b = 12 \text{ mm}$

Solicitación: - $M_u = 52 \text{ kNm}$

Otras características: - La viga tiene una luz de 5,50 metros
- Las losas que apoyan sobre la viga tienen un espesor de 0,10 m
- La distancia libre a las vigas paralelas más próximas es de 4,80 m



Determinación del ancho efectivo y espesor de alas

Para completar la geometría de la sección transversal será necesario calcular el ancho efectivo "b" a partir de lo especificado en el CIRSOC 201-2005:

- $b = b_w$ (ancho del alma) + b_e losa izquierda + b_e losa derecha
- $b \leq \text{Luz de la viga} / 4$
- A cada lado del nervio se tendrá que $b_e = \text{mínimo} (8 \cdot h_f ; \frac{1}{2} \text{ distancia libre al alma de la viga adyacente})$

La condición c) indica que: $b_e = \text{mínimo} (8 \cdot 0,10 \text{ m} ; 4,80 \text{ m} / 2) = 0,80 \text{ m}$
 La condición b) conduce a: $b \leq 5,50 \text{ m} / 4 = 1,375 \text{ m}$
 La condición a) resulta en: $b = 0,12 \text{ m} + 0,80 \text{ m} + 0,80 \text{ m} = 1,72 \text{ m}$

por lo que decide la condición b) y se adopta: $b = 1,37 \text{ m}$

Dado que ambas losas laterales tienen igual espesor se adopta $h_f = 0,10 \text{ m}$

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25 \text{ MPa}$ se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$

$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 52 \text{ kNm} / 0,9 = 57,78 \text{ kNm}$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$

$A_{s \text{ mín}} = 1,4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1,4 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 147 \text{ mm}^2$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$k_a \leq h_f / d = 0,10 \text{ m} / 0,368 \text{ m} = 0,272$

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2) = 57,78 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,37 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2) = 0,01466$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,01466)^{1/2} = 0,01476 < 0,272$ por lo tanto $a < h_f$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0,01476 / 0,85 = 0,017 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0$

$A_s = k_a \cdot f^*_c \cdot b \cdot d / f_y = 0,01476 \cdot 21,25 \text{ MPa} \cdot 1370 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$
 $A_s = 377 \text{ mm}^2 > A_{s \text{ mín}} = 147 \text{ mm}^2$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 52 \text{ kNm} / 0,9 = 57,78 \text{ kNm}$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$

En secciones con alas la cuantía mínima recién puede verificarse al contrastarla con la armadura total calculada. De la tabla se obtiene que el valor de "k_a" para calcular la armadura mínima es 0,066.

$A_{s \text{ mín}} = k_{a \text{ mín}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,066 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$
 $A_{s \text{ mín}} = 147 \text{ mm}^2$

Suponiendo en primera instancia que $a \leq h_f$ se ingresa a la tabla con:

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2) = 57,78 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,37 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2)$$

$$m_n = 0,01466$$

Tal como se indica en la tabla, para valores tan pequeños resulta:

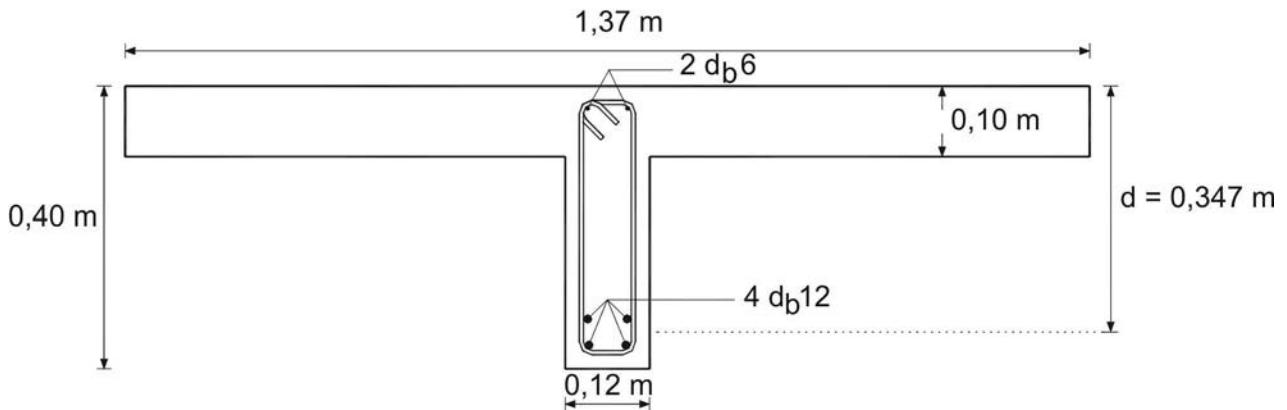
$$k_a \approx m_n = 0,01466$$

El valor de k_a se encuentra claramente por debajo de los valores que requieren doble armadura por lo que resulta:

$$A_s = k_a \cdot f'_c \cdot b \cdot d / f_y = 0,01466 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 1370 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_s = 374 \text{ mm}^2 > A_{s \text{ m\u00edn}} = 147 \text{ mm}^2$$

Armado:



Si se recalcula la armadura con la altura \u00fatil $d = 0,347 \text{ m}$ se obtiene una armadura: $A_s = 400 \text{ mm}^2$ la que resulta adecuadamente cubierta por las barras adoptadas.

Ejemplo 2.II.2

Enunciado: Calcular las armaduras de la viga "T" del ejemplo anterior para:

Solicitaci\u00f3n: - $M_u = 20 \text{ kNm}$

Resoluci\u00f3n anal\u00edtica:

Para $f'_c = 25 \text{ MPa}$ se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 20 \text{ kNm} / 0,9 = 22,22 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$$

$$A_{s \text{ m\u00edn}} = 1,4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1,4 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 147 \text{ mm}^2$$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$$k_a \leq h_f / d = 0,10 \text{ m} / 0,368 \text{ m} = 0,272$$

$$m_n = M_n / (f'_c \cdot b \cdot d^2) = 22,22 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,37 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2) = 0,00564$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,00564)^{1/2} = 0,00565 < 0,272 \quad \text{por lo tanto } a < h_f$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,00565 / 0,85 = 0,007 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0$$

$$A_s = k_a \cdot f'_c \cdot b \cdot d / f_y = 0,00565 \cdot 21,25 \text{ MPa} \cdot 1370 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_s = 144 \text{ mm}^2 < A_{s \text{ mín}} = 147 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto se adopta $A_s = A_{s \text{ mín}} = 147 \text{ mm}^2$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 20,00 \text{ kNm} / 0,9 = 22,22 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$$

En secciones con alas la cuantía mínima recién puede verificarse al contrastarla con la armadura total calculada. De la tabla se obtiene que el valor de "k_a" para calcular la armadura mínima es 0,066.

$$A_{s \text{ mín}} = k_{a \text{ mín}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,066 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 120 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_{s \text{ mín}} = 147 \text{ mm}^2$$

Suponiendo en primera instancia que $a \leq h_f$ se ingresa a la tabla con:

$$m_n = M_n / (0,85 \cdot f'_c \cdot b \cdot d^2) = 22,22 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,37 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2)$$

$$m_n = 0,00564$$

Tal como se indica en la tabla, para valores tan pequeños resulta:

$$k_a \approx m_n = 0,0056$$

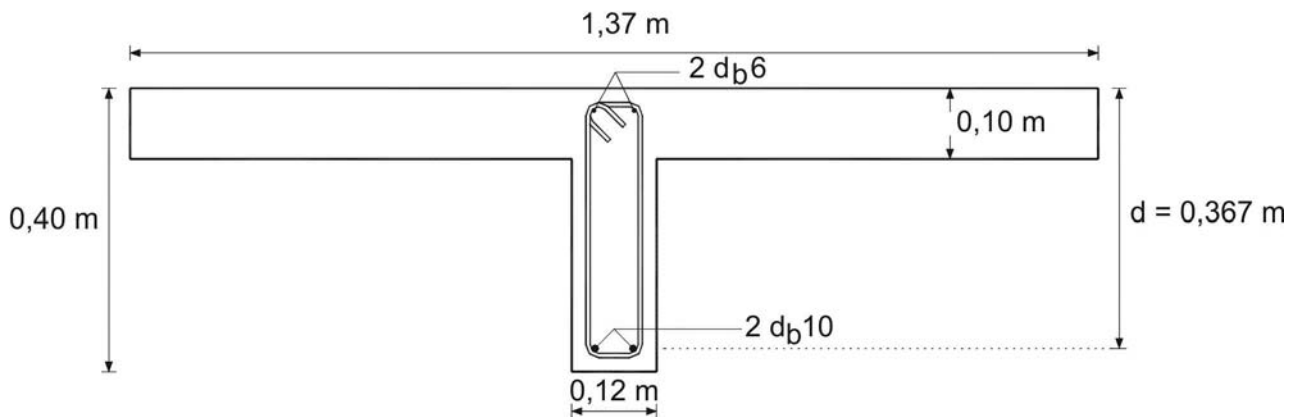
El valor de k_a se encuentra claramente por debajo de los valores que requieren doble armadura por lo que resulta:

$$A_s = k_a \cdot f'_c \cdot b \cdot d / f_y = 0,00564 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 1370 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_s = 144 \text{ mm}^2 < A_{s \text{ mín}} = 147 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto se adopta $A_s = A_{s \text{ mín}} = 147 \text{ mm}^2$

Armado:



Ejemplo 2.II.3

Enunciado: Calcular las armaduras de una viga "L" bajo losa para las siguientes condiciones:

Materiales: - Hormigón: H-25 ($f'_c = 25$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

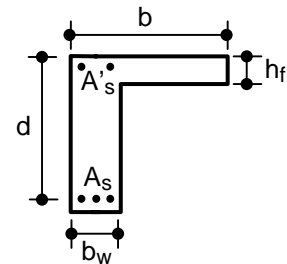
Sección transversal del nervio: - $b_w = 0,25$ m ; $h = 0,40$ m

Estribos: - Recubrimiento: $c_c = 0,02$ m
 - Diámetro estimado: $d_{be} = 6$ mm

Armadura longitudinal: - Diámetro estimado: $d_b = 12$ mm

Solicitación: - $M_u = 380$ kNm

Otras características: - La viga tiene una luz de 5,00 metros
 - La losa que apoya sobre la viga tiene un espesor de 0,09 m
 - La distancia libre a la viga paralela más próxima es de 4,20 metros.



Determinación del ancho efectivo y espesor de alas

Para completar la geometría de la sección transversal será necesario calcular el ancho efectivo "b" a partir de lo especificado en el CIRSOC 201-2005:

- $b = b_w$ (ancho del alma) + b_e
- $b_e = \text{mínimo} (6 \cdot h_f ; \frac{1}{2} \text{ distancia libre al alma de la viga adyacente; luz viga} / 12)$

La condición b) indica que: $b_e = \text{mínimo} (6 \cdot 0,09 \text{ m} ; 4,20 \text{ m} / 2 ; 5,00 \text{ m} / 12) = 0,42 \text{ m}$
La condición a) resulta en: $b = 0,25 \text{ m} + 0,42 \text{ m} = 0,67 \text{ m}$

Además se tendrá que: $h_f = 0,09 \text{ m}$

Resolución analítica:

Para $f'_c = 25 \text{ MPa}$ se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 21,25 \text{ MPa} = 21250 \text{ kN/m}^2$
- $\beta_1 = 0,85$

$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 380 \text{ kNm} / 0,9 = 422,22 \text{ kNm}$

$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$

$A_{s \text{ mín}} = 1,4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1,4 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 307 \text{ mm}^2$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$k_a \leq h_f / d = 0,09 \text{ m} / 0,368 \text{ m} = 0,245$

$m_n = M_n / (f^*_c \cdot b \cdot d^2) = 422,22 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,67 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2) = 0,21898$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,21898)^{1/2} = 0,250 > 0,245$ por lo tanto $a > h_f$

La sección no puede considerarse como rectangular por lo que se la descompone en "alma" (subíndice "w") y "ala" (subíndice "f"). La fuerza en el hormigón del ala y el momento que equilibra resultan iguales a:

$C_f = f^*_c \cdot (b - b_w) \cdot h_f = 21250 \text{ kN/m}^2 \cdot (0,67 \text{ m} - 0,25 \text{ m}) \cdot 0,09 \text{ m} = 803,25 \text{ kN}$

$M_{nf} = C_f \cdot (d - h_f / 2) = 803,25 \text{ kN} \cdot (0,368 \text{ m} - 0,09 \text{ m} / 2) = 259,45 \text{ kNm}$

La armadura necesaria para equilibrar las compresiones en las alas resulta:

$A_{sf} = C_f / f_y = [803,25 \text{ kN} / (420 \text{ MPa})] \cdot 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN}) = 1913 \text{ mm}^2$

El momento a equilibrar con el hormigón del alma resulta:

$M_{nw} = M_n - M_{nf} = 422,22 \text{ kNm} - 259,45 \text{ kNm} = 162,77 \text{ kNm}$

$m_n = M_{nw} / (f^*_c \cdot b_w \cdot d^2) = 162,77 \text{ kNm} / (21250 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2) = 0,22625$

$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,22625)^{1/2} = 0,26006$

$k_c = k_a / \beta_1 = 0,26006 / 0,85 = 0,306 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0$

$A_{sw} = k_a \cdot f^*_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,26006 \cdot 21,25 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 1211 \text{ mm}^2$

La armadura total resulta:

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 1913 \text{ mm}^2 + 1211 \text{ mm}^2 = 3124 \text{ mm}^2 > A_{s \text{ min}}$$

La armadura anterior es extremadamente difícil de ubicar en el ancho del alma. Se debe recurrir al uso de varias capas de armadura. Esto se debe a que la fuerza de compresión de las alas requiere una gran cantidad de armadura para ser equilibrada. Este fenómeno se hace aún más agudo en el caso de vigas "T". Es un caso en el que claramente debe recurrirse a alturas totales de viga mayores.

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 380 \text{ kNm} / 0,9 = 422,22 \text{ kNm}$$

$$d = h - c_c - d_{be} - d_b / 2 = 0,40 \text{ m} - 0,02 \text{ m} - 0,006 \text{ m} - 0,006 \text{ m} = 0,368 \text{ m}$$

En secciones con alas la cuantía mínima recién puede verificarse al conocer la armadura total calculada. De la tabla se obtiene que el valor de "k_a" para calcular la armadura mínima es 0,066.

$$A_{s \text{ min}} = k_{a \text{ min}} \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,066 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$
$$A_{s \text{ min}} = 307 \text{ mm}^2$$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b". Para ello debe verificarse:

$$k_a \leq h_f / d = 0,09 \text{ m} / 0,368 \text{ m} = 0,245$$

se ingresa a la tabla con:

$$m_n = M_n / (f'_c \cdot b \cdot d^2) = 422,22 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,67 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2) = 0,21898$$

con lo que se obtiene:

sin interpolar: $k_a = 0,252$

interpolando: $k_a = 0,244 + (0,252 - 0,244) \cdot (0,21898 - 0,214) / (0,220 - 0,214) =$
 $k_a = 0,25064$

en cualquier caso $k_a > 0,245$ por lo tanto $a > h_f$

Como en el caso de la resolución analítica, la sección no puede considerarse como rectangular por lo que se la descompone en "alma" (subíndice "w") y "ala" (subíndice "f"). La fuerza en el hormigón del ala y el momento que equilibra resultan iguales a:

$$C_f = 0,85 \cdot f'_c \cdot (b - b_w) \cdot h_f = 0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot (0,67 \text{ m} - 0,25 \text{ m}) \cdot 0,09 \text{ m} = 803,25 \text{ kN}$$

$$M_{nf} = C_f \cdot (d - h_f / 2) = 803,25 \text{ kN} \cdot (0,368 \text{ m} - 0,09 \text{ m} / 2) = 259,45 \text{ kNm}$$

La armadura necesaria para equilibrar las compresiones en las alas resulta:

$$A_{sf} = C_f / f_y = [803,25 \text{ kN} / (420 \text{ MPa})] \cdot 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN}) = 1913 \text{ mm}^2$$

El momento a equilibrar con el hormigón del alma resulta:

$$M_{nw} = M_n - M_{nf} = 422,22 \text{ kNm} - 259,45 \text{ kNm} = 162,77 \text{ kNm}$$

$$m_n = M_{nw} / (0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d^2) = 162,77 \text{ kNm} / (0,85 \cdot 25000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 0,368^2 \text{ m}^2)$$

$$m_n = 0,22625$$

ingresando a la tabla se obtiene

sin interpolar: $k_a = 0,260$

interpolando: $k_a = 0,260 + (0,265 - 0,260) \cdot (0,22625 - 0,226) / (0,230 - 0,226) =$
 $k_a = 0,26031$

Se aprecia que la diferencia entre el valor interpolado y el leído en forma directa difiere en mucho menos del 1%.

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,26031 / 0,85 = 0,306 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0$$

$$A_{sw} = k_a \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,26031 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 368 \text{ mm} / 420 \text{ MPa}$$

$$A_{sw} = 1212 \text{ mm}^2$$

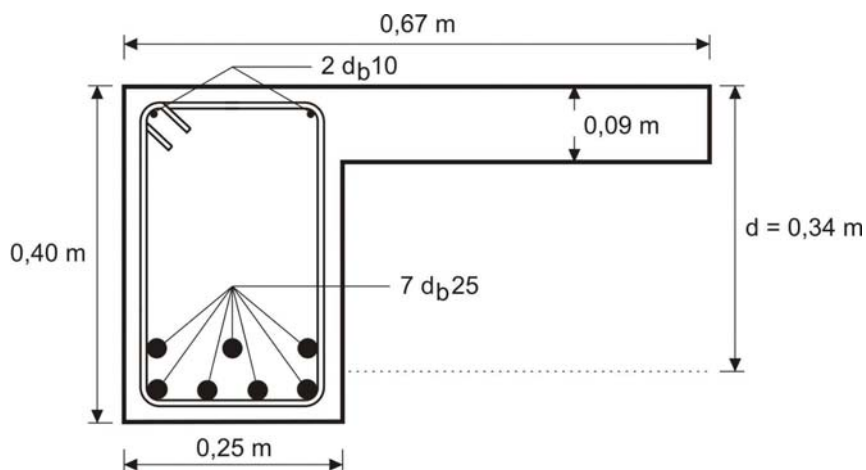
La armadura total resulta:

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 1913 \text{ mm}^2 + 1212 \text{ mm}^2 = 3125 \text{ mm}^2 > A_{s \text{ mín}}$$

Valen los comentarios hechos al finalizar la resolución analítica.

En términos generales cabe acotar que cuando el eje neutro de tensiones cae dentro del alma, el uso de tablas no resulta sensiblemente más práctico que el abordaje analítico.

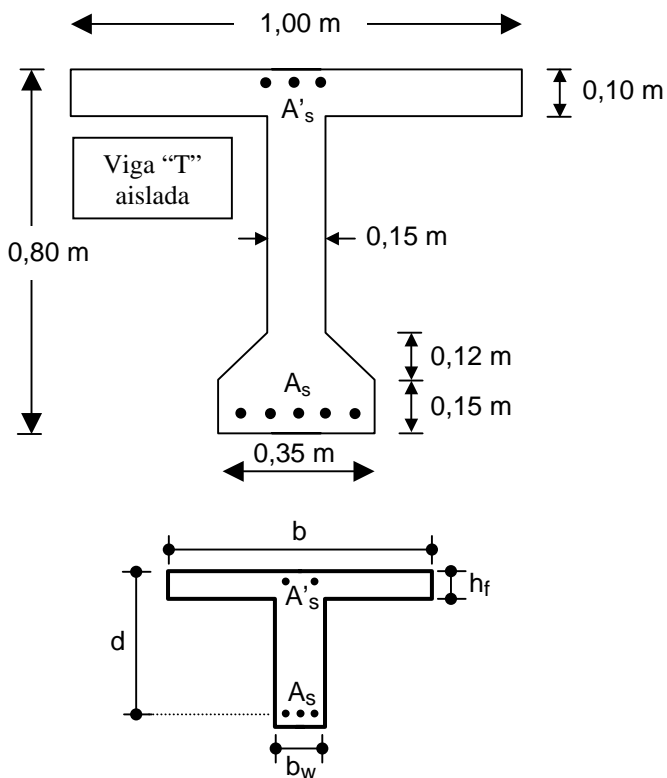
Armado:



Luego de un tanteo previo se llega a la distribución de armaduras de la figura.

Si se recalcula la sección para una altura "d = 0,34 m" se llega a una armadura necesaria "A_s = 3439 mm²" que es adecuadamente cubierta por 7 db25 pero aparece además la necesidad de colocar una armadura comprimida "A'_s = 156 mm²" que se cubre con 2 db10.

Ejemplo 2.II.4



Enunciado: Dimensionar las armaduras de flexión de la sección de la Figura. La distancia entre el filo de hormigón y el centro de gravedad de las armaduras traccionadas y comprimidas es 0,04 m.

Materiales:

- Hormigón: H-30 ($f'_c = 30 \text{ MPa}$)
- Acero: ADN 420 ($f_y = 420 \text{ MPa}$)

Estribos:

- Recubrimiento: $c_c = 20 \text{ mm}$
- Diámetro estimado: $d_{be} = 6 \text{ mm}$

Solicitación: - $M_u = 1440 \text{ kNm}$

Determinación del ancho efectivo

Para completar la geometría de la sección transversal será necesario calcular el ancho efectivo "b" a partir de lo especificado en el CIRSOC 201-2005 para vigas aisladas.

El espesor de alas ($h_f = 0,10 \text{ m}$) verifica la condición de ser mayor que la mitad del ancho del alma ($b_w / 2 = 0,15 \text{ m} / 2 = 0,075 \text{ m}$)

El ancho efectivo máximo está limitado a cuatro veces el ancho del alma es decir:

$$b = 4 \cdot 0,15 \text{ m} = 0,60 \text{ m}$$

por lo que no puede aprovecharse íntegramente el ancho total de losa disponible (1 m).

Resolución analítica:

Para $f'_c = 30 \text{ MPa}$ se tiene que: - $f^*_c = 0,85 \cdot f'_c = 25,5 \text{ MPa} = 25500 \text{ kN/m}^2$
 - $\beta_1 = 0,85$

$$M_n = \text{Momento nominal} = M_u / \phi = 1440 \text{ kNm} / 0,9 = 1600 \text{ kNm}$$

$$d = h - 0,04 \text{ m} = 0,80 \text{ m} - 0,04 \text{ m} = 0,76 \text{ m}$$

$$A_{s \text{ min}} = 1,4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1,4 \text{ MPa} \cdot 150 \text{ mm} \cdot 760 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} = 380 \text{ mm}^2$$

Supondremos en principio que $a \leq h_f$ por lo que la sección se comportará como rectangular de ancho constante e igual a "b" para ello debe verificarse:

$$k_a \leq h_f / d = 0,10 \text{ m} / 0,76 \text{ m} = 0,132$$

$$m_n = M_n / (f_c^* \cdot b \cdot d^2) = 1600 \text{ kNm} / (25500 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,60 \text{ m} \cdot 0,76^2 \text{ m}^2) = 0,18105$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,18105)^{1/2} = 0,20132 > 0,132 \quad \text{por lo tanto } a > h_f$$

Descomponiendo la sección en alas y alma:

$$C_f = f_c^* \cdot (b - b_w) \cdot h_f = 25500 \text{ kN/m}^2 \cdot (0,60 \text{ m} - 0,15 \text{ m}) \cdot 0,10 \text{ m} = 1147,50 \text{ kN}$$

$$M_{nf} = C_f \cdot (d - h_f / 2) = 1147,50 \text{ kN} \cdot (0,76 \text{ m} - 0,10 \text{ m} / 2) = 814,73 \text{ kNm}$$

La armadura necesaria para equilibrar las compresiones en las alas resulta:

$$A_{sf} = C_f / f_y = [1147,50 \text{ kN} / (420 \text{ MPa})] \cdot 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN}) = 2732 \text{ mm}^2$$

El momento a equilibrar con el hormigón del alma resulta:

$$M_{nw} = M_n - M_{nf} = 1600 \text{ kNm} - 814,73 \text{ kNm} = 785,27 \text{ kNm}$$

$$m_n = M_{nw} / (f_c^* \cdot b_w \cdot d^2) = 785,27 \text{ kNm} / (25500 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,15 \text{ m} \cdot 0,76^2 \text{ m}^2) = 0,35544$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 1 - (1 - 2 \cdot 0,35544)^{1/2} = 0,46229$$

$$k_c = k_a / \beta_1 = 0,46229 / 0,85 = 0,544 > 0,375 \Rightarrow A'_s > 0$$

por lo tanto se necesitará doble armadura

Se fija $k_c = 0,375$ por lo tanto:

- $k_a = k_{a \text{ máx}} = k_c \cdot \beta_1 = 0,375 \cdot 0,85 = 0,31875$
- $c = 0,375 \cdot 0,76 \text{ m} = 0,285 \text{ m}$

por lo que la sección de hormigón comprimido tomará un momento constante igual a:

$$M_c = f_c^* \cdot b_w \cdot d^2 \cdot k_{a \text{ máx}} \cdot (1 - k_{a \text{ máx}} / 2)$$

El momento a tomar con A'_s será: $\Delta M_n = M_{nw} - M_c$ es decir,

$$\Delta M_n = 785,27 \text{ kNm} - 25500 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,15 \text{ m} \cdot 0,76^2 \text{ m}^2 \cdot 0,31875 \cdot (1 - 0,31875 / 2)$$

$$\Delta M_n = 193,28 \text{ kNm} \quad \text{por lo que}$$

$$A'_s = \Delta M_n / [f'_s \cdot (d - d')]$$

$$A'_s = [193,28 \text{ kNm} / (420 \text{ MPa} \cdot (0,76 \text{ m} - 0,04 \text{ m}))] \cdot 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN}) = 639 \text{ mm}^2$$

El valor de f'_s utilizado en la expresión anterior surge de:

$$\varepsilon'_s = 0,003 \cdot (0,285 \text{ m} - 0,04 \text{ m}) / 0,285 \text{ m} = 0,0026 > \varepsilon_y = f_y / E_s = 0,0021$$

$$\Rightarrow f'_s = f_y = 420 \text{ MPa}$$

y por lo tanto se tiene:

$$A_{sw} = k_{a \text{ máx}} \cdot f_c^* \cdot b_w \cdot d / f_y + A'_s \cdot f'_s / f_y$$

$$A_{sw} = 0,31875 \cdot 25,50 \text{ MPa} \cdot 150 \text{ mm} \cdot 760 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} + 639 \text{ mm}^2 \cdot 420 \text{ MPa} / 420 \text{ MPa}$$

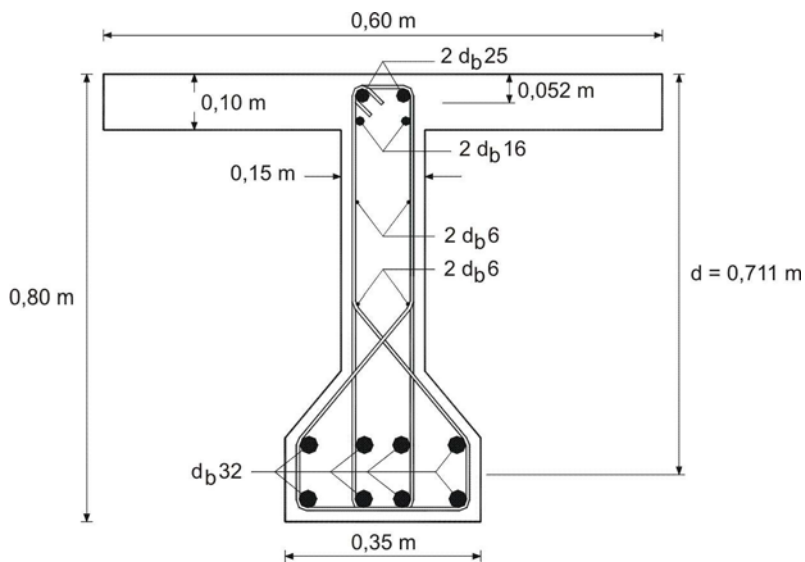
$$A_{sw} = 2206 \text{ mm}^2 + 639 \text{ mm}^2 = 2845 \text{ mm}^2$$

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 2732 \text{ mm}^2 + 2845 \text{ mm}^2 = 5577 \text{ mm}^2$$

Resolución mediante la tabla auxiliar N°1:

Como se comentó en el Ejemplo anterior, la resolución mediante tablas no aporta un beneficio significativo en la simplificación de los cálculos. Remitimos al lector a la operatoria utilizada en el Ejemplo anterior.

Armado:



Luego de un tanteo en la adopción de armaduras se llega al esquema de la figura. Recalculando las armaduras con la geometría de la figura se llega a que:

$$A'_s = 1168 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 5964 \text{ mm}^2$$

valores adecuadamente cubiertos por las armaduras dispuestas.

CORTE

Expresiones generales para el dimensionamiento y verificación de piezas no pretensadas

3.1.- Generalidades

Las piezas sometidas a esfuerzos de corte deben verificar la condición resistente dada por:

$$V_u \leq \phi \cdot V_n \quad \text{con} \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículos 9.1.1 y 11.1.1})$$

V_u = Resistencia requerida calculada para cargas mayoradas

V_n = Resistencia nominal de la sección

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia en función del tipo de rotura :

$$\phi = 0,75 \quad (\text{CIRSOC 201-2005, artículo 9.3.2.3})$$

Se estudiarán en este caso los elementos no pretensados.

3.2.- Expresión general de cálculo y verificación

La expresión genérica de resistencia nominal que da el CIRSOC 201-2005, artículo 11.1.1, es del tipo aditivo, es decir, que se obtiene como suma de las colaboraciones del hormigón y el acero:

$$V_u \leq \phi \cdot V_n = \phi \cdot [V_c + V_s]$$

donde:

V_c = Resistencia al corte aportada por el hormigón

V_s = Resistencia de las armaduras (estribos y/o barras dobladas)

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia = 0,75

“ V_u ” es el esfuerzo de corte calculado para las cargas mayoradas, calculado a una distancia “ d ” del filo del apoyo, para determinar el máximo “ V_u ” (artículo 11.1.3.1), siempre que se cumplan las siguientes condiciones (artículo 11.1.3):

- Que el apoyo sea directo, es decir, que la reacción de apoyo introduzca compresiones en la cara (generalmente inferior) del elemento
- Que las cargas se apliquen superiormente (no “colgadas”)
- Que no existan fuerzas concentradas significativas a una distancia del filo del apoyo menor que “ d ”

En caso de que no se cumpla alguna de las condiciones enunciadas, se debe dimensionar con el corte correspondiente al filo del apoyo.

3.3.- Determinación de V_c

El CIRSOC 201-2005 brinda dos tipos de expresiones para evaluar V_c , simplificadas y generales (artículos 11.3.1.1 a 11.3.1.3 y 11.3.2.1 a 11.3.2.3 respectivamente). La diferencia estriba en que las primeras dependen solamente de la geometría de la sección y de la resistencia del hormigón, mientras que las últimas permiten considerar la influencia de otras variables, como por ejemplo la armadura longitudinal.

En cualquier caso, se limita $\sqrt{f'_c} \leq 8,3 \text{ MPa}$ (artículo 11.1.2)

3.3.1.- Cuando no existan fuerzas axiales

1) Expresión simplificada: $V_c = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$

2) Expresión general:

$$V_c = \left(\sqrt{f'_c} + 120 \cdot \rho_w \cdot \frac{V_u \cdot d}{M_u} \right) \cdot \frac{1}{7} \cdot b_w \cdot d \leq 0,3 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$$

$$\text{con } \rho_w = \frac{A_s}{b_w \cdot d} \quad \text{y} \quad \frac{V_u \cdot d}{M_u} \leq 1$$

donde M_u es el momento mayorado en la sección crítica, en correspondencia con V_u

3.3.2.- Cuando existan fuerzas axiales de compresión (no pretensado)

1) Expresión simplificada: $V_c = \left(1 + \frac{N_u}{14 \cdot A_g} \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$ con N_u/A_g en MPa

2) Expresión general:

$$V_c = \left(\sqrt{f'_c} + 120 \cdot \rho_w \cdot \frac{V_u \cdot d}{M_m} \right) \cdot \frac{1}{7} \cdot b_w \cdot d \leq 0,3 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \cdot \sqrt{1 + \frac{0,3 \cdot N_u}{A_g}}$$

$$\text{con } A_g = \text{área bruta de hormigón}; \quad M_m = M_u - N_u \cdot \left(\frac{4 \cdot h - d}{8} \right)$$

$$\text{sin el límite } \frac{V_u \cdot d}{M_m} \leq 1$$

Si se obtiene un valor negativo de M_m se empleará directamente la expresión:

$$V_c \leq 0,3 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \cdot \sqrt{1 + \frac{0,3 \cdot N_u}{A_g}}$$

3.3.3.- Cuando existan cargas axiales de tracción

De existir una tracción axial significativa bien debe dimensionarse la armadura de alma para resistir la totalidad del corte o bien puede calcularse:

$$V_c = \left(1 + \frac{0,3 \cdot N_u}{A_g} \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \geq 0$$

con N_u negativo (tracción) y N_u/A_g en MPa

En sus Recomendaciones el CIRSOC 201, artículo C11.3.2.3, indica que: "cuando exista incertidumbre sobre la magnitud de la tracción axial y ésta pudiera alcanzar valores significativos se recomienda determinar la armadura de corte para que absorba el corte total", es decir: $V_c = 0$.

3.4.- Determinación de V_s

La evaluación de " V_s " se hace directamente a partir del equilibrio de una fisura supuesta a 45° . Aún cuando, debido a las situaciones particulares ya descritas, se deba dimensionar con el valor del corte en el filo del apoyo, el equilibrio de la fisura a 45° puede ser planteado de igual manera ya que la rotura en cualquier caso se producirá a partir de una fisura inclinada.

El criterio de colaboración es simple: las armaduras que contribuyen al equilibrio son todas aquellas que cosen a la fisura en estudio, con la salvedad de que en las barras dobladas solamente se consideran efectivos los 3/4 centrales del tramo inclinado (artículo 11.5.7.7), más adelante se verá en detalle.

Finalmente V_s puede escribirse como:

$$V_s = V_s \text{ (estribos verticales)} + V_s \text{ (barras dobladas)} \quad (\text{artículo 11.5.7.8})$$

3.4.1.- V_s para estribos verticales

$$V_s = \frac{A_v \cdot d \cdot f_{yt}}{s} \quad (\text{artículo 11.5.7.2})$$

donde:

d = Altura útil de la sección

s = Separación entre planos de estribado medida sobre el eje de la pieza

f_{yt} = Tensión de fluencia especificada de los estribos

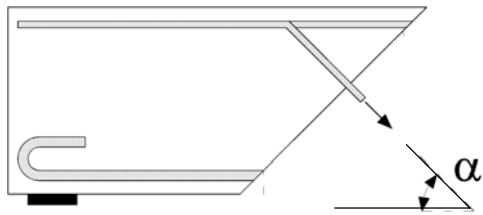
A_v = Área de acero contenida en un plano de estribado = $n \cdot A_{1v}$

n = Número de ramas (normalmente 2)

A_{1v} = Área de una de las ramas de estribo contenida en el plano de estribado

Si una misma fisura cortara estribos de diferente diámetro y/o con diferentes separaciones sencillamente se reemplaza el cociente " A_v / s " por la sección total de armadura vertical que corta a la fisura en una longitud " d ".

3.4.2.- V_s para barras dobladas



$$V_s = A_v \cdot f_y \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (\text{artículo 11.5.7.5})$$

donde:

A_v = Armadura que cruza la fisura, dentro del $\frac{3}{4}$ central de la/las barra/s

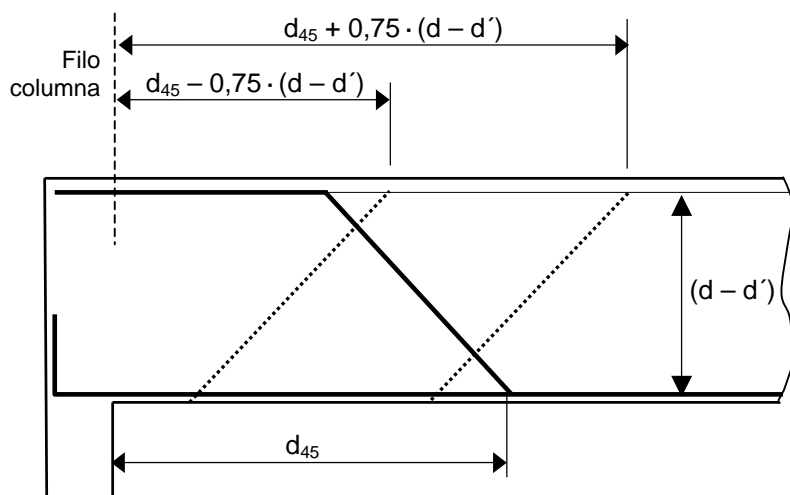
f_y = Tensión de fluencia especificada de la armadura

α = Ángulo de inclinación de la barra

Para el caso más corriente de barras dobladas a 45° se tiene:

$$V_s = 0,707 \cdot A_v \cdot f_y$$

Como ya se mencionó, solamente se considera efectivo el tramo de barra inclinada constituido por su $\frac{3}{4}$ central. Por lo tanto, las dos fisuras a 45° entre las cuales se encuentran todas las que son efectivamente cosidas por la barra doblada se determinan como se muestra en la figura:



El CIRSOC 201-2005 establece dos restricciones absolutas a la colaboración de la barra:

- $\alpha \geq 30^\circ$. Para ángulos menores se desprecia la colaboración (artículo 11.5.1.2).
- El valor de V_s aportado al equilibrio de una fisura por las barras dobladas no puede ser superior a:

$$\frac{1}{4} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad (\text{artículo 11.5.7.5})$$

3.4.3.- Limitación de V_s total

El CIRSOC 201-2005 no especifica una verificación directa de la fisuración del alma por efecto del corte ni de la resistencia de las bielas comprimidas, pero sí existe una verificación indirecta a través de la limitación al aporte de la armadura total al " V_n " de la fisura. Debe cumplirse: (artículo 11.5.7.9)

$$V_s \leq \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$$

(Además de la limitación particular al aporte de las barras dobladas indicada más arriba)

Si se utilizan las expresiones normales, es fácil demostrar que esta limitación conduce, para cargas axiales nulas o de compresión (no pretensado), a la expresión:

$$V_n \leq \left(5 + \frac{N_u}{14 \cdot A_g} \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$$

3.4.4.- Estribado mínimo

El CIRSOC 201-2005, artículo 11.5.6.3, establece una sección mínima de estribos dada por:

$$\frac{A_v}{s} \geq \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w}{f_{yt}} \quad y \quad \geq 0,33 \cdot \frac{b_w}{f_{yt}}$$

lo que equivale a decir que, a los efectos prácticos:

$$\text{Si } f'_c < 30 \text{ MPa} \quad \frac{A_v}{s} \geq 0,33 \cdot \frac{b_w}{f_{yt}}$$

$$\text{Si } f'_c \geq 30 \text{ MPa} \quad \frac{A_v}{s} \geq \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w}{f_{yt}}$$

Si se adopta un ADN 420 ($f_{yt} = 420$ MPa), la sección mínima de estribos por unidad de longitud puede ser calculada para las distintas f'_c solamente en función de b_w , siendo:

$$\frac{A_v}{s} \left[\text{mm}^2 / \text{m} \right] \geq \frac{b_w \left[\text{mm} \right]}{k}$$

f'_c [MPa]	20	25	30	35	40	50
k	1,26	1,26	1,23	1,14	1,06	0,95

En cambio si se adopta un AM 500 N ($f_{yt} = 500$ MPa), el factor k toma los siguientes valores:

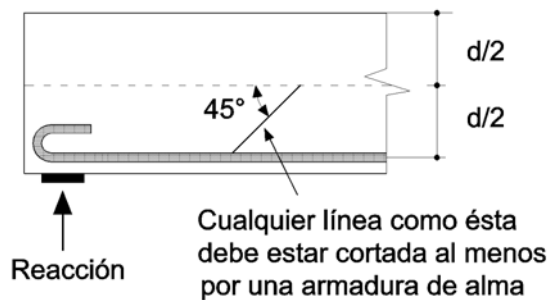
f'_c [MPa]	20	25	30	35	40	50
k	1,50	1,50	1,46	1,35	1,26	1,13

La sección de acero anterior es válida sólo si no existen o son despreciables los efectos de torsión.

3.4.5.- Separación máxima de armaduras de alma

Respecto a la presencia y separación de las armaduras de alma el CIRSOC 201-2005 indica que:

3.4.5.1.- Cualquier línea con las siguientes características:
(artículos 11.5.1.2 y 11.5.5.2)



- 1) Un extremo sobre la armadura principal de tracción
- 2) El otro extremo a "d/2" de la fibra de hormigón más comprimida
- 3) Pendiente 45°
- 4) El extremo inferior es el más próximo a la reacción que define el corte de proyecto

Debe ser cortada por, al menos, una línea de armadura de alma.

3.4.5.2.- Separación máxima para estribos normales al eje del elemento

$$\text{Si } V_s \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad s \leq \begin{cases} d / 2 \\ 400 \text{ mm} \end{cases} \quad (\text{artículo 11.5.5.1})$$

$$\text{Si } V_s > \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad s \leq \begin{cases} d / 4 \\ 200 \text{ mm} \end{cases} \quad (\text{artículo 11.5.5.3})$$

3.4.6.- Elementos sin armadura de alma

Si bien en nuestro medio no es común aceptar vigas sin armaduras de alma (aunque sí losas y zapatas sin armaduras de alma), el CIRSOC 201-2005 artículo 11.5.6.1 indica que si se cumplen algunos requisitos es admisible no colocar armadura de alma. Estos requisitos son:

$$V_u \leq \phi \cdot V_c / 2$$

Vigas cuya altura total verifique que : $h \leq \text{máximo } (250 \text{ mm} ; 2,5 \cdot h_f ; 0,5 \cdot b_w)$

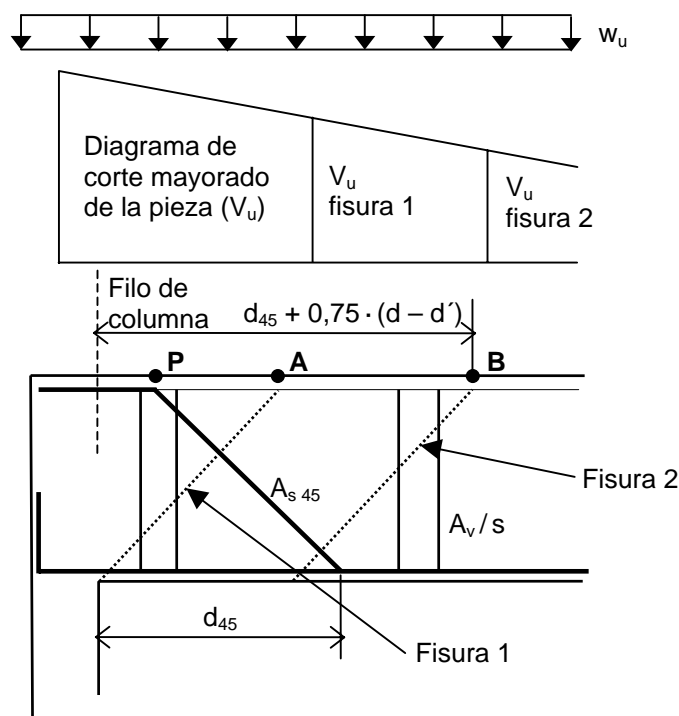
donde "h_f" es la altura del ala en vigas tipo "L" ó "T".

Se transcribe a continuación el comentario C11.5.6.1 del CIRSOC 201-2005: "Aún cuando el esfuerzo de corte mayorado total V_u , sea menor que la mitad (1/2) de la resistencia al corte proporcionada por el hormigón $\phi \cdot V_c$, se recomienda la colocación de alguna armadura en el alma, sobre todo en la totalidad de las almas delgadas de elementos postesados de hormigón

CORTE en HORMIGÓN ARMADO CONVENCIONAL – EJEMPLOS

Comentarios generales de orden práctico

En lo que sigue se desarrollan algunos ejercicios de corte aplicando las expresiones normales del CIRSOC 201-2005. En las roturas de corte en hormigón armado no es posible hablar de una “sección de cálculo” en el sentido clásico de una sección transversal, sino que es necesario considerar y comprender el mecanismo resistente establecido por el equilibrio de la fisura inclinada, a partir del cual es sencillo establecer tanto las sollicitaciones actuantes como las armaduras que aportan resistencia.



En ese sentido es importante recordar los siguientes conceptos:

- Armaduras resistentes a considerar en una fisura: Todas aquellas (mallas de acero soldada, estribos y/o barras dobladas – artículo 11.5.1) que cosen a la fisura en cuestión. En el caso de las barras dobladas, solamente se consideran aquellas que cortan a la fisura dentro de la $\frac{3}{4}$ parte central de la porción inclinada de la barra, artículo 11.5.7.7. En lo sucesivo, cuando se indique que una barra corta o cose a una fisura inclinada, se supondrá que lo hace de esta manera en la que resulta efectiva desde el punto de vista resistente, y cuando no lo hace dentro de su $\frac{3}{4}$ parte central se dirá que no la cose o corta, independientemente de que la intersecte geoméricamente.
- Valor de corte que solicita a la fisura: El valor del diagrama de corte correspondiente al punto superior de la fisura (indicado con un punto en la figura). Lo mismo vale para el caso de la verificación: en este caso el corte resistente de la fisura se representa en el mismo punto. El CIRSOC 201-2005 hace algunas salvedades

cuando se trata de cargas indirectas o concentradas cerca de los apoyos (ver la Introducción a estos ejemplos)

En la Figura anterior se representan dos fisuras de corte:

- La fisura 1 es la primera fisura de corte, es decir, la que nace en el filo de la columna. En este caso, la resistencia de la fisura 1 está dada por los estribos y las barras dobladas, ya que ambos son cortados por la fisura. El corte solicitante se obtiene del diagrama de V_u , en la vertical del punto "A", el cual se ubica a una distancia "d" del filo de la columna.
- La fisura 2 es una fisura genérica interior a la pieza. En este caso representa a la primera fisura no cosida por una barra doblada y por lo tanto en su resistencia sólo colaboran estribos. El corte que solicita a esta fisura es el correspondiente al punto "B" en el diagrama de " V_u ".

Si el extremo inferior de la barra doblada se encuentra a una distancia genérica " d_{45} " del filo de la columna, el punto superior de la última fisura cosida por esa barra se encuentra a una distancia $[d_{45} + 0,75 \cdot (d - d')]$ de ese filo, con el valor de corte correspondiente. En la expresión anterior d' es la distancia desde el borde superior del hormigón al eje del tramo superior horizontal de la barra doblada.

Considerando piezas con barras dobladas y el caso normal de piezas en las que el corte aumenta hacia los apoyos (lo contrario requeriría la existencia de cargas hacia arriba), es evidente que desde el punto de vista de la resistencia al corte resulta favorable que las barras dobladas cubran la mayor zona posible de la pieza, o bien expresándolo en términos de solicitaciones, que la ubicación del punto "B" corresponda al menor valor de corte posible. De esta manera se aprovecha al máximo la existencia de la posición doblada. Sin embargo, este principio tiene el límite obvio de mantener la presencia de la barra doblada en la primera fisura de corte. Para cumplir esta premisa, el valor mínimo teórico de d_{45} vale:

$$d_{45} = d + 0,75 \cdot (d - d')$$

En el caso de existir momentos negativos de apoyo el doblar barras muy cerca de los mismos conflictúa con la necesidad de cubrir el diagrama de momentos flectores.

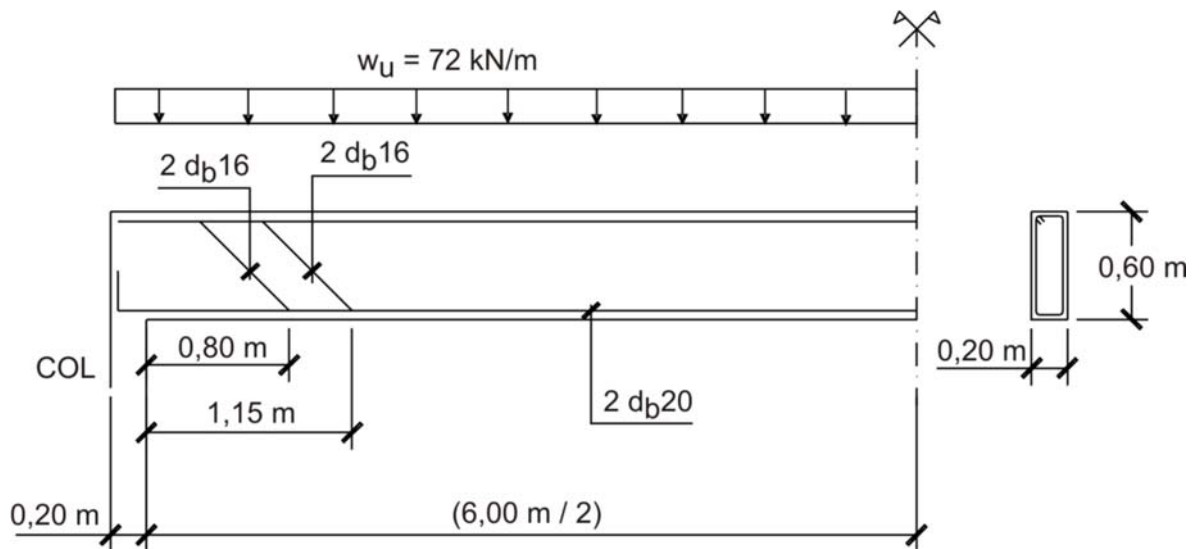
Ejemplo 3.I

Enunciado: Calcular el estribado uniforme necesario para la viga de la figura, considerando:

- a) Que no existen barras dobladas.
- b) Que existen las barras dobladas a 45° indicadas en la figura.

Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = f_{yt} = 420$ MPa)

Sección transversal: - $b_w = 0,20$ m ; $h = 0,60$ m ; $d' = 0,025$ m



Resolución:

I) Cálculos intermedios

$$d = 0,60 \text{ m} - 0,025 \text{ m} = 0,575 \text{ m} \quad (57,5 \text{ cm})$$

$$[f'_c]^{1/2} = [20]^{1/2} \text{ MPa} = 4,472 \text{ MPa} \quad (< 8,3 \text{ MPa} \text{ artículo 11.1.2})$$

$$[f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 4472 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,20 \text{ m} \cdot 0,575 \text{ m} = 514,3 \text{ kN}$$

II) Cálculo de estribos

II.1) Caso a): sin armadura doblada

II.1.1) Cálculo de solicitaciones

Se considera el corte solicitante a una distancia “d” del filo del apoyo. En este caso no es necesario considerar otra fisura de corte más alejada debido a que el estribado es uniforme y por lo tanto existe una única sección crítica. La solicitación resulta entonces:

$$V_u = w_u \cdot ((L_n / 2) - d) = 72 \text{ kN/m} \cdot (3 \text{ m} - 0,575 \text{ m}) = 174,6 \text{ kN}$$

$$\therefore V_n = V_u / \phi = 174,6 \text{ kN} / 0,75 = 232,8 \text{ kN}$$

II.1.2) Verificación de las dimensiones de la sección

Como se utilizará la expresión simplificada para el cálculo de “V_c” se tiene que verificar:

$$V_n = 232,8 \text{ kN} \leq 5/6 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 5 \cdot 514,3 \text{ kN} / 6 = 428,5 \text{ kN} \quad (\text{Verifica})$$

II.1.3) Cálculo del estribado necesario

La expresión general de la resistencia nominal es: $V_n = V_c + V_s$

Utilizando la expresión simplificada para la colaboración del hormigón resulta:

$$V_c = 1/6 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 514,3 \text{ kN} / 6 = 85,8 \text{ kN}$$

(El lector puede comprobar fácilmente que si se hubiera utilizado la expresión afinada, el valor de "V_c" hubiera sido igual a 81,5 kN, es decir, una diferencia poco significativa)

Queda por resistir con armadura: $V_s = V_n - V_c = 232,8 \text{ kN} - 85,8 \text{ kN} = 147 \text{ kN}$

El CIRSOC 201-2005, artículo 11.5.7.9, pide que el valor anterior sea menor que $2/3 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 2/3 \cdot 514,3 \text{ kN} = 342,9 \text{ kN}$ lo cual ya fue verificado en II.1.2.

Dado que no se utilizarán barras dobladas el estriado se obtiene como:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{d \cdot f_{yt}} = \frac{147 \text{ kN}}{0,575 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa}} \cdot 1000 \frac{\text{MN}}{\text{kN}} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} = 609 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \quad \left(6,09 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \right)$$

La armadura a disponer debe ser superior a la mínima. Para H-20 (f'_c = 20 MPa) resulta:

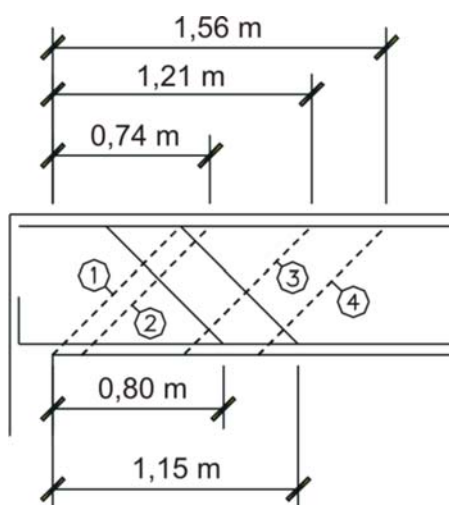
$$(A_v/s)_{\text{mín}} = b_w / 1,26 [\text{mm}] = 200 \text{ mm} / 1,26 = 159 \text{ mm}^2/\text{m} < 609 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Dado que $V_s / ([f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d) = 0,29 < 1/3$ la separación máxima es:

$$s_{\text{máx}} = \text{mín} (d/2 ; 0,4 \text{ m}) = 0,29 \text{ m}$$

Por lo tanto se pueden disponer estribos de 2 ramas d_b8 c/ 0,17 m (2 · 50,3 mm² / 0,17 m = 592 mm²/m) ó d_b10 c/ 0,26 m (2 · 78,5 mm² / 0,26 m = 604 mm²/m).
Diámetros mayores conducen a separaciones mayores que la máxima.

II.2) Caso b): con armadura doblada



II.2.1) Cálculo de solicitaciones

En este caso, para identificar las secciones críticas y poder calcular las solicitaciones en ellas es necesario considerar la posición de las barras dobladas. De la geometría del problema se obtienen las siguientes conclusiones:

- La primera fisura de corte (fisura 1 en la figura), corta solamente una posición doblada, situación que se mantiene para todas las fisuras entre 1 y 2, en cuyo equilibrio solamente intervendrá esa posición compuesta por 2 d_b16.
- Las fisuras comprendidas entre 2 y 3 cortan a las dos posiciones dobladas.
- Las fisuras entre 3 y 4 cortan una posición.
- Las fisuras a la derecha de 4 no tienen barras dobladas que aporten resistencia al corte.

De lo anterior se desprende que es necesario dimensionar el estribado uniforme considerando el equilibrio de las fisuras 1 y 4, debido a las siguientes razones:

- La fisura 1 es la que tiene mayor V_u , con solamente una posición doblada.
- Todas las fisuras comprendidas entre 1 y 4 tienen menor V_u que la 1 y en todos los casos son cortadas por una o dos posiciones dobladas, por lo que conducirían a un estribado menor que la 1.
- La fisura 4 tiene menor V_u que la 1, pero al no tener barras dobladas que la corten, podría conducir a un estribado mayor que la fisura 1.

Se tendrán entonces las siguientes solicitaciones:

Fisura 1: Según se calculó en II.1.1): $V_u = 174,6 \text{ kN}$

Fisura 4: $V_u = w_u \cdot ((L_n / 2) - 1,56 \text{ m}) = 72 \text{ kN/m} \cdot (3 \text{ m} - 1,56 \text{ m}) = 103,7 \text{ kN}$

II.2.2) Verificación de las dimensiones de la sección

Ya realizada en II.1.2.

II.2.3) Cálculo del estribado necesario

Fisura 1:

$$V_n = V_u / \phi = 174,6 \text{ kN} / 0,75 = 232,8 \text{ kN}$$

En II.1.3) se obtuvo: $V_c = 85,8 \text{ kN}$

$$V_{s\ 45^\circ} = A_{s\ 45^\circ} \cdot f_y \cdot \text{sen } \alpha$$

$$V_{s\ 45^\circ} = 2 \cdot 201 \text{ mm}^2 \cdot 420 \text{ MPa} \cdot \text{sen } (45^\circ) \cdot 1 \text{ kN m}^2 / (1000 \text{ MN mm}^2) = 119,4 \text{ kN}$$

El valor anterior está limitado a: $1/4 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 1/4 \cdot 514,3 \text{ kN} = 128,6 \text{ kN}$ (Verifica)

Los estribos deberán aportar entonces:

$$V_{s\ \text{est}} = V_n - V_c - V_{s\ 45^\circ} = 232,8 \text{ kN} - 85,8 \text{ kN} - 119,4 \text{ kN} = 27,6 \text{ kN}$$

Se adoptará el estribado luego de analizar la fisura 4, ya que, dado que el mismo será uniforme, su valor deberá ser igual al mayor entre los correspondientes a cada una de las fisuras.

Fisura 4:

$$V_u = 72 \text{ kN/m} \cdot (3 \text{ m} - 1,56 \text{ m}) = 103,7 \text{ kN} \quad \therefore \quad V_n = V_u / \phi = 103,7 \text{ kN} / 0,75 = 138,2 \text{ kN}$$

$$V_{s\ 45^\circ} = 0$$

$$V_s = V_{s\ \text{est}} = V_n - V_c = 138,2 \text{ kN} - 85,8 \text{ kN} = 52,4 \text{ kN}$$

Considerando lo determinado para las fisuras 1 y 4, se dimensiona el estriado uniforme para $V_{s\ est} = 52,4\text{ kN}$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_{s\ est}}{d \cdot f_{yt}} = \frac{52,4\text{ kN}}{0,575\text{ m} \cdot 420\text{ MPa}} \cdot 1000 \frac{\text{MN}}{\text{kN}} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} = 217 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \quad \left(2,17 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \right)$$

Por otra parte $(A_v/s)_{\min} = 159\text{ mm}^2/\text{m} \leq 217\text{ mm}^2/\text{m}$

Al resultar un valor de “ V_s ” menor que el calculado en el Caso a) vale la separación máxima calculada para dicho caso:

$$s_{\max} = \min(d/2; 0,40\text{ m}) = 0,29\text{ m}$$

Por lo tanto se pueden disponer estribos de 2 ramas $d_b6\text{ c/ }0,25\text{ m}$, que aportan $226\text{ mm}^2/\text{m}$ ($2,26\text{ cm}^2/\text{m}$).

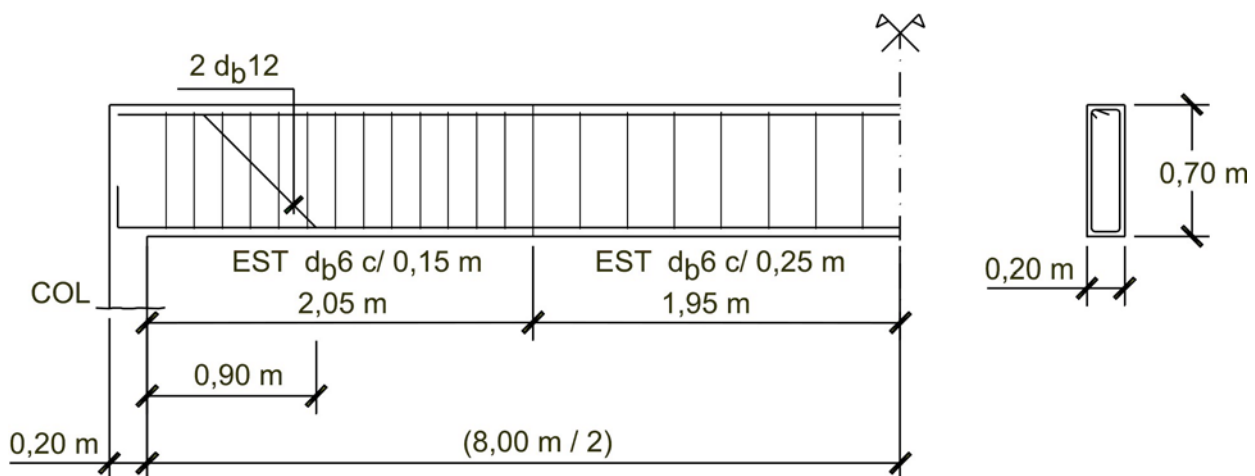
Ejemplo 3.II

Enunciado:

- Calcular y dibujar el diagrama de “ $\phi \cdot V_n$ ” (Corte Resistente) de la viga de la figura.
- Calcular la máxima carga uniformemente distribuida “ w_u ” que se puede aplicar a la pieza.
- Considerando un estado de carga consistente en dos cargas “ P_u ” aplicadas en los tercios de la luz libre entre caras internas de columnas, calcular – utilizando los resultados obtenidos en el primer punto – el valor “ P_u ” máximo que se puede aplicar a la viga.

Materiales: - Hormigón: H-30 ($f'_c = 30\text{ MPa}$)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = f_{yt} = 420\text{ MPa}$)

Sección transversal: - $b_w = 0,20\text{ m}$; $h = 0,70\text{ m}$; $d' = 0,025\text{ m}$



La pieza se encuentra comprimida por un axial $N_D = 311\text{ kN}$; $N_L = 250\text{ kN}$, independiente de las acciones “ w_u ” o “ P_u ” actuantes sobre la viga.

Consideración del esfuerzo axial de compresión

Dado que los esfuerzos axiales de compresión ejercen un efecto favorable sobre la resistencia al corte y considerando que estos esfuerzos son independientes de las acciones que originan el corte, sólo resulta válido considerar la parte permanente de dicho esfuerzo axial. Por otra parte, el CIRSOC 201-2005 artículo 9.2.1 (ver también C9.2) indica que en estos casos de efectos favorables debidos a cargas permanentes debe considerarse como valor de combinación:

$$N_u = 0,9 \cdot N_D = 0,9 \cdot 311 \text{ kN} = 280 \text{ kN}$$

Resolución:

a) Cálculos intermedios

$$\begin{aligned}d &= 0,70 \text{ m} - 0,025 \text{ m} = 0,675 \text{ m} \quad (67,5 \text{ cm}) \\[f'_c]^{1/2} &= [30]^{1/2} \text{ MPa} = 5,477 \text{ MPa} \quad (< 8,3 \text{ MPa} \quad \text{artículo 11.1.2}) \\[f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d &= 5477 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,20 \text{ m} \cdot 0,675 \text{ m} = 739,43 \text{ kN}\end{aligned}$$

b) Cálculo de “ V_c ”

Se utilizan las expresiones normales con la corrección por el efecto favorable del esfuerzo axial. Al no conocerse “ V_u ” y “ M_u ” no existe la opción de utilizar expresiones más afinadas.

$$V_c = 1/6 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d \cdot [1 + N_u / (14 \cdot A_g)] = 1/6 \cdot 739,43 \text{ kN} \cdot 1,14 = 141 \text{ kN} = V_c$$

$$\begin{aligned}\text{ya que } N_u / A_g &= 280 \text{ kN} / ((1000 \text{ kN/MN}) \cdot 0,20 \text{ m} \cdot 0,70 \text{ m}) = 2 \text{ MPa} \\ \therefore [1 + N_u / (14 \cdot A_g)] &= 1 + 2 \text{ MPa} / 14 \text{ MPa} = 1,14\end{aligned}$$

El valor de “ V_c ” se considera constante en toda la pieza.

c) Determinación del diagrama de “ $\phi \cdot V_n$ ”

Los valores resistentes nominales “ V_n ” de cada sección de la pieza dependen de su geometría, cantidad y distribución de armadura para corte, y características de los materiales. Esto significa que en aquellos tramos donde estos parámetros se mantengan constantes, el valor de “ V_n ” también lo hará. Resulta útil entonces identificar las zonas en las que las secciones y armaduras cambian dando lugar a “secciones críticas” en las que varía la resistencia nominal.

Las fisuras que caracterizan el problema son (ver siguiente figura):

- Fisura 1: Se origina en el filo de la columna y finaliza a “ d ” de dicho filo. Es cosida por la armadura a 45° , ya que verifica (ver Ejemplo 3.I):

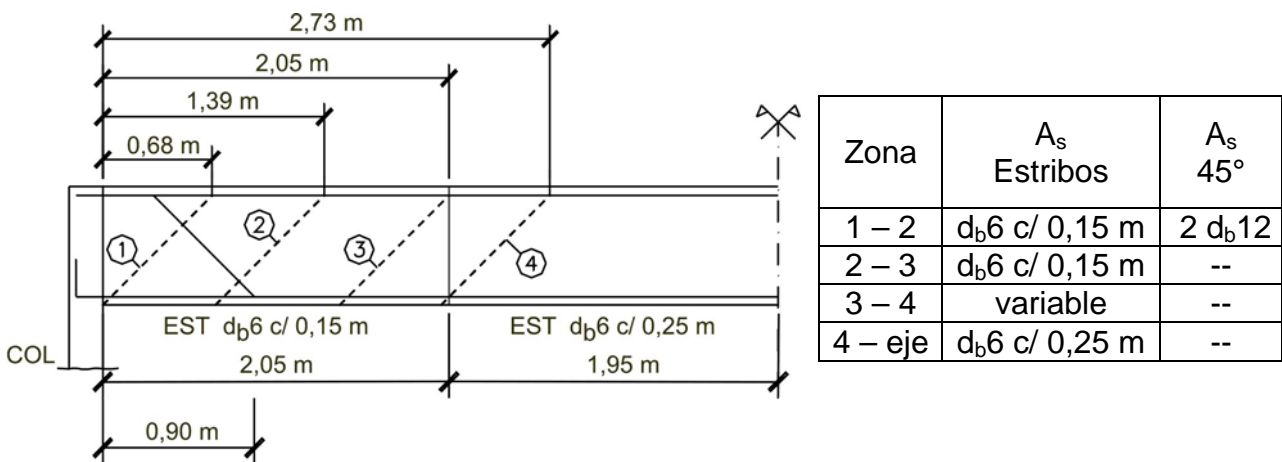
$$0,90 - 0,75 \cdot (0,675 \text{ m} - 0,025 \text{ m}) = 0,41 \text{ m} < d = 0,675 \text{ m}$$

- Fisura 2: Es la primera fisura no cosida efectivamente por la barra doblada. Se encuentra a una distancia del filo de la columna igual a (ver Ejemplo 3.I):

$$0,90 + 0,75 \cdot (0,675 \text{ m} - 0,025 \text{ m}) = 1,39 \text{ m}$$

- Fisura 3: Es la última fisura que corta solamente al estribo del primer sector (tiene la misma resistencia que la fisura 2).
- Fisura 4: Es la primera fisura que corta solamente al estribo del segundo sector.

Las fisuras comprendidas entre 3 y 4 cortan un estribo variable, debido a que el cambio de estribo se realiza en una sección normal al eje de la pieza, pero las fisuras de corte tienen una inclinación de 45°. Para esta zona se considerará una variación lineal entre el “V_n” correspondiente a la fisura 3 y el de la fisura 4.



Fisura 1:

$$V_{s \text{ est}} = \frac{A_v}{s} \cdot d \cdot f_{yt} = 2 \cdot \frac{28,3 \text{ mm}^2}{0,15 \text{ m}} \cdot 0,675 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa} \cdot \frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ MN}} \frac{\text{m}^2}{\text{mm}^2} = 106,9 \text{ kN}$$

$$V_{s 45^\circ} = A_{v 45^\circ} \cdot f_y \cdot 0,707$$

$$V_{s 45^\circ} = 2 \cdot 113 \text{ mm}^2 \cdot 420 \text{ MPa} \cdot 0,707 \cdot 1 \text{ kN m}^2 / (1000 \text{ MN mm}^2) = 67,2 \text{ kN}$$

Se debe verificar que:

$$V_{s 45^\circ} \leq 1/4 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 1/4 \cdot 739,4 \text{ kN} = 185 \text{ kN} \quad (\text{Verifica})$$

$$V_{s \text{ total}} \leq 2/3 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 2/3 \cdot 739,4 \text{ kN} = 493 \text{ kN} \quad (\text{Verifica})$$

Obteniéndose finalmente:

$$V_{n \text{ fisura 1}} = 141 \text{ kN} + 106,9 \text{ kN} + 67,2 \text{ kN} = 315 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \phi \cdot V_n = 236 \text{ kN}$$

Fisuras 2 y 3:

$$V_{s \text{ est}} = 106,9 \text{ kN}$$

$$V_{s 45^\circ} = 0 \text{ kN}$$

$$V_{n \text{ fisura } 2} = 141 \text{ kN} + 107 \text{ kN} = 248 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \phi \cdot V_n = 186 \text{ kN}$$

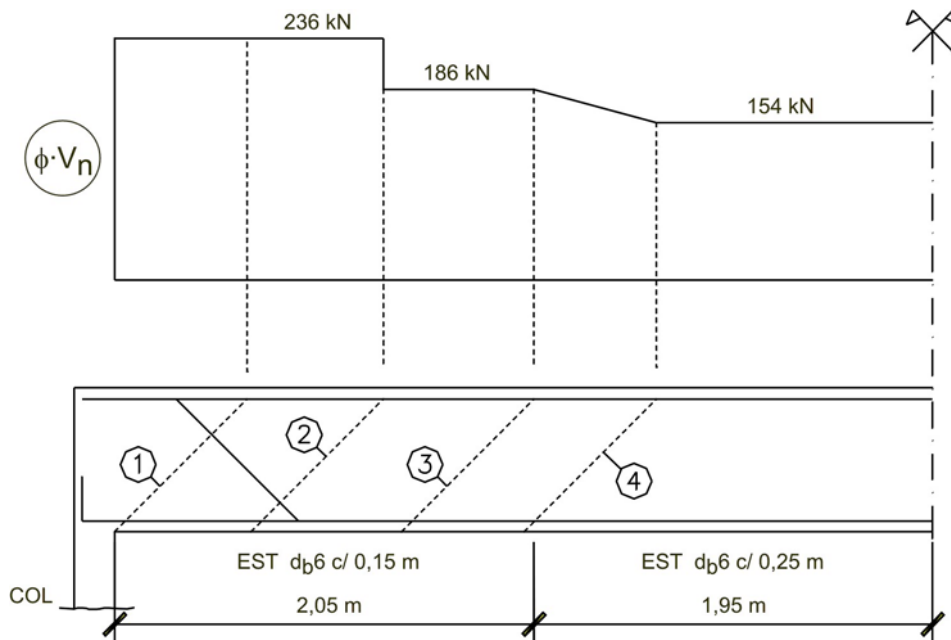
Fisura 4:

$$V_{s \text{ est}} = \frac{A_v}{s} \cdot d \cdot f_{yt} = 2 \cdot \frac{28,3 \text{ mm}^2}{0,25 \text{ m}} \cdot 0,675 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa} \cdot \frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ MN}} \frac{\text{m}^2}{\text{mm}^2} = 64 \text{ kN}$$

que obviamente cumple la condición que lo limita dado que es menor que los valores correspondientes a la primera fisura.

$$V_{n \text{ fisura } 4} = 141 \text{ kN} + 64 \text{ kN} = 205 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \phi \cdot V_n = 154 \text{ kN}$$

Finalmente el diagrama de " $\phi \cdot V_n$ " adopta el aspecto que muestra la figura:



d) Máxima carga uniforme " w_u " que puede aplicarse a la pieza

Considerando que se trata de una carga uniformemente distribuida y que los apoyos tienen la misma rigidez, se tendrá que:

- El diagrama de corte será lineal pasando por cero en el centro de la viga
- El valor de " $\phi \cdot V_n$ " en cada fisura dará lugar a un diagrama diferente de " w_u "
- El diagrama que conduzca al menor valor de " w_u " será el que defina la resistencia de la viga

En función de lo anterior se tiene que:

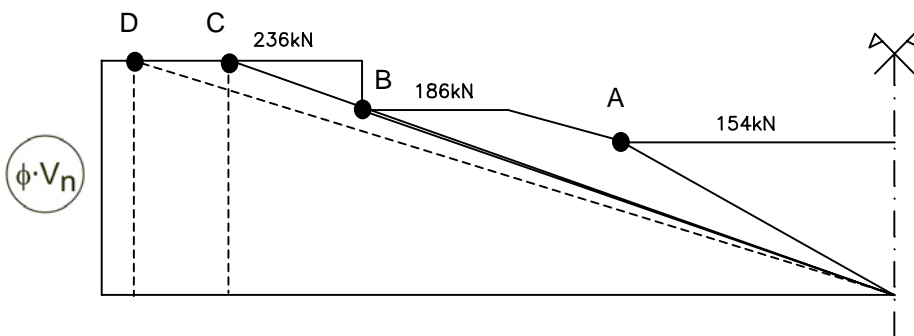
Fisura 1: $236 \text{ kN} \geq w_u \cdot (4,0 \text{ m} - 0,68 \text{ m}) \quad \therefore w_u \leq 71,1 \text{ kN/m}$

Fisura 2: $186 \text{ kN} \geq w_u \cdot (4,0 \text{ m} - 1,39 \text{ m}) \quad \therefore w_u \leq 71,2 \text{ kN/m}$

Fisura 4: $154 \text{ kN} \geq w_u \cdot (4,0 \text{ m} - 2,73 \text{ m}) \quad \therefore w_u \leq 120,6 \text{ kN/m}$

Finalmente, para el tipo de carga especificado, la resistencia de la pieza está condicionada por la fisura 1 resultando: $w_u = 71,1 \text{ kN/m}$

La solución puede verse de manera más elocuente en forma gráfica. En efecto, la solución al problema planteado se reduce a encontrar la recta de mayor pendiente posible (puesto que la pendiente del diagrama de corte es igual al valor de la carga distribuida) que pase por cero en el centro de la viga y que esté por debajo del diagrama de " ϕV_n " obtenido anteriormente. En el gráfico siguiente se muestran las diferentes rectas para cada una de las fisuras. Efectivamente se comprueba que, de todas las rectas que cumplen la condición anterior, las de menor pendiente – y por lo tanto la que condiciona a la pieza en su conjunto – es la correspondiente a la fisura 1. Por supuesto que la pendiente de esta recta vale $71,1 \text{ kN/m}$.



Como este ejemplo trata un caso de apoyo directo, y no hay cargas concentradas a una distancia menor "d" del apoyo, el punto de chequeo situado más cerca del apoyo es el "C". En caso de tener que considerar el

corte al filo del apoyo, sería necesario chequear también la recta punteada (punto D, al filo de la columna).

e) Valor máximo de cargas concentradas ubicadas a tercios de la luz

En este caso, despreciando el peso propio, el diagrama de corte vale P_u en los tercios externos de la luz, y cero en el tercio central. De esa manera, resulta sencillo establecer tanto analítica como gráficamente que: $P_u = 154 \text{ kN}$.

Ejemplo 3.III

Enunciado: Calcular el máximo valor de “ w_u ” que puede resistir la viga del Ejemplo 3.I y el estribado uniforme necesario para dicha carga.
Analizar la armadura de corte utilizando barras de acero ADN 420 y mallas de acero soldada AM 500 N.

Resolución:

a) Determinación del máximo valor de “ w_u ”

En el Ejemplo 3.I se encontró que:

y que
$$V_u = w_u \cdot ((L_n / 2) - d) = w_u \cdot (3 \text{ m} - 0,575 \text{ m}) = 2,425 \cdot w_u = \phi \cdot V_n = 0,75 \cdot V_n$$

$$V_{n\text{máx}} = 5/6 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 5 \cdot 514,3 \text{ kN} / 6 = 428,58 \text{ kN}$$

resultando

$$w_u = \phi \cdot V_n / (L_n/2 - d) = 0,75 \cdot 428,58 \text{ kN} / 2,425 \text{ m} = 132,55 \text{ kN/m}$$

b.1) Cálculo del estribado necesario con barras de acero ADN 420 ($f_{yt} = 420 \text{ MPa}$)

Dado que se ha calculado la carga de modo de alcanzar el máximo valor posible de “ V_s ” resulta:

$$V_s = 2/3 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 2 \cdot 514,3 \text{ kN} / 3 = 342,87 \text{ kN}$$

de donde

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{d \cdot f_{yt}} = \frac{342,87 \text{ kN}}{0,575 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa}} \cdot 1000 \frac{\text{MN}}{\text{kN}} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} = 1420 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \left(14,20 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \right)$$

Como la armadura obtenida en el Ejemplo 3.I para una acción exterior mucho menor superaba la cuantía mínima se hace innecesaria aquí una verificación al respecto.

Dado que $V_s / ([f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d) = 0,67 > 1/3$ la separación máxima que corresponde es:

$$s_{\text{máx}} = \text{mín} (d/4 ; 0,20 \text{ m}) = 0,14 \text{ m}$$

Se adopta un estribado de dos ramas $d_b 10 \text{ c} / 0,11 \text{ m}$
($2 \cdot 78,5 \text{ mm}^2 / 0,11 \text{ m} = 1427 \text{ mm}^2/\text{m}$)

b.2) Cálculo del estribado necesario con mallas de acero soldada AM 500 N ($f_{yt} = 500 \text{ MPa}$)

$V_s = 342,87 \text{ kN}$ calculado en el punto b.1)

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{d \cdot f_{yt}} = \frac{342,87 \text{ kN}}{0,575 \text{ m} \cdot 500 \text{ MPa}} \cdot 1000 \frac{\text{MN}}{\text{kN}} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} = 1193 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \left(11,93 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \right)$$

Se omite aquí también, por lo motivos expuestos en el punto b.1), la verificación de la cuantía mínima.

Dado que $V_s / ([f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d) = 0,67 > 1/3$ la separación máxima que corresponde es:

$$s_{\text{máx}} = \text{mín} (d/4 ; 0,20 \text{ m}) = 0,14 \text{ m}$$

Se adopta un estriado de dos ramas $d_b 10 \text{ c/ } 0,13 \text{ m}$
 $(2 \cdot 78,5 \text{ mm}^2 / 0,13 \text{ m} = 1208 \text{ mm}^2/\text{m})$

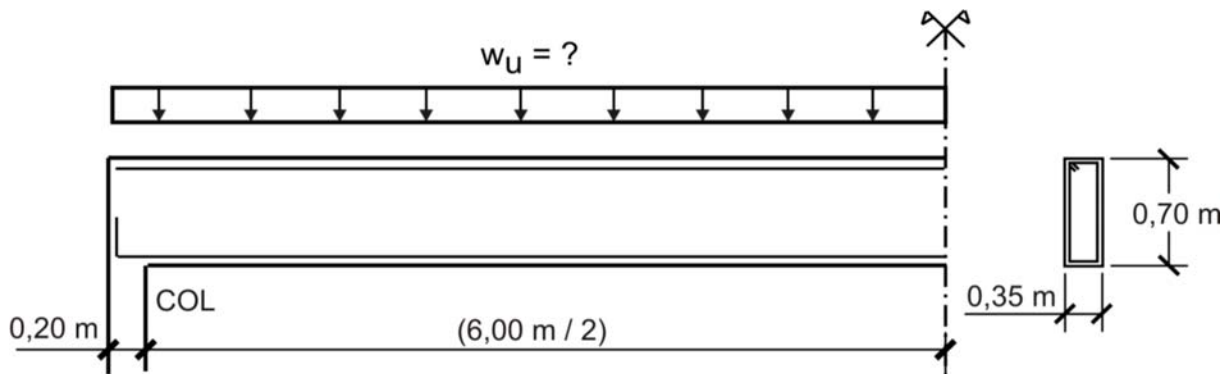
A tal efecto se adopta una malla especial "T" cuyos alambres en el sentido longitudinal del panel tienen un diámetro de 6 mm separados cada 0,25 m, y en el sentido transversal del panel para absorber el esfuerzo de corte, alambres de 10 mm de diámetro separados cada 0,13 m (norma IRAM-IAS U 500-06, mallas especiales).

Ejemplo 3.IV

Enunciado: Calcular el valor de " w_u " por debajo del cual la siguiente viga requerirá sólo estriado mínimo. Calcular y adoptar dicho estriado.

Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20 \text{ MPa}$)
 - Acero: ADN 420 ($f_{yt} = 420 \text{ MPa}$)

Sección transversal: - $b_w = 0,35 \text{ m}$; $h = 0,70 \text{ m}$; $d' = 0,025 \text{ m}$



Resolución:

a) Cálculo y adopción del estriado mínimo

Dado que $f'_c = 20 \text{ MPa} < 30 \text{ MPa}$ el estriado mínimo debe verificar:

$$\frac{A_v}{s} \geq 0,33 \cdot \frac{b_w}{f_{yt}} = \frac{350 \text{ mm}}{1,26 \text{ m/mm}} = 278 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}$$

Puesto que se trata de un estribado correspondiente a una sollicitación muy baja (luego puede verificarse la validez de esta afirmación) la separación máxima resulta:

$$s_{\text{máx}} = \text{mín} (d/2 ; 0,40 \text{ m}) = 0,337 \text{ m}$$

Suponiendo que se trata de una viga interior de un edificio se adopta un estribado de dos ramas $d_b 6 \text{ c} / 0,20 \text{ m}$ ($2 \cdot 28,3 \text{ mm}^2 / 0,20 \text{ m} = 283 \text{ mm}^2/\text{m}$)

b) Cálculo del “ w_u ” máximo resistido por el estribado mínimo

La expresión simplificada para la colaboración del hormigón resulta:

$$V_c = 1/6 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 1/6 \cdot [20]^{1/2} \text{ MPa} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 0,675 \text{ m} \cdot 1000 \text{ (kN/MN)} = 176,09 \text{ kN}$$

Para el estribado adoptado se tiene que:

$$V_s = \frac{A_v}{s} \cdot d \cdot f_{yt} = 283 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 0,675 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa} \cdot \frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ MN}} \frac{\text{m}^2}{\text{mm}^2} = 80,23 \text{ kN}$$

El valor de “ V_s ” es muy inferior al límite máximo:

$$2/3 \cdot [f'_c]^{1/2} \cdot b_w \cdot d = 2/3 \cdot [20]^{1/2} \text{ MPa} \cdot 0,35 \text{ m} \cdot 0,675 \text{ m} \cdot 1000 \text{ (kN/MN)} = 704,36 \text{ kN}$$

por lo que vale: $V_n = V_c + V_s = 176,09 \text{ kN} + 80,23 \text{ kN} = 256,32 \text{ kN}$

operando se llega a que:

$$w_u = \phi \cdot V_n / (L_n / 2 - d) = 0,75 \cdot 256,32 \text{ kN} / (6 \text{ m} / 2 - 0,675 \text{ m}) = 82,68 \text{ kN/m}$$

Por lo que cualquier carga menor a ésta requerirá un estribado menor que el mínimo.

TORSIÓN EN SECCIONES NO PRETENSADAS

NOTA GENERAL: Las expresiones que figuran en estas notas respetan las unidades utilizadas en el CIRSOC 201-2005 es decir que las tensiones están expresadas en [MPa], las fuerzas es [N], los momentos en [N mm], las longitudes en [mm] y las superficies en [mm²].

4.1.- Introducción

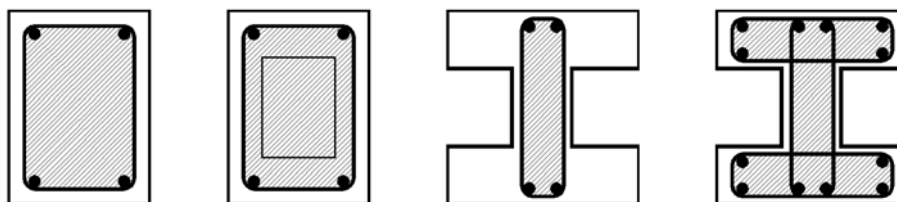
Las expresiones que da el CIRSOC 201-2005 son válidas para secciones huecas y macizas y para solicitaciones de torsión compuestas con corte, flexión y esfuerzos axiales. Las citadas expresiones están basadas en la analogía del reticulado espacial aplicada a un tubo de paredes delgadas. Para poder aplicar estas expresiones a secciones macizas estas son reemplazadas por secciones huecas equivalentes despreciándose, del lado seguro, la zona central.

A diferencia del corte en la resistencia a torsión no se adopta un reticulado de ángulo fijo y se supone que la totalidad de la solicitación de torsión es resistida por las armaduras longitudinales y transversales.

4.2.- Variables geométricas y una limitación

Además de las conocidas, otras variables geométricas derivadas utilizadas en Torsión son:

- A_{cp} = Es el área delimitada por la frontera exterior de la sección transversal de hormigón. Por lo tanto, si la sección tiene huecos, los mismos no se descuentan.
- p_{cp} = Perímetro de la frontera exterior de A_{cp} .
- A_{oh} = Área cuya frontera exterior es el eje de las armaduras transversales más externas que resisten torsión (área encerrada por el eje de los estribos). Una vez más, si la sección tiene huecos, éstos no se descuentan.



NOTAS: - Todos lo estribos son cerrados
- Área sombreada = A_{oh}

- p_h = Perímetro de la frontera exterior de A_{oh} .

- A_o = Área total encerrada por la trayectoria del flujo de corte. Debería determinarse por un análisis detallado pero puede adoptarse igual a 0,85 de A_{oh} .

Cuando la sección sea tipo “T”, se despreciará el aporte de las alas cuando el valor de (A_{cp}^2 / p_{cp}) sea menor para la sección completa que para el alma rectangular (artículo 11.6.1.1).

En todas las expresiones que se verán de aquí en adelante vale la siguiente limitación:

$$\sqrt{f'_c} \leq 8,3 \text{MPa} \quad (\text{artículo 11.1.2})$$

4.3.- Posibilidad de despreciar la torsión

El CIRSOC 201-2005 permite despreciar la torsión cuando el momento torsor mayorado “ T_u ” sea menor que:

$$T_u = \frac{1}{12} \cdot \phi \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \quad (\text{artículo 11.6.1.a})$$

4.4.- Torsión de equilibrio y torsión de compatibilidad

La torsión de equilibrio es aquella cuyos valores son invariantes frente a una variación en la distribución de rigideces de los elementos estructurales, o sea, cuando es una sollicitación de una estructura isostática, o de una porción isostática de la estructura. En otras palabras cuando es imprescindible para mantener el equilibrio.

La torsión de compatibilidad, en cambio, puede ser reducida si se disminuye la rigidez torsional de los elementos de la estructura. En este caso, los torsosres se pueden reducir, en las secciones de máxima sollicitación a un valor:

$$T_u = \frac{1}{3} \cdot \phi \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \cdot \sqrt{1 + \frac{3 \cdot N_u}{A_g \cdot \sqrt{f'_c}}} \quad (\text{artículo 11.6.2.2.c})$$

donde

A_g = Área total o bruta de la sección

N_u = Carga axial mayorada. Positiva si es de compresión

Una disminución de la rigidez torsional debe ir acompañada siempre de la correspondiente redistribución de sollicitaciones (aumento de momentos flectores, en general).

La mayor parte de los reglamentos internacionales permite despreciar la torsión de compatibilidad es decir, adoptar rigidez torsional nula. Esta posibilidad también estaría incluida en el CIRSOC 201-2005 en el artículo 8.6.1 cuando dice respecto a las rigideces que “se puede adoptar cualquier conjunto de hipótesis razonables”.

4.5.- Condición resistente

Manteniendo el formato utilizado para el resto de las solicitaciones, el CIRSOC 201-2005, artículo 9.1.1, exige que se verifique la condición resistente dada por:

$$T_u \leq \phi \cdot T_n \quad \text{con}$$

T_u = Resistencia requerida calculada para cargas mayoradas

T_n = Resistencia nominal de la sección

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia en función del tipo de rotura, que coincide con el correspondiente a Corte:

$$\phi = 0,75$$

4.6.- Secciones críticas

La condición resistente debe verificarse por lo menos en las siguientes secciones críticas (en solicitaciones compuestas puede haber secciones más desfavorables que las que se listan a continuación):

a) Elementos NO pretensados (artículo 11.6.2.4):

- En general, a una distancia “d” de la cara del apoyo
- Cuando exista un momento torsor concentrado dentro de una distancia “d” desde la cara del apoyo (por ejemplo un apeo de una ménsula) la sección crítica se tomará directamente en la cara del apoyo.

b) Elementos pretensados (artículo 11.6.2.5):

Ídem al punto anterior reemplazando “d” por “h/2”.

4.7.- Momento torsor de fisuración

$$T_{cr} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \quad (\text{artículo C11.6.1})$$

4.8.- Verificación de bielas comprimidas y fisuración (artículo 11.6.3.1)

$$\text{Secciones macizas: } \sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{T_u \cdot p_h}{1,7 \cdot A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \cdot \left(\frac{V_c}{b_w \cdot d} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c}\right)$$

$$\text{Secciones huecas: } \left(\frac{V_u}{b_w \cdot d}\right) + \left(\frac{T_u \cdot p_h}{1,7 \cdot A_{oh}^2}\right) \leq \phi \cdot \left(\frac{V_c}{b_w \cdot d} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c}\right)$$

4.9.- Resistencia nominal a torsión y cálculo de armaduras

4.9.1.- Notación

- A_l : Es la armadura longitudinal neta para torsión (debe descontarse la armadura necesaria para resistir flexión).
- f_{yl} : Tensión de fluencia especificada del acero de la armadura longitudinal.
- A_t/s : Es la armadura transversal neta para torsión (debe descontarse la armadura necesaria para resistir corte), considerando la sección de una rama de los estribos cerrados y adecuadamente empalmados, de manera tal que su aporte sea constante en todo el perímetro de los mismos.
- f_{yt} : Tensión de fluencia especificada del acero de la armadura transversal (estribos).

La armadura longitudinal neta para torsión debe distribuirse de manera uniforme en el perímetro de la sección, ya que se encuentra traccionada en su totalidad.

4.9.2.- Ángulo de las diagonales comprimidas

El CIRSOC 201-2005, artículo 11.6.3.6, establece que el ángulo de las diagonales comprimidas debe verificar: $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$. Asimismo, dice que puede adoptarse:

$\theta = 37,5^\circ$ para elementos pretensados con una fuerza efectiva de pretensado mayor que el 40% de la resistencia a tracción de la armadura longitudinal

$\theta = 45^\circ$ para elementos no pretensados o pretensados que no cumplan la condición del punto anterior

Si son conocidas las armaduras puede calcularse:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) \leq \operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{\frac{\left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}{\left(\frac{A_l}{\rho_h} \cdot f_{yl}\right)}} \leq \operatorname{tg}(60^\circ)$$

Si bien el CIRSOC 201-2005 no hace ninguna referencia explícita al tema, dado que las armaduras de corte se calculan partiendo de una inclinación de fisuras de 45° , este parece un ángulo lógico cuando se analizan fenómenos combinados de corte y torsión.

4.9.3.- Resistencia nominal

Las siguientes expresiones equivalentes pueden utilizarse para el cálculo de la resistencia nominal, ver los artículos 11.6.3.6 y 11.6.3.7:

$$T_n = \frac{2 \cdot A_o \cdot A_t \cdot f_{yt}}{s} \cdot \cot g(\theta)$$

$$T_n = \frac{2 \cdot A_o \cdot A_\ell \cdot f_{y\ell}}{p_h \cdot \cot g(\theta)}$$

$$T_n = 2 \cdot A_o \cdot \sqrt{\left(\frac{A_\ell}{p_h} \cdot f_{y\ell}\right) \cdot \left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}$$

Tal como se ha visto, el CIRSOC 201-2005 admite que, en forma aproximada, “A_o” sea reemplazado por el valor “0,85 · A_{oh}” con lo que las expresiones anteriores se transforman en:

$$T_n = \frac{1,7 \cdot A_{oh} \cdot A_t \cdot f_{yt}}{s} \cdot \cot g(\theta)$$

$$T_n = \frac{1,7 \cdot A_{oh} \cdot A_\ell \cdot f_{y\ell}}{p_h \cdot \cot g(\theta)}$$

$$T_n = 1,7 \cdot A_{oh} \cdot \sqrt{\left(\frac{A_\ell}{p_h} \cdot f_{y\ell}\right) \cdot \left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}$$

4.9.4.- Armaduras para resistir torsión

Para los estados combinados de Torsión + Flexión + Corte (es prácticamente imposible que la torsión aparezca aislada), las armaduras se obtienen por adición:

4.9.4.1.- Armadura transversal

Suponiendo un estribado en dos ramas, la cantidad de armadura correspondiente a cada una de las ramas se obtiene como:

$$\text{Estribado TOTAL (una cara)} = [A_t / s]_{\text{TORSIÓN}} + [A_v / s]_{\text{CORTE}} / 2$$

A_t / s = armadura de alma calculada para suponiendo que sólo hay torsión

A_v / s = armadura de alma calculada para suponiendo que sólo hay corte

En la expresión anterior “ A_t / s ” no merece ningún comentario dado que de los cálculos siempre se obtiene el estribado correspondiente a una cara. En el caso de “ A_v / s ” este término se refiere a la armadura total de corte por lo que en la expresión anterior deben hacerse las consideraciones necesarias para sumar solamente la armadura dispuesta en una cara.

4.9.4.2.- Armadura longitudinal

En los problemas prácticos las armaduras longitudinales de las secciones no serán simétricas ni se encontrarán uniformemente distribuidas en las caras o concentradas en las esquinas.

Al analizar la armadura longitudinal conviene recordar que las roturas por torsión pueden producirse con cualquiera de las caras de la sección traccionada. Para que ninguna de las caras resulte más débil que las demás conviene definir el concepto de “armadura neta de torsión”. Las expresiones de “ T_n ” vistas anteriormente parten de la existencia de cuatro armaduras longitudinales ubicadas en las esquinas de la sección resistente por lo que podría pensarse que, a los efectos de la torsión, cada cara cuenta con una armadura igual a “ $A_l/2$ ”. Razonando inversamente podemos decir que la armadura neta disponible para resistir torsión es igual al doble de la armadura dispuesta sobre la cara menos armada.

Este concepto resulta interesante cuando se tienen problemas de torsión combinada con flexión en los que hay que asegurar que en cada cara esté disponible en forma efectiva por lo menos una armadura igual a “ $A_l/2$ ” para resistir torsión. En las caras traccionadas por la flexión habrá que agregar armadura para que esto sea posible y en las comprimidas por la flexión la armadura necesaria por torsión podrá disminuirse (obviamente no es obligatorio hacerlo).

En una sección como la indicada en la Figura a) deben hacerse las consideraciones indicadas en la Figura b) para asegurar la resistencia simultánea a flexión y torsión llamando “ A_s ” y “ A'_s ” a las armaduras traccionadas y comprimidas necesarias por flexión.

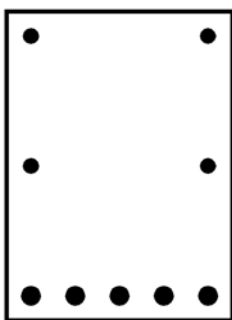


Figura a)

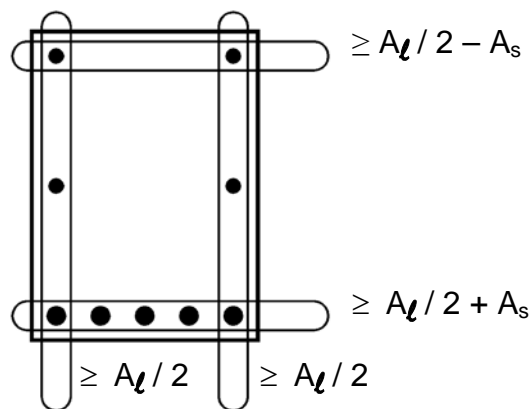


Figura b)

Podría pensarse en que lo que se hace es distribuir por partes iguales en cada cara la armadura necesaria por torsión y luego se la corrige en las caras inferior y superior debido a las fuerzas del par que equilibra la flexión. En rigor, el CIRSOC 201-2005 no suma y resta armaduras sino fuerzas pero el trabajo en términos de armaduras es prácticamente equivalente y operativamente mucho más cómodo.

Las condiciones impuestas a las caras laterales en la Figura b) no son explícitas en el CIRSOC 201-2005. Intentan evitar algunas situaciones que pueden presentarse al no utilizar armaduras concentradas en las cuatro esquinas. En todo caso son conservadoras y el proyectista podrá evaluar la conveniencia de su utilización.

4.10.- Armaduras mínimas y separaciones máximas reglamentarias

4.10.1.- Armadura mínima transversal (estribado mínimo)

En todas las zonas donde el momento torsor no pueda ser despreciado habrá que colocar un estribado mínimo que deberá verificar:

$$(A_v + 2 \cdot A_t) = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w \cdot s}{f_{yt}} \geq \frac{0,33 \cdot b_w \cdot s}{f_{yt}} \quad (\text{artículo 11.6.5.2})$$

donde “ A_v ” es el área total de armadura de corte y “ A_t ” es el área de armadura de torsión correspondiente a una cara. Asimismo “ f_{yt} ” es la tensión de fluencia especificada para las armaduras de alma.

4.10.2.- Armadura mínima longitudinal neta para torsión

En todas las zonas donde el momento torsor no pueda ser despreciado habrá que disponer un área de armadura longitudinal de torsión mínima dada por:

$$A_{\ell, \text{mín}} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}}{f_{y\ell}} - \left[\frac{A_t}{s} \right] \cdot p_h \cdot \frac{f_{yt}}{f_{y\ell}} \quad (\text{artículo 11.6.5.3})$$

en la expresión anterior “ $f_{y\ell}$ ” es la tensión de fluencia especificada para la armadura longitudinal y además (A_t / s) no debe tomarse menor que “ $b_w / (6 \cdot f_{yt})$ ”. En esta última expresión debe recordarse que el CIRSOC 201-2005 siempre expresa las medidas lineales en [mm] y las tensiones en [MPa].

El diámetro de la armadura longitudinal deberá verificar la condición:

$$d_b \geq \text{máx} (s/24 ; 10 \text{ mm})$$

y la separación máxima entre barras o alambres deberá ser menor que 0,30 m (artículo 11.6.6.2).

4.10.3.- Separación máxima entre estribos

Para el caso de Torsión pura, el CIRSOC 201-2005, artículo 11.6.6.1, especifica:

$$s \leq \begin{cases} p_h / 8 \\ 300 \text{ mm} \end{cases}$$

En el caso más general en que actuara también un esfuerzo de corte, deberían tenerse en cuenta también las separaciones máximas para esta sollicitación y adoptar la condición más restrictiva:

$$\text{Si } V_s \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad s \leq \begin{cases} d/2 \\ 400 \text{ mm} \end{cases} \quad (\text{artículo 11.5.5.1})$$

$$\text{Si } V_s > \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad s \leq \begin{cases} d/4 \\ 200 \text{ mm} \end{cases} \quad (\text{artículo 11.5.5.3})$$

Cuando la torsión no pueda ser despreciada los estribos deberán ser cerrados y sus extremos estarán adecuadamente anclados. En general los ganchos extremos estarán doblados a 135° salvo que exista confinamiento lateral dado por la presencia de un ala, una losa o algún otro elemento similar en cuyo caso se podrá utilizar ganchos a 90° (artículo 11.6.4.2). Nunca podrá quedar la parte doblada de un gancho paralela a un borde libre de hormigón (ya sea horizontal o vertical).

TORSIÓN – EJEMPLOS

Ejemplo 4.I

Enunciado: Calcular y adoptar las armaduras para la siguiente sección cuadrada de 0,50 m de lado, sometida a las siguientes acciones:

Materiales: - Hormigón: H-25 ($f'_c = 25$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = f_{yt} = 420$ MPa)

Sección transversal: - $b_w = 0,50$ m ; $h = 0,50$ m
 - Recubrimiento al eje del estribo = 0,025 m (estimado)
 - Rec. al eje de la armadura de flexión = 0,045 m (estimado)
 - $d = 0,50$ m – 0,045 m = 0,455 m

Solicitaciones: $M_U = 140$ kNm
 $V_U = 180$ KN
 $T_U = 71$ kNm (de equilibrio)

Resolución:

a) Solicitaciones nominales

$$\begin{aligned}M_n &= M_u / \phi = M_u / 0,90 = 155,6 \text{ kNm} \\V_n &= V_u / \phi = V_u / 0,75 = 240,0 \text{ kN} \\T_n &= T_u / \phi = T_u / 0,75 = 94,7 \text{ kNm}\end{aligned}$$

b) Valores auxiliares

$$\begin{aligned}f'_c{}^{1/2} &= 5 \text{ MPa} = 5000 \text{ kN/m}^2 < 8,3 \text{ MPa} \\f'_c{}^{1/2} \cdot b_w \cdot d &= 5000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,50 \text{ m} \cdot 0,455 \text{ m} = 1137,5 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_c &= f'_c{}^{1/2} \cdot b_w \cdot d / 6 = 5000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,50 \text{ m} \cdot 0,455 \text{ m} / 6 = 189,6 \text{ kN} \\V_c / (b_w \cdot d) &= f'_c{}^{1/2} / 6 = 0,83 \text{ MPa} = 833 \text{ kN/m}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{cp} &= 0,50 \text{ m} \cdot 0,50 \text{ m} = 0,25 \text{ m}^2 \\p_{cp} &= 2 \cdot (0,50 \text{ m} + 0,50 \text{ m}) = 2,00 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{oh} &= (0,50 \text{ m} - 2 \cdot 0,025 \text{ m})^2 = 0,2025 \text{ m}^2 \\p_h &= 2 \cdot 2 \cdot (0,50 \text{ m} - 2 \cdot 0,025 \text{ m}) = 1,80 \text{ m}\end{aligned}$$

c) ¿Es posible despreciar la torsión?

Para poder despreciar la torsión debe ser: $T_u \leq \frac{1}{12} \cdot \phi \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}$

$$T_u = 71 \text{ kNm} > 0,75 \cdot 5000 \text{ kN/m}^2 \cdot (0,25 \text{ m}^2)^2 / (12 \cdot 2,00 \text{ m}) = 9,8 \text{ kNm}$$

Por lo que la torsión deberá ser tenida en consideración.

d) Verificación de fisuración en el alma y bielas comprimidas

Por tratarse de una sección maciza debe verificarse:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{T_u \cdot p_h}{1,7 \cdot A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \cdot \left(\frac{V_c}{b_w \cdot d} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{f'_c}\right)$$
$$\sqrt{\left(\frac{180 \text{ kN}}{0,5 \text{ m} \cdot 0,455 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{71 \text{ kNm} \cdot 1,8 \text{ m}}{1,7 \cdot (0,2025 \text{ m}^2)^2}\right)^2} \leq 0,75 \cdot \left(833 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} + \frac{2}{3} \cdot 5000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}\right)$$
$$1996,74 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \leq 3125 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Por lo tanto verifica adecuadamente.

e) Cálculo de las armaduras necesarias por flexión

$$m_n = M_n / (b_w \cdot d^2 \cdot 0,85 \cdot f'_c) = 0,07074$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 0,07344 \quad \text{por lo que} \quad k_c = k_a / 0,85 = 0,086 < 0,375 \Rightarrow A'_s = 0$$

$$A_s = k_a \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,07344 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 500 \text{ mm} \cdot 455 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} =$$
$$A_s = 845 \text{ mm}^2$$

$$A_{s \text{ mín}} = 1,4 \cdot b_w \cdot d / f_y = 1,4 \text{ MPa} \cdot 500 \text{ mm} \cdot 455 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} =$$
$$A_{s \text{ mín}} = 758 \text{ mm}^2$$

$$A_s > A_{s \text{ mín}}$$

f) Cálculo de las armaduras necesarias por corte

$$V_s = V_n - V_c = 240,0 \text{ kN} - 189,6 \text{ kN} = 50,4 \text{ kN}$$

$$A_v / s = V_s / (d \cdot f_{yt}) = [50,4 \text{ kN} / (0,455 \text{ m} \cdot 420 \text{ MPa})] \cdot 1000 \text{ mm}^2 \text{ MN} / (\text{m}^2 \text{ kN}) =$$
$$A_v / s = V_s / (d \cdot f_{yt}) = 264 \text{ mm}^2/\text{m}$$

No se verifica aquí cuantía mínima ni se adoptan barras y separaciones pues se utilizará un único estribado que integre las necesidades del corte y de la torsión.

g) Armaduras necesarias para torsión

Como se está dimensionando una pieza de hormigón no pretensado se adopta $\theta = 45^\circ$ además, al utilizar un único acero se tiene $f_{yt} = f_{y\ell} = f_y$

Al utilizar $\theta = 45^\circ$ resulta: $A_{\ell} / p_h = A_t / s$ por lo que operando con la expresión

$$T_n = \frac{1,7 \cdot A_{oh} \cdot A_t \cdot f_{yt}}{s} \cdot \cot g(\theta)$$

se obtiene

$$A_{\ell} / p_h = A_t / s = T_n / (1,7 \cdot A_{oh} \cdot f_{yt} \cdot \cot g(\theta))$$

$$A_{\ell} / p_h = A_t / s = [94,7 \text{ kNm} / (1,7 \cdot 0,2025 \text{ m}^2 \cdot 420000 \text{ kN/m}^2 \cdot \cot g(45^\circ))] \cdot 10^6 \text{ mm}^2 / \text{m}^2$$

$$A_{\ell} / p_h = A_t / s = 655 \text{ mm}^2 / \text{m}$$

y en consecuencia

$$A_{\ell} = 655 \text{ mm}^2 / \text{m} \cdot 1,8 \text{ m} = 1179 \text{ mm}^2$$

La verificación de la cuantía mínima de armadura longitudinal se hace a través de la expresión:

$$A_{\ell, \min} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{A_{cp}}{f_{y\ell}} - \left[\frac{A_t}{s} \right] \cdot p_h \cdot \frac{f_{yt}}{f_{y\ell}}$$

donde “ $f_{y\ell}$ ” es la tensión de fluencia especificada para la armadura longitudinal y además (A_t / s) no debe tomarse menor que “ $b_w / (6 \cdot f_{yt}) = 198 \text{ mm}^2 / \text{m}$ ” valor superado por la armadura calculada.

$$A_{\ell, \min} = [5 \cdot 5 \text{ MPa} \cdot 0,25 \text{ m}^2 / (12 \cdot 420 \text{ MPa})] \cdot 10^6 \text{ mm}^2 / \text{m}^2 - 655 \text{ mm}^2 / \text{m} \cdot 1,80 \text{ m} =$$

$$A_{\ell, \min} = 61 \text{ mm}^2$$

Por lo que la armadura calculada verifica cuantía mínima.

h) Adopción de armaduras

h.1) Armadura transversal

Partiendo de un estribado en dos ramas la armadura necesaria es:

$$0,5 \cdot A_v / s + A_t / s = 0,5 \cdot 264 \text{ mm}^2 / \text{m} + 655 \text{ mm}^2 / \text{m} = 787 \text{ mm}^2 / \text{m}$$

La cuantía mínima se verifica a través de la expresión:

$$(A_v + 2 \cdot A_t) = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w \cdot s}{f_{yt}} \geq \frac{0,33 \cdot b_w \cdot s}{f_{yt}}$$

Para evitar adoptar una armadura que no verificara cuantía mínima y tener que repetir cálculos se reordena la ecuación anterior para obviar tener que conocer la separación de las armaduras:

$$[(A_v + 2 \cdot A_t) / s]_{\min} = [5 \text{ MPa} \cdot 0,5 \text{ m} / (16 \cdot 420 \text{ MPa})] \cdot 10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2 =$$

$$[(A_v + 2 \cdot A_t) / s]_{\min} = 372 \text{ mm}^2/\text{m} \geq 392 \text{ mm}^2/\text{m}$$

es decir que la cuantía mínima es de $392 \text{ mm}^2/\text{m}$ y hay dispuestos $2 \cdot 787 \text{ mm}^2/\text{m} = 1574 \text{ mm}^2/\text{m}$ por lo que dicha cuantía mínima se verifica adecuadamente.

La separación máxima de armaduras, atendiendo solamente a la torsión, será:

$$s \leq \text{mínimo} (p_h / 8 ; 300 \text{ mm}) = 225 \text{ mm}$$

Teniendo en consideración también el corte se verifica que: $V_s \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$ por lo que resulta:

$$s \leq \text{mínimo} (d / 2 ; 400 \text{ mm}) = 228 \text{ mm}$$

La armadura adoptada deberá tener entonces una separación menor que 225 mm .

Se adopta finalmente un estribado en dos ramas $d_b 12 \text{ c} / 0,14 \text{ m}$ ($807 \text{ mm}^2/\text{m}$)

h.2) Armadura longitudinal

La armadura longitudinal debe ser corregida por el efecto de la flexión por lo que resulta:

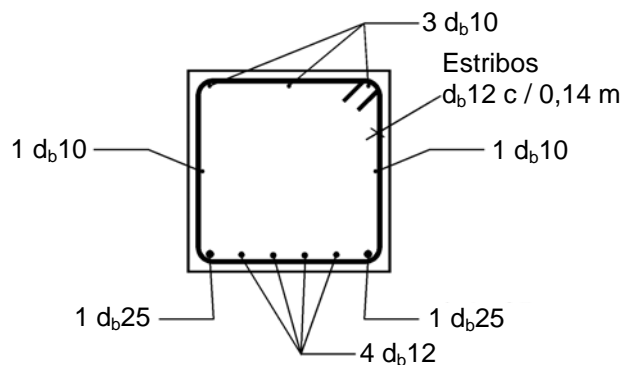
$$\text{Armadura cara inferior} = A_l / 2 + A_s = 1179 \text{ mm}^2 / 2 + 845 \text{ mm}^2 = 1435 \text{ mm}^2$$

$$\text{Armadura cara superior} = A_l / 2 - A_s = 1179 \text{ mm}^2 / 2 - 845 \text{ mm}^2 < 0 \quad (\text{no necesaria})$$

$$\text{Armadura caras laterales} = A_l / 2 = 1179 \text{ mm}^2 / 2 = 590 \text{ mm}^2$$

Siempre que aparezca torsión habrá que disponer armadura longitudinal en las cuatro esquinas de la sección.

En función del estribado adoptado la armadura longitudinal deberá tener un diámetro mínimo de: $d_b \geq \text{máx} (s / 24 ; 10 \text{ mm}) = 10 \text{ mm}$. Por otra parte en estos casos deberá haber armaduras distanciadas no más de 300 mm .



Ejemplo 4.II

Enunciado: Calcular la capacidad a torsión de la sección finalmente adoptada en el Ejemplo 4.I pero considerando ahora que el momento flector actuante es un cuarto del utilizado en dicho ejemplo, es decir:

$$M_u = 140 \text{ kNm} / 4 = 35 \text{ kNm}$$

Se trata de un caso muy poco probable pues sería muy raro que el momento flector pudiera variar sin hacerlo el corte. El ejemplo se ha elegido así porque se trata de poner de manifiesto un comportamiento de la resistencia a torsión que quedaría enmascarado si además se hiciera variar el corte.

Resolución:

a) Cálculo de las armaduras necesarias por flexión

En este punto no es necesario verificar cuantías pues la máxima está verificada para un momento mayor en el Ejemplo 4.I y la mínima está cubierta por la armadura dispuesta. Lo que interesa es saber las fuerzas, que moviliza la flexión, reducidas a términos de armaduras.

$$M_n = M_u / \phi = M_u / 0,9 = 35 \text{ kNm} / 0,9 = 38,9 \text{ kNm}$$

$$m_n = M_n / (b_w \cdot d^2 \cdot 0,85 \cdot f'_c) = 0,01768$$

$$k_a = 1 - (1 - 2 \cdot m_n)^{1/2} = 0,01784$$

$$A_s = k_a \cdot 0,85 \cdot f'_c \cdot b_w \cdot d / f_y = 0,01784 \cdot 0,85 \cdot 25 \text{ MPa} \cdot 500 \text{ mm} \cdot 455 \text{ mm} / 420 \text{ MPa} =$$
$$A_s = 205 \text{ mm}^2$$

b) Armaduras netas disponibles para torsión

b.1) Armadura transversal

Dado que el esfuerzo de corte no ha cambiado, la armadura disponible coincide con la del Ejemplo 4.I. Sin introducir errores significativos utilizaremos la teórica en lugar de la efectivamente colocada.

b.2) Armadura longitudinal

$$\text{Cara inferior} = 2 d_b25 + 4 d_b12 - A_s = 1229 \text{ mm}^2$$

$$\text{Cara superior} = 3 d_b10 + A_s = 441 \text{ mm}^2$$

$$\text{Caras laterales} = 1 d_b25 + 2 d_b10 = 648 \text{ mm}^2$$

La armadura longitudinal disponible para torsión resultará entonces igual al doble de la armadura de la cara con menor armadura disponible, es decir:

$$A_l = 2 \cdot 441 \text{ mm}^2 = 882 \text{ mm}^2$$

c) Inclinación de las fisuras

La inclinación debe verificar:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) \leq \operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{\frac{\left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}{\left(\frac{A_\ell}{\rho_h} \cdot f_{y\ell}\right)}} \leq \operatorname{tg}(60^\circ)$$

Tal como se ha comentado en el enunciado, se está tratando de variar lo menos posible las condiciones del problema anterior de modo de poner de manifiesto la variación de T_u al modificar solamente M_u por ese motivo, sin introducir errores significativos, se tiene:

$$\begin{aligned} A_t / s &= 655 \text{ mm}^2/\text{m} \\ A_\ell / \rho_h &= 882 \text{ mm}^2 / 1,80 \text{ m} = 490 \text{ mm}^2/\text{m} \end{aligned}$$

por lo que la expresión anterior se transforma en

$$0,577 \leq (655 \text{ mm}^2 / 490 \text{ mm}^2)^{1/2} = 1,156 \leq 1,73$$

Es decir, que el ángulo es aceptable. Operando se obtiene $\theta = 49,1^\circ$

d) Torsor resistente nominal

La expresión a emplear en este caso es:

$$T_n = 1,7 \cdot A_{oh} \cdot \sqrt{\left(\frac{A_\ell}{\rho_h} \cdot f_{y\ell}\right) \cdot \left(\frac{A_t}{s} \cdot f_{yt}\right)}$$

$$\begin{aligned} T_n &= 1,7 \cdot 0,2025 \text{ m}^2 \cdot 420000 \text{ kN/m}^2 \cdot (490 \text{ mm}^2/\text{m} \cdot 655 \text{ mm}^2/\text{m})^{1/2} / (10^6 \text{ mm}^2/\text{m}^2) = \\ T_n &= 82,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

lo que implica que:

$$T_u = \phi \cdot T_n = 0,75 \cdot T_n = 61,5 \text{ kNm}$$

Valores menores a los del Ejemplo 4.I. Como conclusión puede decirse que, en este caso, al disminuir el momento flector disminuye la capacidad resistente a torsión. Las diferencias hubieran sido mucho mayores si en el Ejemplo 4.I se hubieran adoptado los valores teóricos necesarios en lugar de respetar los diámetros y separaciones máximas para la armadura longitudinal.

La verificación de fisuración del alma es innecesaria dado que al mantenerse el corte y disminuir la torsión mejoran las condiciones ya verificadas en el Ejemplo 4.I.

COLUMNAS CORTAS SIMPLES Y ZUNCHADAS

5.1.- Generalidades

Las columnas cortas¹ deben verificar la condición resistente dada por:

$$P_u \leq \phi \cdot P_{n(\text{máx})} \quad (\text{CIRSOC 201-2005, art. 9.1.1}) \text{ con}$$

P_u = Resistencia requerida calculada para cargas mayoradas

$$P_{n(\text{máx})} = \begin{cases} \text{Columnas simples} = 0,80 \cdot P_n & (\text{CIRSOC 201-2005, art. 10.3.6.2}) \\ \text{Columnas zunchadas} = 0,85 \cdot P_n & (\text{CIRSOC 201-2005, art. 10.3.6.1}) \end{cases}$$

P_n = Resistencia nominal ("real") de la sección =

$$P_n = 0,85 \cdot f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + f_y \cdot A_{st} = 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g + A_{st} \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)$$

con

f'_c = Resistencia especificada a la compresión del hormigón

f_y = Tensión de fluencia especificada de la armadura

A_g = Área total o bruta de la sección de hormigón

A_{st} = Área total de la armadura longitudinal

ϕ = Coeficiente de reducción de resistencia en función del tipo de rotura :

$$\phi = \begin{cases} \text{Columnas simples} = & 0,65 \\ \text{Columnas zunchadas} = & 0,70 \end{cases} \quad (\text{CIRSOC 201-2005, art. 9.3.2.2})$$

Finalmente queda que:

$$\text{Para columnas simples:} \quad P_n = P_u / (0,80 \cdot \phi) = P_u / (0,80 \cdot 0,65) = P_u / 0,520$$

$$\text{Para columnas zunchadas:} \quad P_n = P_u / (0,85 \cdot \phi) = P_u / (0,85 \cdot 0,70) = P_u / 0,595$$

Se desarrollarán problemas en los que se supone que actúan solamente cargas de peso propio y sobrecargas de uso por lo que las expresiones a utilizar para el cálculo de la resistencia requerida se reducen a:

$$P_u = \text{máximo entre} \begin{cases} 1,4 \cdot P_D \\ 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L \end{cases} \quad (\text{CIRSOC 201-2005, art. 9.2.1})$$

¹ Se trata de elementos en los cuales los efectos de segundo orden pueden ser despreciados.

5.2.- Desarrollo de expresiones de cálculo y verificación

5.2.1.- Resistencia de una columna

La expresión genérica que da el CIRSOC 201-2005, artículo 9.1.1, es:

$$P_u = \phi \cdot P_{n(\text{máx})}$$

resultando

$$P_n = 0,85 \cdot f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + f_y \cdot A_{st} = 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g + A_{st} \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)$$

Para columnas simples: $P_u = 0,65 \cdot 0,80 \cdot P_n = 0,520 \cdot P_n$

Para columnas zunchadas: $P_u = 0,70 \cdot 0,85 \cdot P_n = 0,595 \cdot P_n$

5.2.2.- Expresiones de cálculo cuando “ $\rho = A_{st} / A_g$ ” es dato del problema

Para columnas simples: $P_n = P_u / (0,80 \cdot \phi) = P_u / (0,80 \cdot 0,65) = P_u / 0,520$

Para columnas zunchadas: $P_n = P_u / (0,85 \cdot \phi) = P_u / (0,85 \cdot 0,70) = P_u / 0,595$

$$A_g = P_n / [0,85 \cdot f'_c + \rho \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)]$$
$$A_{st} = \rho \cdot A_g$$

5.2.3.- Expresiones de cálculo cuando “ A_g ” es dato del problema

Para columnas simples: $P_n = P_u / (0,80 \cdot \phi) = P_u / (0,80 \cdot 0,65) = P_u / 0,520$

Para columnas zunchadas: $P_n = P_u / (0,85 \cdot \phi) = P_u / (0,85 \cdot 0,70) = P_u / 0,595$

$$A_{st} = (P_n - 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g) / (f_y - 0,85 \cdot f'_c)$$

5.2.4.- Verificación de cuantías

Como se resume en los puntos 5.2.5 y 5.2.6, las cuantías geométricas ($\rho =$ armadura total / sección bruta de hormigón) deben estar comprendidas entre un valor mínimo de 0,01 y un valor máximo de 0,08. En los ejemplos resueltos se muestra cómo se verifican estas cuantías y algunos casos particulares referidos a la denominada “área efectiva reducida” definida en el punto 5.3.

5.2.5.- Disposiciones constructivas correspondientes a columnas simples

- a) **Dimensiones de la sección de hormigón:** La mínima dimensión de una columna hormigonada en obra debe ser mayor o igual que 200 mm (CIRSOC 201-2005, artículo 10.8).
- b) **Armaduras longitudinales:** El diámetro a utilizar en armaduras longitudinales debe ser mayor o igual que 12 mm (CIRSOC 201-2005, artículo 10.8). Cuando se utilicen estribos cuadrados o rectangulares el número mínimo de barras longitudinales será cuatro mientras que si se utilizaran estribos triangulares este número se reduce a tres (CIRSOC 201-2005, artículo 10.9.2). Como ya se ha mencionado la cuantía geométrica (A_{st} / A_g) debe estar comprendida entre 0,01 y 0,08 (CIRSOC 201-2005, artículo 10.9.1). Si en la columna se prevén empalmes por yuxtaposición la cuantía máxima debería limitarse a 0,04 (CIRSOC 201-2005, artículo C10.9.1).
- c) **Estribos:** Los diámetros mínimos de los estribos a partir del diámetro de las armaduras longitudinales, se obtienen de la Tabla 7.10.5.1 del CIRSOC 201-2005 y se los señala a continuación en la Tabla 5.2.5.c.

Tabla 5.2.5.c

Diámetro de las barras longitudinales [mm]	Diámetro mínimo de estribos [mm]
≤ 16	6
$16 < d_b \leq 25$	8
$25 < d_b \leq 32$	10
$d_b > 32$ y paquetes de barras	12
Se podrá utilizar alambre conformado o mallas soldadas de área equivalente.	

Por otra parte, la separación "s" entre estribos debe cumplir las siguientes condiciones (CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.5.2):

$$s \leq \begin{cases} 12 \text{ diámetros de la armadura longitudinal} \\ 48 \text{ diámetros de la armadura de estribos} \\ \text{dimensión del lado menor de la columna} \end{cases}$$

La distancia anterior debe dividirse por dos en el caso del estribo que se encuentra al pie de la columna (el más próximo a la losa o a la fundación) y al que se encuentra en la parte superior de la columna (el más próximo a la losa o ábaco superior), (CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.5.4). Si en la parte superior existieran vigas o ménsulas sobre los cuatro lados de la columna el estribo superior debe disponerse a no más de 80 mm de la armadura inferior de la viga o ménsula de menor altura (CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.5.5).

El CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.5.3, considera efectivamente arriostradas a las barras que se encuentren en las esquinas de los estribos y a aquellas que sin estar en una esquina de un estribo disten menos de 15 diámetros del estribo de una barra que sí lo esté. Los estribos pueden ser cuadrados, rectangulares o rómbicos con ángulos interiores menores o iguales a 135° .

Cuando las barras se encuentren distribuidas sobre una circunferencia se puede utilizar un estribo circular cerrado.

5.2.6.- Disposiciones constructivas correspondientes a columnas zunchadas

- a) **Dimensiones de la sección de hormigón:** Si bien no se prohíbe específicamente el uso de secciones no circulares, al hablar de dimensiones mínimas de columnas zunchadas el CIRSOC 201-2005, artículo 10.8, sólo habla de un diámetro mínimo de 300 mm. En columnas zunchadas el recubrimiento de las espiras del zuncho debe ser como mínimo de 40 mm (CIRSOC 201-2005, artículo 7.7.1.c).
- b) **Armaduras longitudinales:** El diámetro a utilizar en armaduras longitudinales debe ser mayor o igual que 12 mm (CIRSOC 201-2005, artículo 10.8). El número mínimo de barras a utilizar será seis (CIRSOC 201-2005, artículo 10.9.2). Al igual que en columnas simples la cuantía geométrica (A_{st} / A_g) debe estar comprendida entre 0,01 y 0,08 y, si en la columna se prevén empalmes por yuxtaposición, la cuantía máxima debería limitarse a 0,04.
- c) **Zunchos:**
En las expresiones de cálculo de las columnas zunchadas no aparecen las características del zuncho porque el CIRSOC 201-2005 considera que éste sólo es capaz de compensar la resistencia perdida al producirse el descascaramiento de la columna. De hecho, ese es el criterio con el que se deduce el zunchado mínimo a disponer en una columna para que las expresiones de cálculo puedan considerarse de aplicación. Según el CIRSOC 201-2005, artículo 10.9.3, el zunchado debe verificar:

$$\rho_s \geq 0,45 \cdot (A_g / A_{ch} - 1) \cdot f'_c / f_{yt}$$

donde

ρ_s = Relación entre el volumen de la armadura del zuncho y el volumen total del núcleo (medido desde el diámetro exterior del zuncho):

$$\rho_s = (\pi \cdot h_c \cdot A_{sp} \cdot 4 / (\pi \cdot h_c^2 \cdot s)) = 4 \cdot A_{sp} / (s \cdot h_c)$$

A_{sp} = Área de la espira del zuncho

s = Separación o paso del zunchado (medido al eje de las espiras)

A_g = Área total o bruta de la sección de hormigón

A_{ch} = Área del núcleo zunchado tomando como diámetro el diámetro exterior del zuncho = $\pi \cdot h_c^2 / 4$

h_c = Diámetro exterior del zuncho

f_{yt} = Tensión de fluencia especificada f_y para la armadura transversal.
Para valores de $f_{yt} > 420$ MPa no se deben utilizar empalmes por yuxtaposición

El diámetro mínimo de los zunchos es 10 mm (CIRSOC 201-2005, artículos 7.10.4.2 y 10.8).

El paso libre "s" entre las espiras del zuncho debe cumplir las siguientes condiciones (CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.4.3):

$$s \begin{cases} \leq 80 \text{ mm} \\ \geq 25 \text{ mm} \\ \geq 1,33 \text{ del tamaño máximo del agregado grueso a utilizar} \end{cases}$$

El anclaje de un zuncho dentro de una fundación o dentro de otro elemento estructural (p.e. losas, ábacos y vigas) se realiza a través de una vuelta y media de zuncho dentro del elemento en cuestión (CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.4.4). En columnas con capitel el zuncho debe prolongarse hasta que el capitel tenga una dimensión que duplique a la de la columna (CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.4.8).

Si bien los zunchos pueden empalmarse mediante empalmes mecánicos y soldadura, la forma más frecuente de hacerlo es mediante empalmes por yuxtaposición. El CIRSOC 201-2005, artículo 7.10.4.5.a), establece que las longitudes de yuxtaposición deben ser como mínimo de 300 mm y mayores o iguales a los valores que se vuelcan en la Tabla 5.2.6.c en función del diámetro del zuncho (d_b).

Tabla 5.2.6.c

Barra o alambre conformado sin revestir	$48 \cdot d_b$
Barra o alambre liso sin revestir	$72 \cdot d_b$
Barra o alambre liso, sin revestir con gancho reglamentario en el extremo del zuncho embebido dentro del núcleo de hormigón confinado por el zuncho	$48 \cdot d_b$
<i>Adoptada de la tabla 7.10.4.5 del CIRSOC 201-2005.</i>	

5.3.- Cuantías mínimas en elementos sobredimensionados

Cuando las secciones de hormigón vienen impuestas por condiciones no estructurales (p.e. para igualar la sección de columnas en todos los niveles de una estructura) la aplicación de la cuantía mínima puede conducir a secciones de acero muy importantes. Por este motivo el CIRSOC 201-2005, artículos 10.8.4 y C10.8.4, indica que:

- a) A los efectos de los cálculos estructurales (p.e. peso propio, resolución de hiperestáticos, etc.) las columnas deben ser consideradas con sus dimensiones reales.
- b) A los efectos del cálculo de la cuantía mínima puede utilizarse un área efectiva reducida producto de despejar el área necesaria para obtener una columna con cuantía mínima. En ningún caso el área efectiva a utilizar puede ser menor al 50% del área bruta de la columna.

COLUMNAS CORTAS SIMPLES Y ZUNCHADAS – EJEMPLOS

Ejemplo 5.I

Enunciado: proyectar una columna simple para las siguientes condiciones

Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

Sección transversal: - A definir

Estribos: - Recubrimiento = 20 mm
 - Diámetro: a definir

Armadura longitudinal: - A definir

Solicitación: - $P_D = 550$ kN ; $P_L = 300$ kN

Resolución:

$$P_u = \text{máximo entre} \begin{cases} 1,4 \cdot P_D = 1,4 \cdot 550 \text{ kN} = 770 \text{ kN} \\ 1,2 \cdot P_D + 1,6 \cdot P_L = 1,2 \cdot 550 \text{ kN} + 1,6 \cdot 300 \text{ kN} = 1140 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_u = 1140 \text{ kN}$$

$$P_n = P_u / (0,80 \cdot \phi) = 1140 \text{ kN} / (0,80 \cdot 0,65) = 2192 \text{ kN}$$

Se adopta una cuantía geométrica " $\rho = 0,025$ " por lo que resulta:

$$A_g = \frac{P_n}{0,85 \cdot f'_c + \rho \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)}$$
$$A_g = \frac{2192 \text{ kN}}{0,85 \cdot 20 \text{ MPa} + 0,025 \cdot (420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa})} \cdot 1000 \frac{\text{mm}^2 \text{ MN}}{\text{m}^2 \text{ kN}}$$

$$A_g = 80970 \text{ mm}^2 \quad (809,7 \text{ cm}^2)$$

Se adopta una columna cuadrada de $b_x = b_y = 300$ mm con lo que resulta:
 $A_g = 90000 \text{ mm}^2$ (900 cm^2) y la armadura se obtiene como:

$$A_{st} = \frac{(P_n - 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g)}{f_y - 0,85 \cdot f'_c}$$
$$A_{st} = \frac{\left(2192 \text{ kN} \cdot \frac{1}{1000} \frac{\text{MN}}{\text{kN}} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot 90000 \text{ mm}^2 \cdot \frac{1}{10^6} \frac{\text{m}^2}{\text{mm}^2} \right)}{420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa}} \cdot 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}$$

$$A_{st} = 1641 \text{ mm}^2 \quad (16,41 \text{ cm}^2)$$

Para la armadura longitudinal se adopta: $8 \cdot d_b 16 = 8 \cdot 201 \text{ mm}^2 = 1608 \text{ mm}^2$ (16,08 cm²)

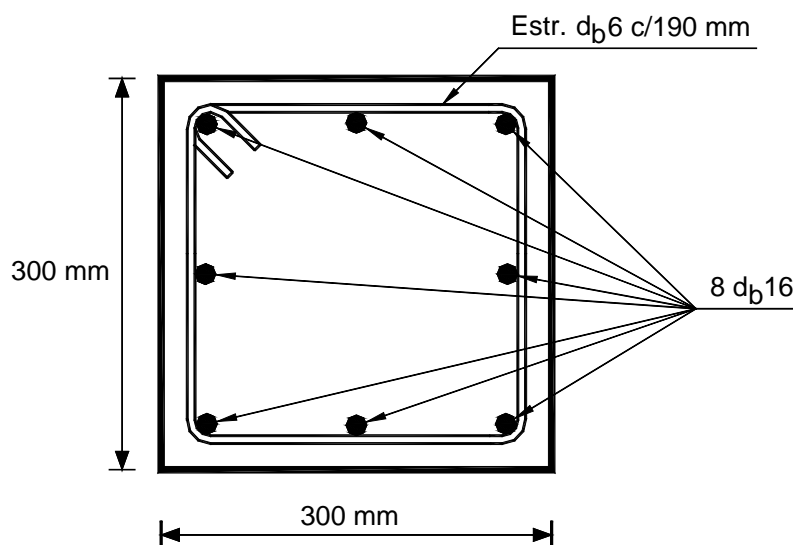
Lo que conduce a una cuantía: $\rho = 1608 \text{ mm}^2 / 90000 \text{ mm}^2 = 0,018$

En función del diámetro de las barras longitudinales corresponde adoptar un estriado de 6 mm de diámetro con una separación igual al menor valor entre:

$$\begin{aligned} 12 \cdot d_b \text{ longitudinal} &= 12 \cdot 16 \text{ mm} = 192 \text{ mm} \\ 48 \cdot d_{be} &= 48 \cdot 6 \text{ mm} = 288 \text{ mm} \\ \text{lado menor columna} &= 300 \text{ mm} \end{aligned}$$

es decir, 190 mm.

Armado:



Ejemplo 5.II

Enunciado: Recalcular la columna del ejemplo anterior minimizando la sección de hormigón.

Resolución:

Se adopta una cuantía geométrica " $\rho = 0,04$ " para tener en cuenta la posibilidad de que existan empalmes en el tramo considerado.

$$A_g = \frac{P_n}{0,85 \cdot f'_c + \rho \cdot (f_y - 0,85 \cdot f'_c)}$$

$$A_g = \frac{2192 \text{ kN}}{0,85 \cdot 20 \text{ MPa} + 0,040 \cdot (420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa})} \cdot 1000 \frac{\text{mm}^2 \text{ MN}}{\text{m}^2 \text{ kN}}$$

$$A_g = 66183 \text{ mm}^2 \text{ (661,83 cm}^2\text{)} \quad \text{por lo que se adopta } b_x = b_y = 260 \text{ mm}$$

Obteniéndose:

$$A_{st} = \frac{(P_n - 0,85 \cdot f'_c \cdot A_g)}{f_y - 0,85 \cdot f'_c}$$

$$A_{st} = \frac{\left(2192 \text{ kN} \cdot \frac{1 \text{ MN}}{1000 \text{ kN}} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot 67600 \text{ mm}^2 \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^6 \text{ mm}^2} \right)}{420 \text{ MPa} - 0,85 \cdot 20 \text{ MPa}} \cdot 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2}$$

$$A_{st} = 2588 \text{ mm}^2 \quad (25,88 \text{ cm}^2)$$

Para la armadura longitudinal se adopta: $4 \cdot d_b25 + 4 \cdot d_b16 = 2768 \text{ mm}^2 \quad (27,68 \text{ cm}^2)$

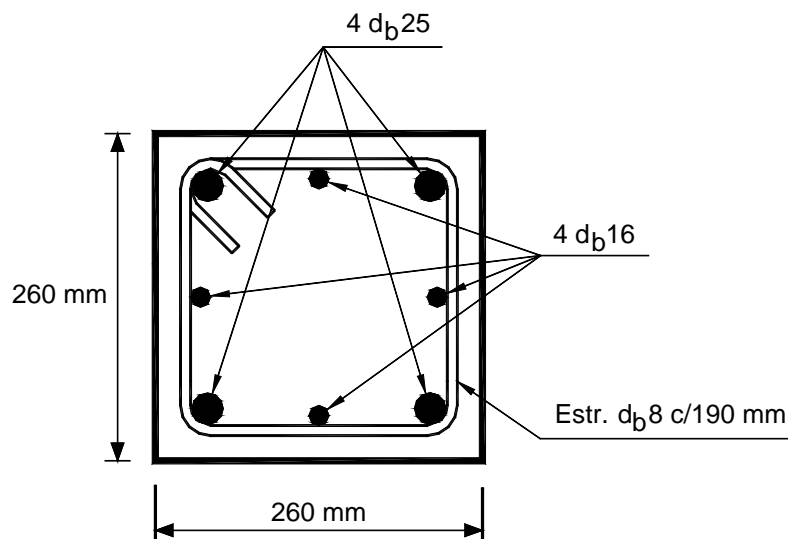
Lo que conduce a una cuantía: $\rho = 2768 \text{ mm}^2 / 67600 \text{ mm}^2 = 0,041 \approx 0,04$

En función del máximo diámetro de las barras longitudinales corresponde adoptar un estriado de 8 mm de diámetro con una separación igual al menor valor entre:

$$\begin{aligned} 12 \cdot \text{menor } d_b \text{ longitudinal} &= 12 \cdot 16 \text{ mm} = 192 \text{ mm} \\ 48 \cdot d_{be} &= 48 \cdot 8 \text{ mm} = 384 \text{ mm} \\ \text{lado menor columna} &= 260 \text{ mm} \end{aligned}$$

es decir, 190 mm.

Armado:



Ejemplo 5.III

Enunciado: Calcular “ P_u ” para una columna simple con dimensiones y armaduras longitudinales mínimas reglamentarias y adoptar su estriado.

Materiales: - Hormigón: H-20 ($f'_c = 20$ MPa)
 - Acero: ADN 420 ($f_y = 420$ MPa)

Sección transversal: - $b_x = b_y = 200$ mm

Estribos: - Recubrimiento = 20 mm
 - Diámetro: a definir

Armadura longitudinal: - $A_{st} = 4 \cdot d_b 12 = 4 \cdot 113 \text{ mm}^2 = 452 \text{ mm}^2$ (4,52 cm^2)

Resolución:

La columna verifica las cuantías límites pues se tiene:

$$0,01 < \frac{A_{st}}{A_g} = \frac{A_{st}}{b_x \cdot b_y} = \frac{452 \text{ mm}^2}{40000 \text{ mm}^2} = 0,0113 < 0,08$$

$$P_u = 0,80 \cdot \phi \cdot [0,85 \cdot f'_c \cdot (A_g - A_{st}) + f_y \cdot A_{st}]$$

$$P_u = \frac{0,80 \cdot 0,65 \cdot [0,85 \cdot 20 \text{ MPa} \cdot (40000 \text{ mm}^2 - 452 \text{ mm}^2) + 420 \text{ MPa} \cdot 452 \text{ mm}^2]}{1000 \frac{\text{mm}^2 \text{ MPa}}{\text{kN}}}$$

$$P_u = 448 \text{ kN}$$

En función del máximo diámetro de las barras longitudinales corresponde adoptar un estriado de 6 mm de diámetro con una separación igual al menor valor entre:

$$\begin{aligned} 12 \cdot \text{menor } d_b \text{ longitudinal} &= 12 \cdot 12 \text{ mm} = 144 \text{ mm} \\ 48 \cdot d_{be} &= 48 \cdot 6 \text{ mm} = 288 \text{ mm} \\ \text{lado menor columna} &= 200 \text{ mm} \end{aligned}$$

es decir, 140 mm.

Armado:

